# ЭКОНОМЕТРИКА

## Корреляционно-регрессионный анализ

# Корреляционный анализ

- Метод, применяемый тогда, когда данные наблюдений или эксперимента можно считать случайными и выбранными из совокупности, распределенной по многомерному нормальному закону
- Основная задача корреляционного анализа - выявление связи между переменными путем точечной и интервальной оценки различных (парных, множественных, частных) коэффициентов корреляции

# Коэффициент корреляции:

- **Формула:** $r = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$ $\quad |r| \le 1$
- **Оценка значимости с помощью *t*-критерия Стьюдента:**

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \ge t(\alpha, n-2)$$

- ***n-2* – число степеней свободы**
- ***α* – уровень значимости**

# Пример для выборки из двухмерной нормально распределенной генеральной совокупности

- ***n = 122, r = 0,4, α = 0,05***
- **значение *t*-критерия Стьюдента:**

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}4\sqrt{122-2}}{\sqrt{1-0{,}4^2}} = 4{,}78$$

- $t_{кр}\ (0{,}05;\ 120) = 1{,}98 < 4{,}78$
- ***r* – значимо отличается от 0**

# Линейная парная регрессия

- **Рассмотрим зависимость между суточной выработкой продукции *Y* и величиной основных производственных фондов (ОПФ) *X* для совокупности 50 однотипных предприятий**

| Вели-чина ОПФ | Середина интерв. $x_i \setminus y_i$ | Суточная выработка продукции | | | | | Всего $n_i$ | Гр. сред. $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 7-11 | 11-15 | 15-19 | 19-23 | 23-27 | | |
| | | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | | |
| 20-25 | 22,5 | 2 | 1 | - | - | - | 3 | 10,3 |
| 25-30 | 27,5 | 3 | 6 | 4 | - | - | 13 | 13,3 |
| 30-35 | 32,5 | - | 3 | 11 | 7 | - | 21 | 17,8 |
| 35-40 | 37,5 | - | 1 | 2 | 6 | 2 | 11 | 20,3 |
| 40-45 | 42,5 | - | - | - | 1 | 1 | 2 | 23,0 |
| Всего $n_j$ | | 5 | 11 | 17 | 14 | 3 | 50 | |
| Гр.сред. $x_j$ | | 25,5 | 29,3 | 31,9 | 35,4 | 39,2 | | |

# Линейная парная регрессия: МНК

- **Метод наименьших квадратов:**

$$S = \sum_{i=1}^{l} (b_0 + b_1 x_i - \overline{y_i})^2 n_i \to \min.$$

- **Параметры уравнения регрессии находим из системы нормальных уравнений:**

$$\begin{cases} b_0 n + b_i \sum_{i=1}^{l} x_i n_i = \sum_{i=1}^{l} \overline{y_i} n_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^{l} x_i n_i + b_1 \sum_{i=1}^{l} x_i^2 n_i = \sum_{i=1}^{l} x_i \overline{y_i} n_i. \end{cases}$$

- **Уравнение регрессии:**

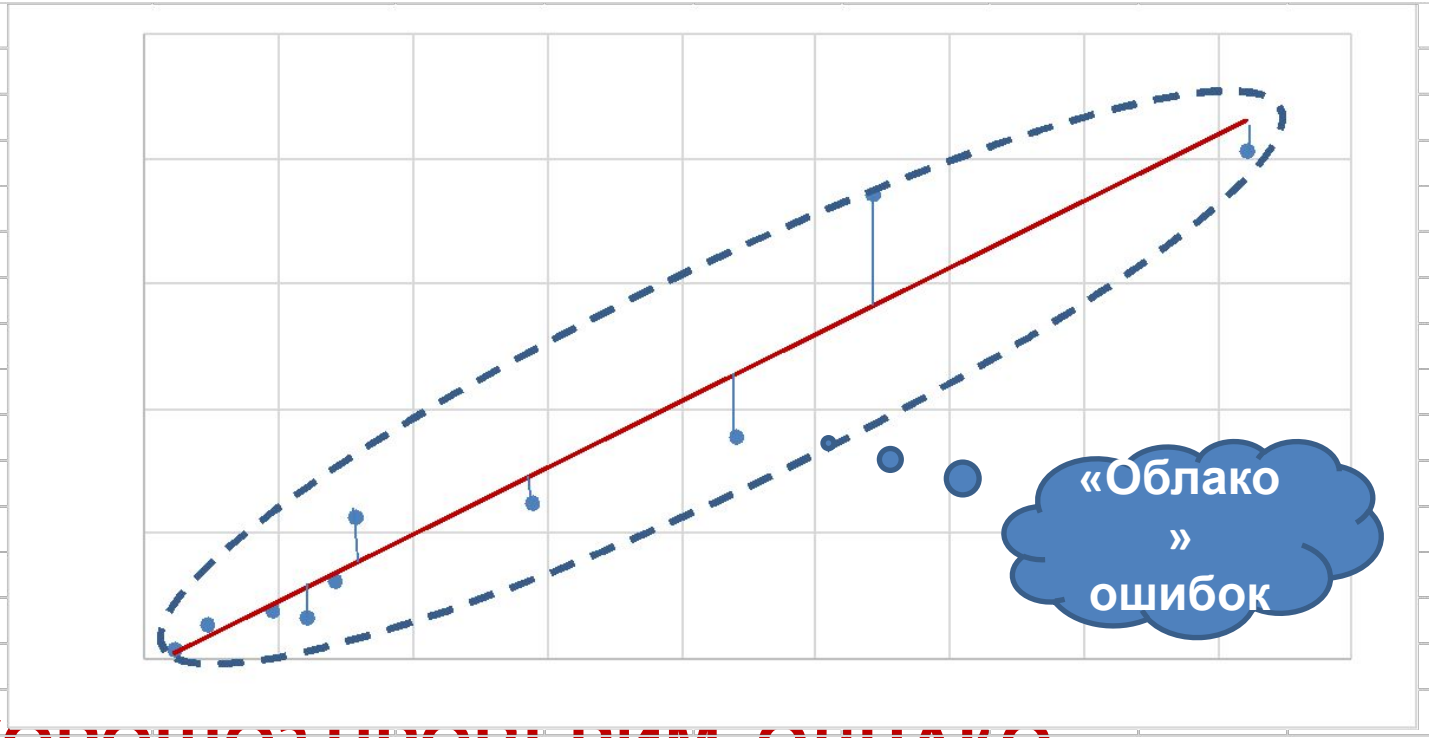
$$y_x = 0,6762x - 4,79$$

- **Коэффициент регрессии: $b_1 = 0,6762$ означает, что при увеличении ОПФ на 1 ед. суточная выработка предприятия увеличивается в среднем на 0,6762 ед.**

# Пример «плохой» модели парной линейной регрессии (Excel)

- По данным, полученным от 10 предприятий, изучается зависимость объема выпуска продукции *Y* (млн. руб.) от численности производственного персонала *X* (чел.)
- Графически зависимость вроде бы близка к линейной

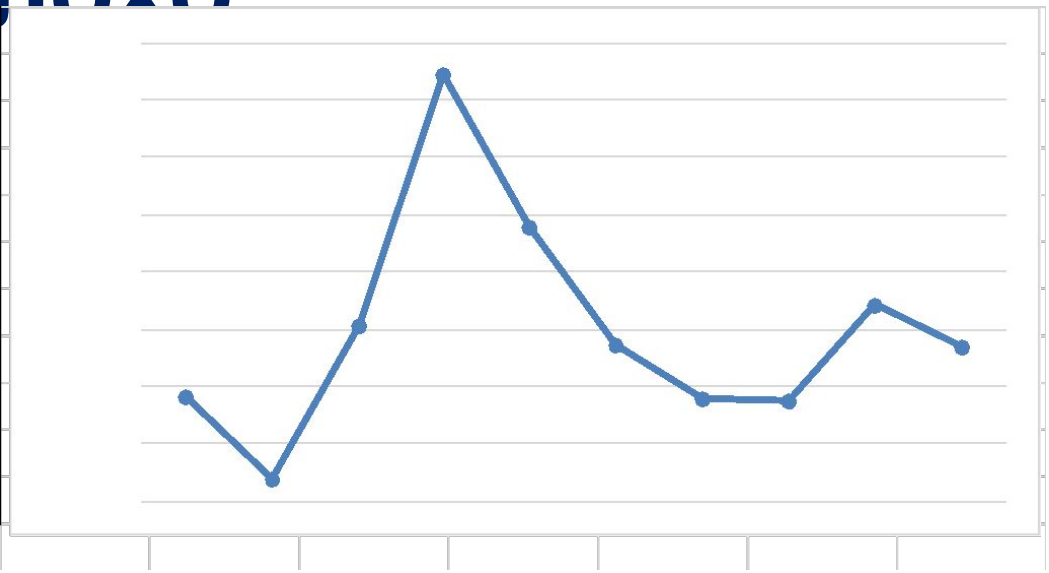
| № | X | Y |
|---|---|---|
| 1 | 2 890 | 62 240 |
| 2 | 4 409 | 88 569 |
| 3 | 210 | 3 118 |
| 4 | 5 436 | 186 256 |
| 5 | 1 559 | 56 262 |
| 6 | 940 | 19216 |
| 7 | 1 197 | 16 567 |
| 8 | 8 212 | 203 456 |
| 9 | 459 | 13 425 |
| 10 | 1 405 | 31 163 |
| | | |
| ЛИНЕЙН | | |
| **26,70618** | **-3323,694** | |
| 2,667583 | 9682,778 | |
| **0,926082** | 20727,36 | |




**ВСЁ ХОРОШО? ПРОВЕРИМ, ОДНАКО…**

# Анализ остатков: всё очень плохо

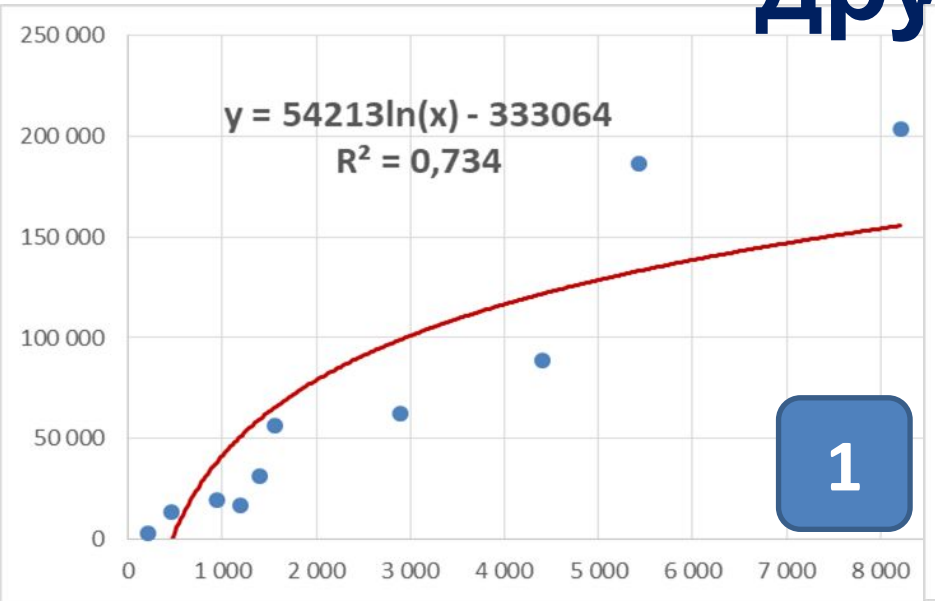
| № | X | Y | Yмод | e |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 890 | 62 240 | 73 856,64 | -11 616,64 |
| 2 | 4 409 | 88 569 | 114 423,05 | -25 854,05 |
| 3 | 210 | 3 118 | 2 284,56 | 833,44 |
| 4 | 5 436 | 186 256 | 141 850,12 | 44 405,88 |
| 5 | 1 559 | 56 262 | 38 310,95 | 17 951,05 |
| 6 | 940 | 19216 | 21 779,94 | -2 563,94 |
| 7 | 1 197 | 16 567 | 28 643,38 | -12 076,38 |
| 8 | 8 212 | 203 456 | 215 985,97 | -12 529,97 |
| 9 | 459 | 13 425 | 8 934,35 | 4 490,65 |
| 10 | 1 405 | 31 163 | 34 198,23 | -3 035,23 |

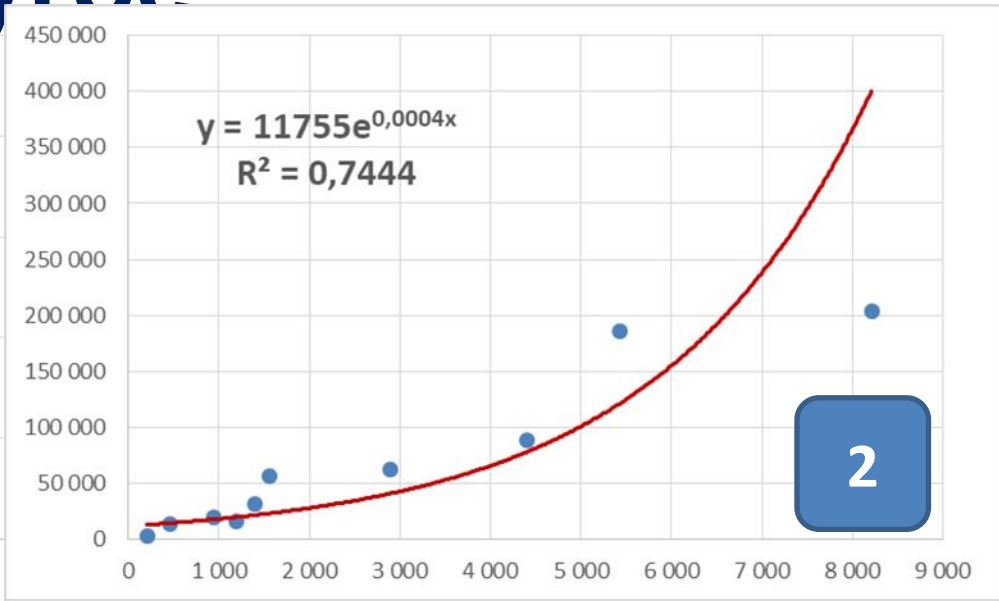


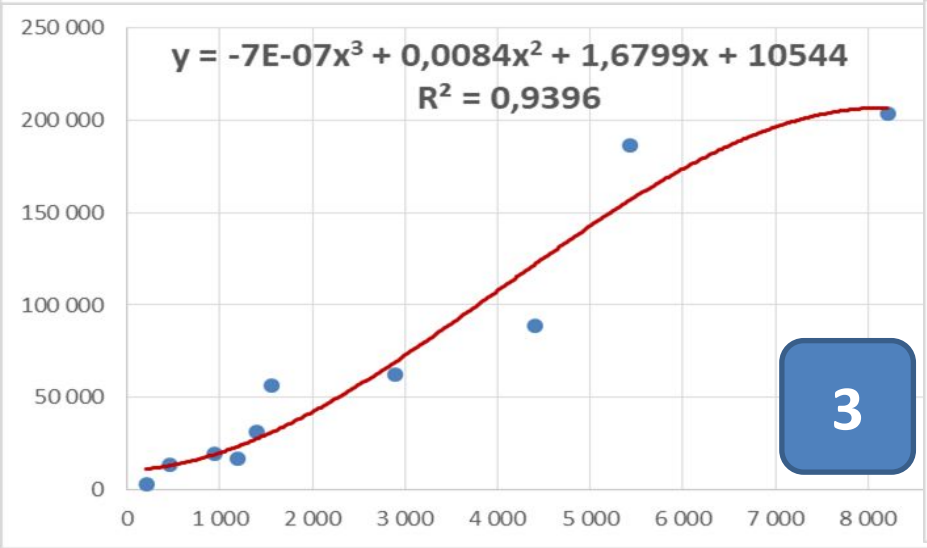
- Среднее значение остатков: $e_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i}{n} = 0,48$
- Отклонение от линии регрессии: $S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}} = 20727,36$
- Средняя относительная ошибка аппроксимации:

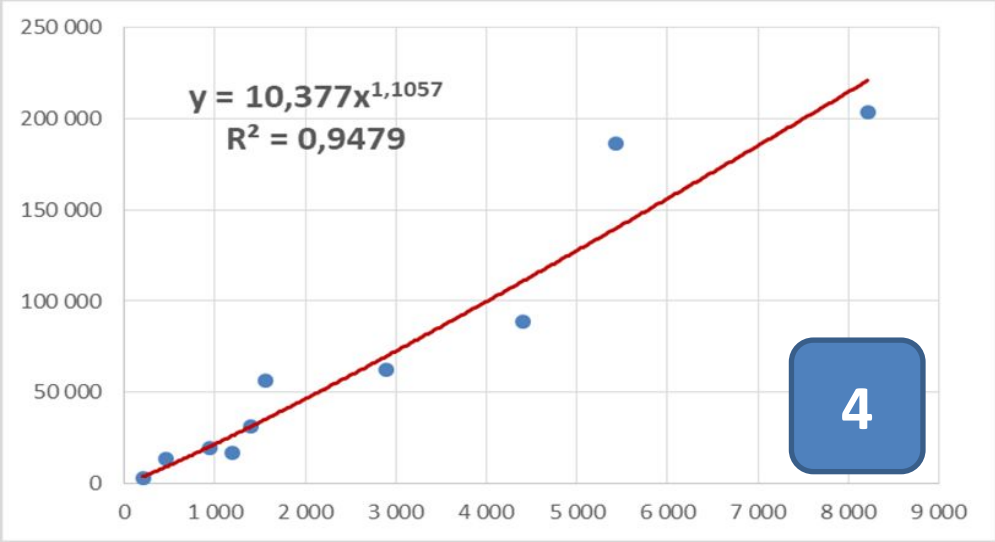
$$\bar{e}_{\text{отн}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|e_i|}{y_i} \times 100\% = 26,6\%$$ - ОЧЕНЬ БОЛЬШАЯ ОШИБКА!

# Попробуем подобрать что-то другое?




**1 – логарифмическая, 2 – экспоненциальная, 3 – кубическая, 4 - степенная**

# Регрессионный анализ

Предназначен для исследования зависимости исследуемой переменной (признака) $Y$ от различных факторов $X_1, X_2, \dots, X_m$ и отображения их взаимосвязи в форме регрессионной модели:

$$\widehat{Y} = f(X_1, X_2, \dots, X_m),$$

которая показывает, каково будет в среднем значение $Y$, если $X_j$ ($j = 1, \dots, m$) примут конкретные значения

При этом $Y_i = \widehat{Y}_i + \varepsilon_i$ $(i = 1, \dots, n)$, где $n$ – объем выборки, $\varepsilon_i$ - остатки (остаточная компонента)

Для линейной парной регрессии имеем:

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$$

# Условия Гаусса-Маркова и свойства оценок МНК

- Математическое ожидание: $M(\varepsilon_i) = 0$
- Случайный характер остатков $\varepsilon_i$
- Независимость остатков $\varepsilon_i$ и $\varepsilon_j$ $(i \neq j)$ (отсутствие автокорреляции в остатках)
- Постоянство дисперсии: $D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 = Const$
- Нормальный характер распределения остатков $\varepsilon_i$
- При выполнении этих условий оценки коэффициентов регрессии, полученные МНК, будут обладать следующими свойствами:
  - несмещенности (математическое ожидание остатков = 0)
  - эффективности (характеризуются наименьшей дисперсией)
  - состоятельности (улучшение точности с ростом *n*)

# Пример построения линейной модели множественной регрессии

- Требуется провести корреляционно-регрессионный анализ статистических данных объема реализации продукции фирмы *Y* за 16 месяцев для целей дальнейшего прогнозирования
- Факторы: $X_1$ - время, $X_2$ - затраты на рекламу, $X_3$ - цена товара, $X_4$ - средняя цена у конкурентов, $X_5$ - индекс потребительских цен
- Регрессионную модель первоначально будем рассматривать в виде:

$$\widehat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_4 \cdot X_4 + b_5 \cdot X_5$$

# Исходные данные:

| Y | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | Y | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 126 | 1 | 4,0 | 15,0 | 17,0 | 100,0 | 367 | 9 | 19,8 | 15,8 | 18,2 | 108,3 |
| 137 | 2 | 4,8 | 14,8 | 17,3 | 98,4 | 367 | 10 | 10,6 | 16,9 | 16,8 | 109,2 |
| 148 | 3 | 3,8 | 15,2 | 16,8 | 101,2 | 321 | 11 | 8,6 | 16,3 | 17,0 | 110,1 |
| 191 | 4 | 8,7 | 15,5 | 16,2 | 103,5 | 307 | 12 | 6,5 | 16,1 | 18,3 | 110,7 |
| 274 | 5 | 8,2 | 15,5 | 16,0 | 104,1 | 331 | 13 | 12,6 | 15,4 | 16,4 | 110,3 |
| 370 | 6 | 9,7 | 16,0 | 18,0 | 107,0 | 345 | 14 | 6,5 | 15,7 | 16,2 | 111,8 |
| 432 | 7 | 14,7 | 18,1 | 20,2 | 107,4 | 364 | 15 | 5,8 | 16,0 | 17,7 | 112,3 |
| 445 | 8 | 18,7 | 13,0 | 15,8 | 108,5 | 384 | 16 | 5,7 | 15,1 | 16,2 | 112,9 |

# Что говорят временны*е* графики?

# Корреляционная матрица *R*

| | Y | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 1 | | | | | |
| X1 | 0,677985 | 1 | | | | |
| X2 | 0,645918 | 0,106455 | 1 | | | |
| X3 | 0,232895 | 0,173717 | -0,00335 | 1 | | |
| X4 | 0,226319 | -0,051 | 0,204043 | 0,697751 | 1 | |
| X5 | 0,816018 | 0,960204 | 0,273373 | 0,235428 | 0,030784 | 1 |

- Факторы $X_3$ и $X_4$ - слабо связаны с признаком $Y$ ($r_{3Y} = 0,233;\ r_{4Y} = 0,226$)
- Сильная связь между $X_1$ и $X_5$ ($r_{15} = 0,96$)
- Т.к. $r_{1Y} = 0,678 < r_{5Y} = 0,816$, то исключаем фактор $X_1$, а $X_5$ - оставляем

# Мультиколлинеарность

| | X2 | X3 | X4 | X5 |
|---|---|---|---|---|
| X2 | 1 | -0,00335 | 0,204043 | 0,273373 |
| X3 | -0,00335 | 1 | 0,697751 | 0,235428 |
| X4 | 0,204043 | 0,697751 | 1 | 0,030784 |
| X5 | 0,273373 | 0,235428 | 0,030784 | 1 |

Определитель матрицы $R_1$ вычислим с помощью функции МОПРЕД(*массив*)

$$det(R_1) = 0,373$$

- Значение статистики Фаррара-Глоубера:

$$FG_{\text{набл}} = -\left(n - 1 - \frac{1}{6} \cdot (2k + 5)\right) \cdot ln\left(det(R_1)\right)$$

$$= -\left(15 - \frac{13}{6}\right) \cdot ln(0,373) = 12,66$$

- На уровне значимости $\alpha = 0,05$ и количестве степеней свободы $\frac{k(k-1)}{2} = 6$ при помощи функции ХИ2.ОБР.ПХ найдем табличное значение $FG_{\text{крит}} = \chi^2 = 12,59$
- Т.к. $FG_{\text{набл}} > FG_{\text{крит}}$, то в массиве объясняющих переменных есть мультиколлинеарность

# Выявление коллинеарных факторов

| | X2 | X3 | X4 | X5 |
|---|---|---|---|---|
| X2 | 1,251803 | 0,54356 | -0,6208 | -0,45107 |
| X3 | 0,54356 | 2,375858 | -1,74853 | -0,65411 |
| X4 | -0,6208 | -1,74853 | 2,331021 | 0,509606 |
| X5 | -0,45107 | -0,65411 | 0,509606 | 1,261618 |

С помощью функции МОБР(*массив*) найдем обратную матрицу $C = R_1^{-1}$

- Вычислим значения *F*-критерия:

$$F_j = (c_{jj} - 1) \cdot \frac{n - k - 1}{k}$$

| F2 | F3 | F4 | F5 |
|---|---|---|---|
| 0,692 | 3,784 | 3,660 | 0,719 |

- Табличное значение $F_{\text{табл}} = 3,357$
- Факторы $X_3$ и $X_4$ - коллинеарны с другими факторами

- Находим частные коэффициенты корреляции:

$$r_{ij(\dots)} \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} \cdot c_{jj}}}$$

$$r_{2,3(4,5)} = -0,315;\ r_{2,4(3,5)} = 0,363;\ r_{2,5(3,4)} = 0,359;$$
$$r_{3,4(2,5)} = 0,743;\ r_{3,5(2,4)} = 0,378;\ r_{4,5(2,3)} = -0,297$$

- Рассчитываем значения *t*-критерия Стьюдента:

$$t_{ij} = \frac{r_{ij(\dots)} \cdot \sqrt{n-k-1}}{\sqrt{1-r_{ij(\dots)}^2}}$$

$$t_{2,3} = -1,102;\ t_{2,4} = 1,293;\ t_{2,5} = 1,275;\ t_{3,4} = 3,682;$$
$$t_{3,5} = 1,353;\ t_{4,5} = -1,032$$

- $t_{\text{табл}}(0,05; 11) = 2,201$ (функция СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х)
- Для факторов $X_3$ и $X_4$: $|t_{3,4}| > |t_{\text{табл}}|$ и $r_{3,4(2,5)} = 0,743 \sim 1$
- Факторы $X_3$ и $X_4$ - коллинеарны. Какой из них исключить?
- Удаляем из модели $X_3$, т.к. $F_3 = 3,784 > F_4 = 3,660$

# Вернемся к временны*м* графикам:

Сходство графиков

$X_3$ и $X_4$ - графики практически идентичны

$X_1$ и $X_5$ - линейная зависимость

# «Длинная» и «короткая» регрессии

- «Длинная» регрессия с факторами $X_2, X_4, X_5$:

| Дисперсионный анализ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *df* | *SS* | *MS* | *F* | *Значимость F* |
| Регрессия | 3 | 138 429,778 | 46 143,259 | 27,292 | 1,20724E-05 |
| Остаток | 12 | 20 288,659 | 1 690,722 | | |
| Итого | 15 | 158 718,438 | | | |

| | *Коэффициенты* | *Станд.ошибка* | *t-статистика* | *P-Значение* | *Нижние 95%* | *Верхние 95%* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y-пересечение* | -1654,763 | 306,264 | -5,403 | 0,000 | -2322,054 | -987,472 |
| *X2* | 9,052 | 2,295 | 3,945 | 0,002 | 4,052 | 14,051 |
| *X4* | 10,539 | 9,521 | 1,107 | 0,290 | -10,206 | 31,284 |
| *X5* | 15,825 | 2,447 | 6,468 | 0,000 | 10,494 | 21,156 |

$$\hat{Y} = -1654,76 + 9,05 \cdot X_2 + 10,54 \cdot X_4 + 15,83 \cdot X_5;\ (R^2 = 0,872)$$

- «Короткая» регрессия с факторами $X_2, X_5$:

| Дисперсионный анализ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *df* | *SS* | *MS* | *F* | *Значимость F* |
| Регрессия | 2 | 136 358,334 | 68 179,167 | 39,639 | 2,93428E-06 |
| Остаток | 13 | 22 360,104 | 1 720,008 | | |
| Итого | 15 | 158 718,438 | | | |

| | *Коэффициенты* | *Станд.ошибка* | *t-статистика* | *P-Значение* | *Нижние 95%* | *Верхние 95%* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y-пересечение* | -1 471,314 | 259,766 | -5,664 | 0,000 | -2 032,505 | -910,124 |
| *X2* | 9,568 | 2,266 | 4,223 | 0,001 | 4,673 | 14,464 |
| *X5* | 15,753 | 2,467 | 6,386 | 0,000 | 10,424 | 21,082 |

$$\hat{Y} = -1471,31 + 9,57 \cdot X_2 + 15,75 \cdot X_5;\ (R^2 = 0,859)$$

# Какую регрессию выбрать?

- **Вычислим *F*-статистику:**

$$F_{\text{набл}} = \frac{(ESS_{\text{кор}} - ESS_{\text{длин}})/q}{ESS_{\text{длин}}/(n-k-1)}$$

$$= \frac{(22360,104 - 20288,659)/1}{20288,659/(16-3-1)} = 1,225$$

- **Сравним с** $F_{\text{табл}}(0,05; 1; 12) = 4,747$
- **Если** $F_{\text{набл}} > F_{\text{табл}}$**, то выбираем «длинную» регрессию, в противном случае – «короткую»**
- **В нашем случае выбираем «короткую»:**

$$\widehat{Y} = -1471,31 + 9,57 \cdot X_2 + 15,75 \cdot X_5$$