

Математический анализ

Лекция 11

Исследование функции на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Лектор: *Доцент кафедры высшей математики ИКБиСП
Антипова Татьяна Николаевна.*

I. Монотонность функции.

1.1. Основные определения.

Дана функция $y = f(x)$, где $x \in D$. Причем на области определения $f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Опр. 1. Интервалы, в которых функция имеет постоянный знак, называются *интервалами знакопостоянства* этой функции.

Опр. 2. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих интервалу (a, b) , из условия $x_1 > x_2$ следует неравенство:

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

Опр. 3. Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей (неубывающей)* на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 , принадлежащих интервалу (a, b) , из условия $x_1 > x_2$ следует неравенство:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

Опр. 4. Функция $y = f(x)$ называется *монотонной* на интервале (a, b) , если она на этом интервале является или возрастающей, или убывающей, или невозрастающей, или неубывающей.

Пример 1.

Исследовать на монотонность функцию, изображенную на рис. 1.

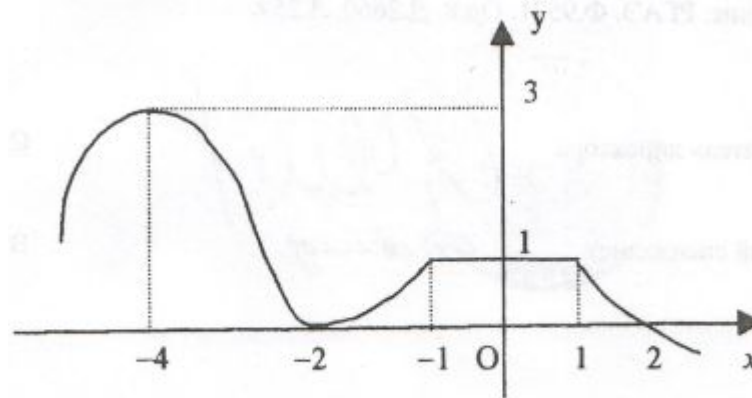


Рис. 1

Ответ: При $x \in (-4, -2) \cup (1, +\infty)$ – убывает,
при $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, -1)$ – возрастает,
при $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 1)$ – не убывает,
при $x \in (-4, -2) \cup (-1, +\infty)$ – не возрастает.

1.2. Теорема об интервалах знакопостоянства функции

Опр. 5. Нуль функции - точка, в которой функция обращается в нуль.

Опр. 6. Точки, в которых $y = f(x)$ не существует или равна нулю, называются *критическими точками этой функции*.

Будем рассматривать функции $y = f(x)$, $x \in D$, которые имеют конечное число критических точек. Такие функции удовлетворяют следующим условиям:

1. Они непрерывны на некоторых промежутках, (конечных или бесконечных), всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, в которых они имеют разрыв.
2. Имеют конечное число нулей.

Для таких функций справедлива следующая теорема:

Теорема (Об интервалах знакопостоянства функции).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором промежутке, всюду, кроме может, конечного числа точек и имеет конечное число нулей, то эта функция сохраняет постоянный знак на каждом из интервалов, на которые эти критические точки разбивают её область определения.

Правило определения интервалов знакопостоянства функции.

1. Находим область определения функции $D(f)$.
2. Находим точки разрыва функции.
3. Определяем нули функции.
4. Наносим эти критические точки на числовую ось Ox .

Эти точки разобьют область определения $D(f)$ на интервалы, на каждом из которых она имеет постоянный знак.

5. Определяем знак функции на каждом интервале. Для этого используем *правило старшего интервала* или определяем знак функции в одной какой-нибудь точке рассматриваемого интервала.

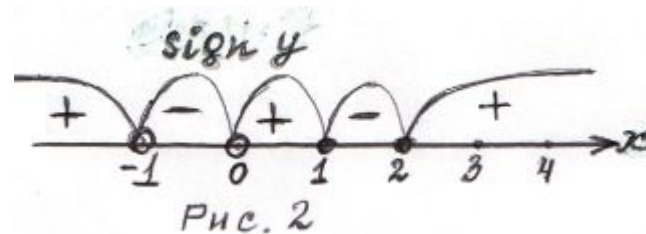
Пример 2. Определить интервалы знакопостоянства функции $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)}$.

Решение.

1. $D(y)$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, то есть $x \neq -1, x \neq 0$.

2. Нули функции: $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) = 0$. Следовательно, $x = 1, x = 2$.

3-4. Нанесение критических точек функции $y = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x+1)}$ на ось Ox , а также определение знака функции, показано на рис. 2.

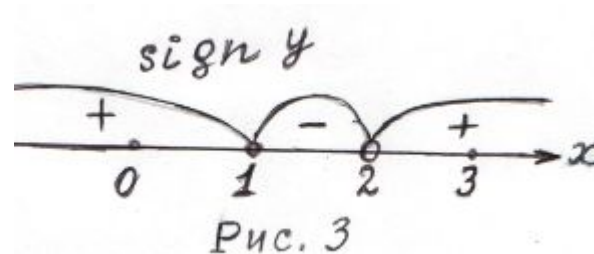


Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$ – положительная,
 $x \in (-1; 0) \cup (1; 2)$ – отрицательная.

Пример 3. Определить интервалы знакопостоянства функции $y = \frac{x^3 - 1}{x - 2}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, то есть $x \neq 2$.
2. Нули функции: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. Следовательно, $x = 1$.
- 3-4. Нанесение критических точек функции $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-2}$ на ось Ox , а также определение интервалов знакопостоянства функции, показано на рис. 3.



Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ -положительная, $x \in (1; 2)$ - отрицательная.

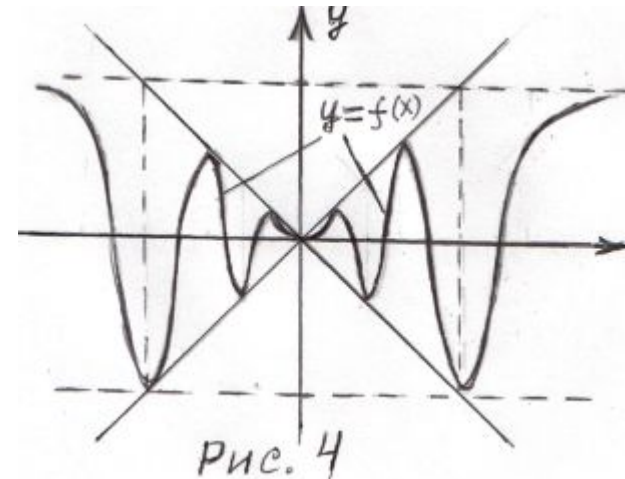
Замечание о бесконечном числе нулей или точек разрыва

Для функции $y = f(x)$, которая имеет бесконечное число нулей или точек разрыва, теорема об интервалах знакопостоянства может оказаться неверной.

Например, на рис. 4 схематично изображен график функции

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

(1)



Эта четная функция является непрерывной на всей числовой оси и имеет бесконечно много нулей: $x = 0, x = \frac{1}{k\pi}$, где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Нули функции располагаются так, что в \forall окрестности точек x , как бы мала она не была, имеется бесконечное число нулей.

Вывод о поведении функции $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$

Для этой функции теорема об интервалах знакопостоянства неверна, так как точка $x = 0$ не является концом ни одного интервала, в котором она имеет постоянный знак. Это объясняется тем, что в \forall интервале с концом в точке $x = 0$, данная функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.

1.3. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема при $x \in (a, b)$.

Теорема (Необходимое условие монотонности).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $x \in (a, b)$ и является на нем монотонной, то $f(x)$ либо возрастает или не убывает (убывает или не возрастает), то для $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Теорема (Достаточные условия монотонности)

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a, b)$, то $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Доказательства теоремы 1 и теоремы 2 приведены в лекции 11.

Заметим, что интервалы, на которых функция возрастает (убывает), называются **интервалами монотонности**.

Правило нахождения интервалов монотонности.

1. Находим область определения функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$.
2. Вычисляем производную $f'(x)$, затем определяем ее область определения $x \in D(f')$.
3. Находим критические точки производной функции. Это точки, в которых производная функции равна нулю или не существует
4. Наносим критические точки на ось Ox , они разобьют область определения функции $y = f(x)$ на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ имеет постоянный знак.
5. Определяем знак производной на каждом интервале.
6. По знаку производной на каждом интервале определяем, возрастает или убывает функция.

Пример 4. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, то есть $x \neq 1$.

2. Нахождение $y'(x)$ и её области определения.

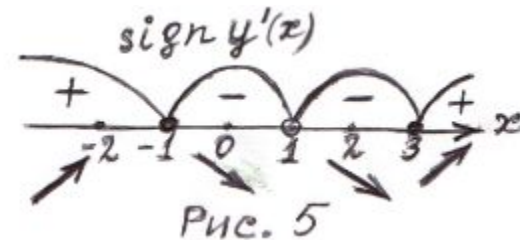
$$y'(x) = \frac{(2x+3) \cdot (x-1) - (x^2+3x) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$D(y'): x \neq 1.$$

3. Нахождение нулей первой производной функции:

$$y'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0. \quad \text{Следовательно, } x = -1; x = 3.$$

4. Нанесение критических точек по производной функции на ось Ox и определение интервалов монотонности показано на рис. 5.



Ответ: при $x \in (-\infty; -1) \cup (3, +\infty)$ возрастает, при $x \in (-1; 1) \cup (1, 3)$ убывает.

Пример 5.

Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$.

Задачу решить самостоятельно за 5 минут.

Пример 5. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$.

Решение.

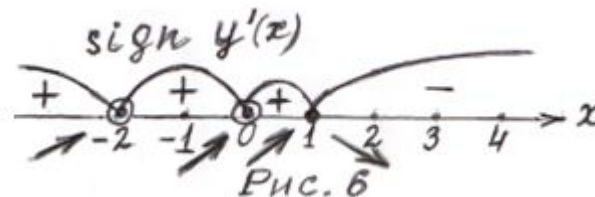
1. $D(y): x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, то есть $x \neq -2$.

2. Нахождение $y'(x)$ и её области определения: $y'(x) = -\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{x^2} \cdot (x+2)^2}, x \neq 0$.

$D(y'): x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$, то есть $x \neq -2$ и $x \neq 0$.

3. Нахождение нулей первой производной $y'(x) = 0$. Следовательно, $x = 1$.

4. Нанесение критических точек первой производной функции на ось Ox и нахождение интервалов возрастания и убывания функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$ показано на рис. 6.



$$f'(2) < 0, f'(0,5) > 0, f'(-1) > 0, f'(-3) > 0$$

Ответ: при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2, 1)$ возрастает, при $x \in (1, +\infty)$ функция убывает.

II. Экстремумы функции.

2.1. Основные определения.

Дана функция $y = f(x)$, где $x \in (a, b)$.

Опр. 5. Точка x_0 – точка максимума (точка минимума) функции $y = f(x)$, если \exists окрестность этой точки $U(x_0)$ такая, что для всех x из этой окрестности выполняется условие $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$).

Опр. 6. Точки максимума и точки минимума функции $y = f(x)$ называются точками экстремума этой функции.

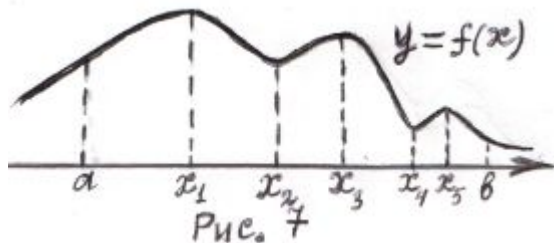
Опр. 7. Значения функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции.

Опр. 8. Максимумы и минимумы функции $y = f(x)$ также называются экстремумами этой функции.

О локальности экстремумов

*Максимум и минимум функции имеют локальный (местный) характер, то есть относятся к достаточно малой окрестности точки x_0 . Поэтому иногда максимум и минимум функции называют также **локальным максимумом** и **локальным минимумом**.*

Заметим, что функция может иметь несколько максимумов и несколько минимумов. При этом может оказаться, что минимум функции в некоторой точке больше, чем её максимум в другой точке. Так, на рис. 7 изображается график функции $y = f(x)$, которая при $x \in (a, b)$ имеет три максимума (в точках x_1, x_3 и x_5), два минимума (в точках x_2, x_4). Причем $y_{\min}(x_2) > y_{\max}(x_5)$.



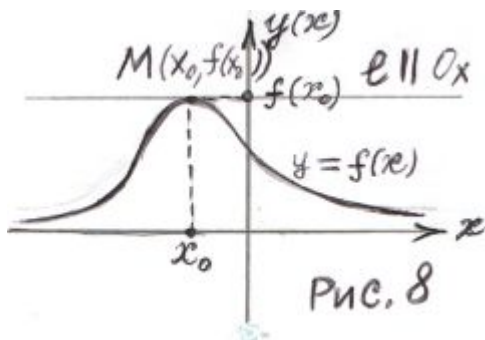
2.2. Необходимое условие экстремума.

Опр. 9. Точки, в которых производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует, называются критическими (или стационарными).

Теорема (Необходимое условие экстремума).

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции равна нулю или не существует (то есть точка $x = x_0$ является критической).

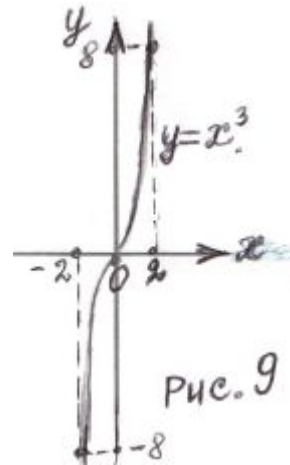
Геометрический смысл этой теоремы пояснен на рис. 8 и заключается в том, что касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ будет параллельна оси Ox .



Доказательство теоремы 3 приведено в лекции 11.

О недостатке необходимого условия экстремума.

Обращение в нуль исследуемой функции $y = f(x)$ является лишь необходимым, но не достаточным условием экстремума. Например, для функции $y = x^3$, график которой показан на рис. 9, имеем $y'(0) = 0$. Однако, в точке $x = 0$ функция $y = x^3$ не имеет экстремума.



2.3. Достаточные условия экстремума.

Теорема (Первое достаточное условие экстремума).

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 за исключением, может быть, самой этой точки. Если в пределах указанной окрестности функция $f'(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0 , то x_0 – точка экстремума. Причем, если при этом знак $f'(x)$ меняется

с « \leftarrow » на « \rightarrow », то x_0 – точка минимума,

с « \rightarrow » на « \leftarrow », то x_0 – точка максимума.

Если в пределах указанной окрестности функция $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0 , то в точке x_0 у функции $f(x)$ экстремума нет.

Доказательство теоремы приведено в лекции 11.

Из этого доказательства следует приведенное далее правило, нахождения максимумов и минимумов функции.

Правило 1 для нахождения экстремумов функции $y = f(x)$

1. Находим $D(f)$ – область определения функции.
2. Находим производную $f'(x)$ и $D(f')$.
3. Находим критические точки производной $f'(x)$.
4. Определяем интервалы знакопостоянства производной функции $f'(x)$.
5. С помощью Первого достаточного условия экстремума выполняем исследование критических точек на экстремум. Находим точки экстремума.
6. Вычисляем значения максимумов и минимумов в точках экстремума.

Пример 6. Найти экстремумы функции $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$.

Решение.

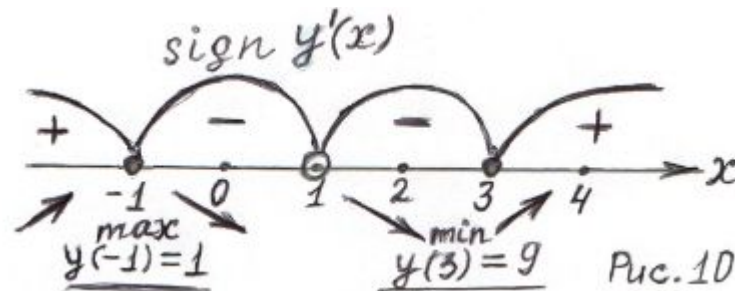
1. Учитывая результат примера 4, получаем критические точки:

$$y'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$

Следовательно, это точки: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$.

2. Найдем сначала интервалы возрастания и убывания функции, а затем точки экстремума. На рис. 10 они помечены как «max» и «min».

3. Вычислим значения максимумов и минимумов в точках экстремума.



Ответ: $x = -1$ – точка максимума, $y_{max} = y(-1) = 1$;

$x = 3$ – точка минимума, $y_{min} = y(3) = 9$;

Этот пример подтверждает локальный характер экстремумов.

Пример 7.

Найти экстремумы функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$.

С учетом ранее решенного примера 5, решить эту задачу самостоятельно за 5 минут.

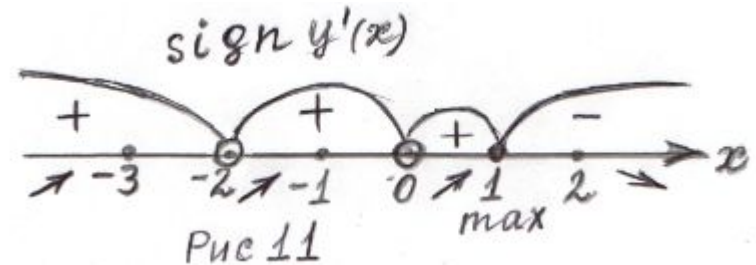
Пример 7. Найти экстремумы функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$.

Решение.

1. Учитывая результаты примера 5, получим критические точки по первой производной:

$$y'(x) = -\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{x^2}(x+2)^2} = 0. \text{ Следовательно, это точки: } x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1.$$

2. С помощью оси Ox найдем сначала интервалы возрастания и убывания функции, а затем точки экстремума (рис. 11).



Получим $x = 1$ – точка максимума.

3. Вычислим максимум в точке максимума.

$$y_{max} = \frac{\sqrt[3]{1}}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 1$ – точка максимума, $y_{max} = y(1) = \frac{1}{3}$.

Обратите внимание, что исследование на экстремумы можно также выполнять с помощью таблицы. Например, пример 4 в лекции 11.

Второе достаточное условие экстремума

Теорема. (Второе достаточное условие экстремума).

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в критической точке $x = x_0$ конечную вторую производную. Тогда если $f''(x_0) < 0$, то $x = x_0$ – точка максимума, если $f''(x_0) > 0$, то $x = x_0$ – точка минимума.

Заметим, что в этой теореме требуется знание производных $f''(x_0)$ второго порядка.

В лекции 11 также приведено третье достаточное условие экстремума функции, которое требует знания производных более высокого порядка, чем $f''(x_0)$.

Правило 2 для нахождения экстремумов функции $y = f(x)$.

1. Находим $D(f)$.
2. Находим $f'(x)$ и $D(f'(x))$.
3. Находим критические точки функции по первой производной.
4. Находим $f''(x)$ и $D(f''(x))$.
5. Вычисляем значения $f''(x)$ в критических точках, которые принадлежат области определения функции $D(f)$.
6. По знаку $f''(x)$ определяем вид экстремума в каждой критической точке.
7. Находим максимумы и минимумы.

Применяя это правило, решим пример 6.

Пример 6.

Найти экстремумы функции $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$, применяя правило 2.

Решение.

1. Учитывая результаты примера 4, получим критические точки по первой производной:

$$y'(x) = \frac{(x-3) \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = 0.$$

Следовательно, это точки: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$.

2. Находим

$$y''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \right)' = \frac{8}{(x-1)^3}. \quad D(y''): x \neq 1.$$

3. Вычисляем $y''(-1) = -1, y''(3) = 1$.

4. $x = -1$ – точка максимума, т.к. $y''(-1) < 0$.

$x = 3$ – точка минимума, т.к. $y''(3) > 0$.

5. Находим $y(-1) = 1, y(3) = 9$.

Ответ: $y_{max} = y(-1) = 1; y_{min} = y(3) = 9$.

III. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Опр. 10. Число $f(c)$ называется *наибольшим (наименьшим)* значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\max_{x \in [a, b]} y(x)$ ($\min_{x \in [a, b]} y(x)$), если для $\forall x \in [a, b]$ выполняется неравенство:

$$f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c)).$$

Из ранее изученных свойств функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, следует, что она достигает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.

Очевидно, что наибольшее значение функции может быть достигнуто в одном из её максимумов, а наименьшее – в одном из минимумов. Кроме того, границы отрезка также могут быть точками, в которых $f(x)$ достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Поэтому для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно воспользоваться приведенным далее правилом.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

1. Находим $D(f)$.
2. Находим $(f'x)$.
3. В результате решения уравнения $f'(x) = 0$, определяем критические точки, попадающие на отрезок $x \in [a, b]$. Затем вычисляем значения функции $y = f(x)$ в этих критических точках.
4. Вычисляем значения функции в граничных точках, т.е. $f(a)$ и $f(b)$.
5. Находим наибольшее и наименьшее из полученных значений функции.

Эти значения являются наибольшим $\left(\max_{x \in [a, b]} y(x)\right)$ и наименьшим $\left(\min_{x \in [a, b]} y(x)\right)$ значениями функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 8.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1,6]$.

Решение.

1. Данная функция определена и непрерывна на $[1,6]$.

2. Вычислим $y'(x)$. Получим $y'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2}{x^2}$.

Производная $y'(x)$ также определена и непрерывна на отрезке $[1,6]$.

3. Найдём критические точки производной y' .

$y'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2}{x^2}$. Следовательно, $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. Причем только $x_2 \in [1,6]$.

4. Вычислим значения функции $y(x)$ в критической точке $x = 4$ и в граничных точках $x = 1$ и $x = 6$.

Получим: $y(4) = \frac{4}{8} + \frac{2}{4} = 1$, $y(1) = \frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$, $y(6) = \frac{6}{8} + \frac{2}{6} = \frac{13}{12}$.

5. Найдём наибольшее и наименьшее среди чисел $y(1), y(4), y(6)$.

Получим $\max_{x \in [1,6]} y(x) = y(1) = \frac{17}{8}$ и $\min_{x \in [1,6]} y(x) = y(4) = 1$.

Ответ: $\max_{x \in [1,6]} y(x) = y(1) = \frac{17}{8}$, $\min_{x \in [1,6]} y(x) = y(4) = 1$.

Пример 9.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ на отрезке $[0, 2]$.

Задачу решить самостоятельно за 10 минут.

Пример 9.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)}$ на отрезке $[0, 2]$.

Решение.

1. $D(f): x \in R$. Следовательно данная функция определена и непрерывна при $x \in [0, 2]$.
2. Найдём $y'(x)$. Имеем $y'(x) = \frac{4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 1)}}$.
- $D(y'): x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, то есть $x \neq -1$ и $x \neq 1$.
3. Критическими являются точки $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Причем $x_1 \notin [0, 2]$.
4. Вычислим значения исходной функции в критических точках $x = 0$ и $x = 1$, а также в граничной точке $x = 2$.

Получим: $y(0) = 1, y(1) = 0, y(2) = \sqrt[3]{9}$.

5. Найдём наибольшее и наименьшее среди чисел $y(0), y(1), y(2)$. Получим наибольшее значение $\max_{x \in [0, 2]} y(x) = y(2) = \sqrt[3]{9}$ и наименьшее значение $\min_{x \in [0, 2]} y(x) = y(1) = 0$.

Ответ: $\max_{x \in [0, 2]} y(x) = y(2) = \sqrt[3]{9}, \min_{x \in [0, 2]} y(x) = y(1) = 0$.

Лекция закончена.

**Желаю успешного усвоения и применения
на практике рассмотренного на ней
материала.**