МИРЭА
Российский технологический университет

Математический анализ

Лекция 11

Исследование функции на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Лектор: *Доцент кафедры высшей математики ИКБиСП Антипова Татьяна Николаевна.*

I. Монотонность функции.

1.1. Основные определения.

Дана функция $y = f(x)$, где $x \in D$. Причем на области определения $f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Опр. 1. Интервалы, в которых функция имеет постоянный знак, называются ***интервалами знакопостоянства*** этой функции.

Опр. 2. Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей)*** на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу (a, b), из условия $x_1 > x_2$ следует неравенство:

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \big(f(x_1) < f(x_2)\big)$$

Опр. 3. Функция $y = f(x)$ называется ***невозрастающей*** (***неубывающей***) на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих интервалу (a, b), из условия $x_1 > x_2$ следует неравенство:

$$f(x_1) \le f(x_2) \ \ \big(f(x_1) \ge f(x_2)\big)$$

Опр. 4. Функция $y = f(x)$ называется ***монотонной*** на интервале (a, b), если она на этом интервале является или возрастающей, или убывающей, или невозрастающей, или неубывающей.

Пример 1.

Исследовать на монотонность функцию, изображенную на рис. 1.

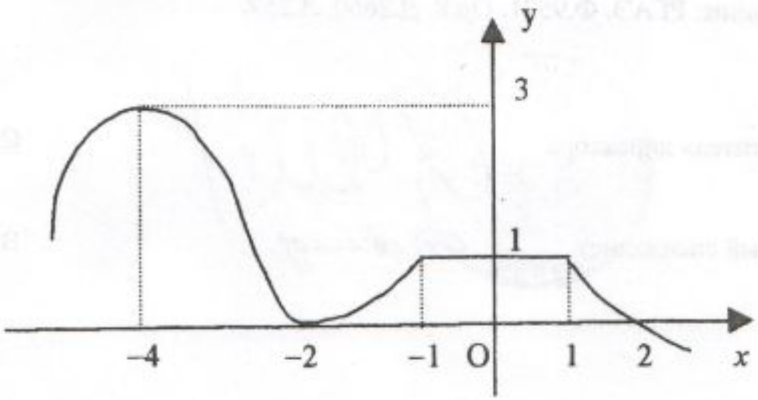

Рис. 1

Ответ: При $x \in (-4,-2) \cup (1,+\infty)$ – убывает,
при $x \in (-\infty,-4) \cup (-2,-1)$ – возрастает,
при $x \in (-\infty,-4) \cup (-2,1)$ – не убывает,
при $x \in (-4,-2) \cup (-1,+\infty)$ – не возрастает.

1.2. Теорема об интервалах знакопостоянства функции

Опр. 5. Нуль функции - точка, в которой функция обращается в нуль.

Опр. 6. Точки, в которых $y = f(x)$ не существует или равна нулю , называются ***критическими точками этой функции.***

Будем рассматривать функции $y = f(x), x \in D$, которые имеют конечное число критических точек. Такие функции удовлетворяют следующим условиям:

1. Они непрерывны на некоторых промежутках, (конечных или бесконечных), всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, в которых они имеют разрыв.

2. Имеют конечное число нулей.

Для таких функций справедлива следующая теорема:

Теорема (*Об интервалах знакопостоянства функции).*

Если функция $y = f(x)$ *непрерывна* в некотором промежутке, *всюду, кроме* может, *конечного числа точек и имеет конечное число нулей, то эта функция* сохраняет *постоянный знак на каждом из интервалов*, на которые эти критические точки разбивают её область определения.

Правило определения интервалов знакопостоянства функции.

1. Находим область определения функции $D(f)$.

2. Находим точки разрыва функции.

3. Определяем нули функции.

4. Наносим эти критические точки на числовую ось Ox.

Эти точки разобьют область определения $D(f)$ на интервалы, на каждом из которых она имеет постоянный знак.

5. Определяем знак функции на каждом интервале. Для этого используем *правило старшего интервала* или определяем знак функции в одной какой-нибудь точке рассматриваемого интервала.

Пример 2. Определить интервалы знакопостоянства функции $y = \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)}$.

Решение.

1. $D(y)$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, то есть $x \neq -1$, $x \neq 0$.

2. Нули функции: $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) = 0$. Следовательно, $x = 1, x = 2$.

3-4. Нанесение критических точек функции $y = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x+1)}$ на ось Ox, а также определение знака функции, показано на рис. 2.

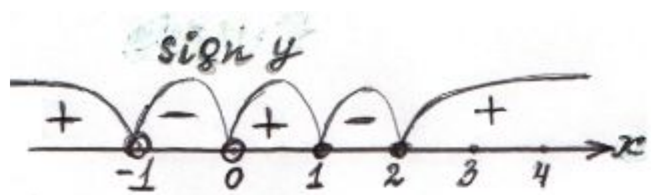

Рис. 2

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$ – положительная,
$x \in (-1; 0) \cup (1; 2)$ – отрицательная.

Пример 3. Определить интервалы знакопостоянства функции $y = \frac{x^3-1}{x-2}$.

Решение.

1. $D(y): x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, то есть $x \neq 2$.

2. Нули функции: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$. Следовательно, $x = 1$.

3-4. Нанесение критических точек функции $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-2}$ на ось Ox, а также определение интервалов знакопостоянства функции, показано на рис. 3.

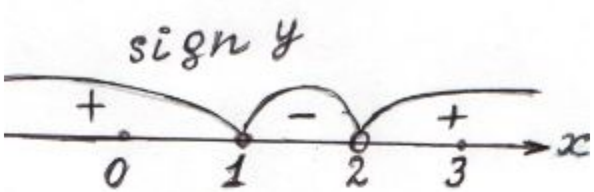

Рис. 3

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1) \cup (2; +\infty)$-положительная, $x \in (1; 2)$ - отрицательная.

Замечание о бесконечном числе нулей или точек разрыва

Для функции $y = f(x)$, которая имеет бесконечное число нулей или точек разрыва, теорема об интервалах знакопостоянства может оказаться неверной.

Например, на рис. 4 схематично изображен график функции

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0 \\ 0, \quad \text{если } x = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

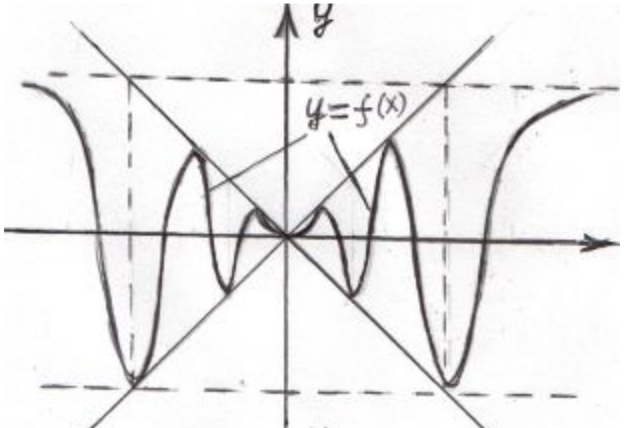

Рис. 4

Эта четная функция является непрерывной на всей числовой оси и имеет бесконечно много нулей: $x = 0, x = \frac{1}{k\pi}$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Нули функции располагаются так, что в $\forall$ окрестности точек x, как бы мала она не была, имеется бесконечное число нулей.

Вывод о поведении функции $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}}$

Для этой функции теорема об интервалах знакопостоянства неверна, так как точка $x = 0$ не является концом ни одного интервала, в котором она имеет постоянный знак. Это объясняется тем, что в $\forall$ интервале с концом в точке $x = 0$, данная функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.

1.3. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема при $x \in (a, b)$.

Теорема (***Необходимое условие монотонности***).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $x \in (a, b)$ и является на нем монотонной, то есть возрастает или не убывает (убывает или не возрастает), то для $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$.

Теорема (***Достаточные условия монотонности***)

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для $\forall x \in (a, b)$, то $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Доказательства теоремы 1 и теоремы 2 приведены в лекции 11.

Заметим, что интервалы, на которых функция возрастает (убывает), называются ***интервалами монотонности***.

Правило нахождения интервалов монотонности.

1. Находим область определения функции $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

2. Вычисляем производную $f'(x)$, затем определяем ее область определения $x \in D(f')$.

3. Находим критические точки производной функции. Это точки, в которых производная функции равна нулю или не существует

4. Наносим критические точки на ось Ox, они разобьют область определения функции $y = f(x)$ на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ имеет постоянный знак.

5. Определяем знак производной на каждом интервале.

6. По знаку производной на каждом интервале определяем, возрастает или убывает функция.

Пример 4. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$.

Решение.

1. $D(y)\colon x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, то есть $x \neq 1$.

2. Нахождение $y'(x)$ и её области определения.

$$y'(x) = \frac{(2x+3)\cdot(x-1) - (x^2+3x)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$D(y')\colon\ x \neq 1.$$

3. Нахождение нулей первой производной функции:

$y'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0.$ Следовательно, $x = -1; x = 3.$

4. Нанесение критических точек по производной функции на ось Ox и определение интервалов монотонности показано на рис. 5.

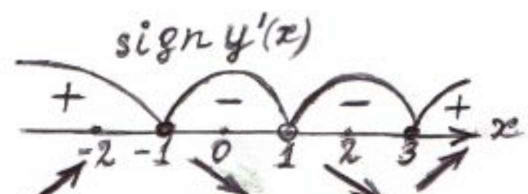

Рис. 5

Ответ: при $x \in (-\infty; -1) \cup (3, +\infty)$ возрастает, при $x(-1; 1) \cup (1,3)$ убывает.

МИРЭА
Российский технологический университет

Пример 5.

Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$.

Задачу решить самостоятельно за 5 минут.

Пример 5. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$.

Решение.

1. $D(y)$: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, то есть $x \neq -2$.

2. Нахождение $y'(x)$ и её области определения: $y'(x) = -\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{x^2}\cdot(x+2)^2}, x \neq 0$.

$D(y')$: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$, то есть $x \neq -2$ и $x \neq 0$.

3. Нахождение нулей первой производной $y'(x) = 0$. Следовательно, $x = 1$.

4. Нанесение критических точек первой производной функции на ось Ox и нахождение интервалов возрастания и убывания функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$ показано на рис. 6.

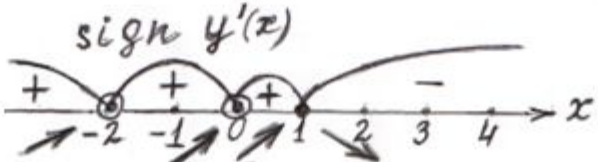

Рис. 6

$f'(2) < 0, f'(0{,}5) > 0, f'(-1) > 0, f'(-3) > 0$

Ответ: при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2{,}1)$ возрастает, при $x \in (1, +\infty)$ функция убывает.

II. Экстремумы функции.

2.1. Основные определения.

Дана функция $y = f(x)$, где $x \in (a, b)$.

Опр. 5. Точка x_0 – точка максимума (точка минимума) функции $y = f(x)$, если $\exists$ окрестность этой точки $\cup\,(x_0)$ такая, что для всех x из этой окрестности выполняется условие $f(x_0) > f(x)$ $\qquad\qquad$ $\big(f(x_0) < f(x)\big)$.

Опр. 6. Точки максимума и точки минимума функции $y = f(x)$ называются точками экстремума этой функции.

Опр. 7. Значения функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции.

Опр. 8. Максимумы и минимумы функции $y = f(x)$ также называются экстремумами этой функции.

О локальности экстремумов

Максимум и *минимум* функции *имеют локальный* (местный) *характер*, то есть относятся к достаточно малой окрестности точки x_0. Поэтому иногда максимум и минимум функции называют также ***локальным максимумом*** и ***локальным минимумом***.

Заметим, что функция может иметь несколько максимумов и несколько минимумов. При этом может оказаться, что минимум функции в некоторой точке больше, чем её максимум в другой точке. Так, на рис. 7 изображается график функции $y = f(x)$, которая при $x \in (a, b)$ имеет три максимума (в точках x_1, x_3 и x_5), два минимума (в точках x_2, x_4). Причем $y_{min}(x_2) > y_{max}(x_5)$.

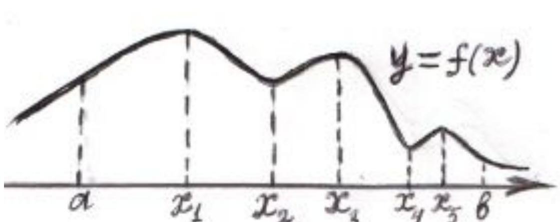

Рис. 7

2.2. Необходимое условие экстремума.

Опр. 9. Точки, в которых производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует, называются критическими (или стационарными).

Теорема (Необходимое условие экстремума).
Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции равна нулю или не существует (то есть точка $x = x_0$ является критической).

Геометрический смысл этой теоремы пояснен на рис. 8 и заключается в том, что касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ будет параллельна оси Ox.

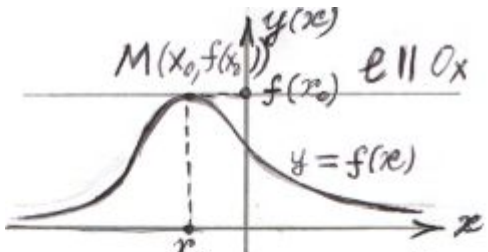

Рис. 8

Доказательство теоремы 3 приведено в лекции 11.

О недостатке необходимого условия экстремума.

Обращение в нуль исследуемой функции $y = f(x)$ является лишь необходимым, но не достаточным условием экстремума. Например, для функции $y = x^3$, график которой показан на рис. 9, имеем $y'(0) = 0$. Однако, в точке $x = 0$ функция $y = x^3$ не имеет экстремума.

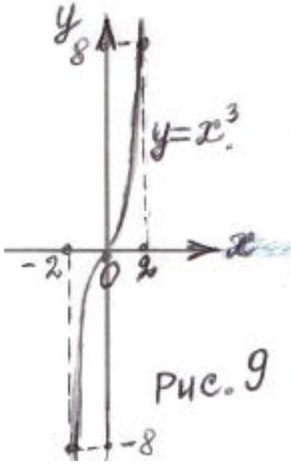

Рис. 9

2.3. Достаточные условия экстремума.

Теорема (Первое достаточное условие экстремума).
Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 за исключением, может быть, самой этой точки. Если в пределах указанной окрестности функция $f'(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то x_0 – точка экстремума. Причем, если при этом знак $f'(x)$ меняется

с «–» на «+», то x_0 – точка минимума,

с «+» на «–», то x_0 – точка максимума.

Если в пределах указанной окрестности функция $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0, то в точке x_0 у функции $f(x)$ экстремума нет.

Доказательство теоремы приведено в лекции 11.

Из этого доказательства следует приведенное далее правило, нахождения максимумов и минимумов функции.

Правило 1 для нахождения экстремумов функции $y = f(x)$

1. Находим $D(f)$ – область определения функции.
2. Находим производную $f'(x)$ и $D(f')$.
3. Находим критические точки производной $f'(x)$.
4. Определяем интервалы знакопостоянства производной функции $f'(x)$.
5. С помощью Первого достаточного условия экстремума выполняем исследование критических точек на экстремум. Находим точки экстремума.
6. Вычисляем значения максимумов и минимумов в точках экстремума.

Пример 6. Найти экстремумы функции $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$.

Решение.

1. Учитывая результат примера 4, получаем критические точки:

$$y'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$

Следовательно, это точки: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$.

2. Найдем сначала интервалы возрастания и убывания функции, а затем точки экстремума. На рис. 10 они помечены как «max» и «min».

3. Вычислим значения максимумов и минимумов в точках экстремума.

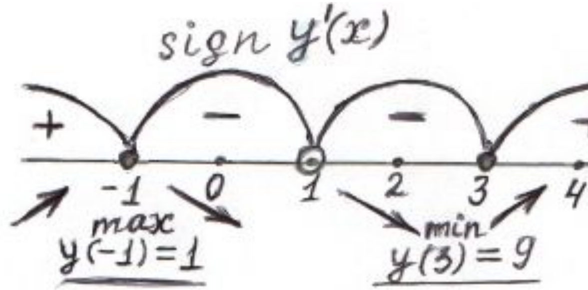

Рис. 10

Ответ: $x = -1$ – точка максимума, $y_{max} = y(-1) = 1$;

$x = 3$ – точка минимума, $y_{min} = y(3) = 9$;

Этот пример подтверждает локальный характер экстремумов.

Пример 7.

Найти экстремумы функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$.

С учетом ранее решенного примера 5, решить эту задачу самостоятельно за 5 минут.

Пример 7. Найти экстремумы функции $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$.

Решение.

1. Учитывая результаты примера 5, получим критические точки по первой производной: $y'(x) = -\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{x^2}(x+2)^2} = 0$. Следовательно, это точки: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$.

2. С помощью оси Ox найдем сначала интервалы возрастания и убывания функции, а затем точки экстремума (рис. 11).

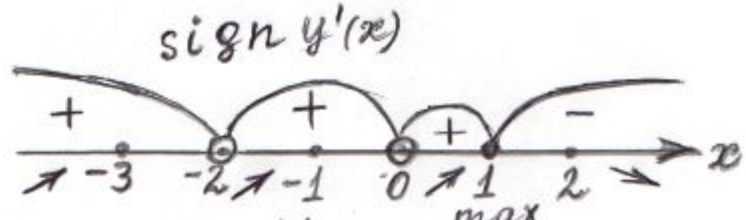

Рис 11

Получим $x = 1$ – точка максимума.

3. Вычислим максимум в точке максимума.

$$y_{max} = \frac{\sqrt[3]{1}}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = 1$ – точка максимума, $y_{max} = y(1) = \frac{1}{3}$.

Обратите внимание, что исследование на экстремумы можно также выполнять с помощью таблицы. Например, пример 4 в лекции 11.

Второе достаточное условие экстремума

Теорема. (***Второе достаточное условие экстремума***)**.**

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в критической точке $x = x_0$ конечную вторую производную. Тогда если $f''(x_0) < 0$, то $x = x_0$ – точка максимума, если $f''(x_0) > 0$, то $x = x_0$ – точка минимума.

Заметим, что в этой теореме требуется знание производных $f''(x_0)$ второго порядка.

В лекции 11 также приведено третье достаточное условие экстремума функции, которое требует знания производных более высокого порядка, чем $f''(x_0)$.

Правило 2 для нахождения экстремумов функции $y = f(x)$.

1. Находим $D(f)$.
2. Находим $f'(x)$ и $D(f'(x))$.
3. Находим критические точки функции по первой производной.
4. Находим $f''(x)$ и $D(f''(x))$.
5. Вычисляем значения $f''(x)$ в критических точках, которые принадлежат области определения функции $D(f)$.
6. По знаку $f''(x)$ определяем вид экстремума в каждой критической точке.
7. Находим максимумы и минимумы.

Применяя это правило, решим пример 6.

Пример 6.

Найти экстремумы функции $y = \frac{x^2+3x}{x-1}$, применяя правило 2.

Решение.

1. Учитывая результаты примера 4, получим критические точки по первой производной:

$$y'(x) = \frac{(x-3)\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = 0.$$

Следовательно, это точки: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$.

2. Находим

$$y''(x) = \left(\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\right)' = \frac{8}{(x-1)^3}. \quad D(y''): x \neq 1.$$

3. Вычисляем $y''(-1) = -1,\ y''(3) = 1$.

4. $x = -1$ – точка максимума, т.к. $y''(-1) < 0$.

$x = 3$ – точка минимума, т.к. $y''(3) > 0$.

5. Находим $y(-1) = 1,\ y(3) = 9$.

Ответ: $y_{max} = y(-1) = 1;\ \ y_{min} = y(3) = 9$.

III. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Опр. 10. Число $f(c)$ называется ***наибольшим*** (***наименьшим***) значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\max\limits_{x\in[a,b]} y(x)$ $\left(\min\limits_{x\in[a,b]} y(x)\right)$, если для $\forall x \in [a, b]$ выполняется неравенство:

$$f(x) \le f(c) \quad \left(f(x) \ge f(c)\right).$$

Из ранее изученных свойств функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, следует, что она достигает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.

Очевидно, что наибольшее значение функции может быть достигнуто в одном из её максимумов, а наименьшее – в одном из минимумов. Кроме того, границы отрезка также могут быть точками, в которых $f(x)$ достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Поэтому для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно воспользоваться приведенным далее правилом.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

1. Находим $D(f)$.

2. Находим $(f'x)$.

3. В результате решения уравнения $f'(x)$ =0, определяем критические точки, попадающие на отрезок $x \in [a, b]$. Затем вычисляем значения функции $y = f(x)$ в этих критических точках.

4. Вычисляем значения функции в граничных точках, т.е. $f(a)$ и $f(b)$.

5. Находим наибольшее и наименьшее из полученных значений функции.

Эти значения являются наибольшим $\left(\max\limits_{x\in[a,b]} y(x)\right)$ и наименьшим $\left(\min\limits_{x\in[a,b]} y(x)\right)$ значениями функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 8.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1,6]$.

Решение.

1. Данная функция определена и непрерывна на $[1,6]$.

2. Вычислим $y'(x)$. Получим $y'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2}{x^2}$.

Производная $y'(x)$ также определена и непрерывна на отрезке $[1,6]$.

3. Найдём критические точки производной y'.

$y'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2}{x^2}$. Следовательно, $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. Причем только $x_2 \in [1,6]$.

4. Вычислим значения функции $y(x)$ в критической точке $x = 4$ и в граничных точках $x = 1$ и $x = 6$.

Получим: $y(4) = \frac{4}{8} + \frac{2}{4} = 1$, $y(1) = \frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$, $y(6) = \frac{6}{8} + \frac{2}{6} = \frac{13}{12}$.

5. Найдём наибольшее и наименьшее среди чисел $y(1), y(4), y(6)$.

Получим $\max\limits_{x\in[1,6]} y(x) = y(1) = \frac{17}{8}$ и $\min\limits_{x\in[1,6]} y(x) = y(4) = 1$.

Ответ: $\max\limits_{x\in[1,6]} y(x) = y(1) = \frac{17}{8}$, $\min\limits_{x\in[1,6]} y(x) = y(4) = 1$.

Пример 9.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ на отрезке $[0,2]$.

Задачу решить самостоятельно за 10 минут.

Пример 9.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sqrt[3]{(x^2-1)}$ на отрезке $[0,2]$.

Решение.

1. $D(f)$: $x \in R$. Следовательно данная функция определена и непрерывна при $x \in [0,2]$.

2. Найдём $y'(x)$. Имеем $y'(x) = \frac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)}}$.

$D(y')$: $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$, то есть $x \neq -1$ и $x \neq 1$.

3. Критическими являются точки $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Причем $x_1 \notin [0,2]$.

4. Вычислим значения исходной функции в критических точках $x = 0$ и $x = 1$, а также к граничной точке $x = 2$.

Получим: $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $y(2) = \sqrt[3]{9}$.

5. Найдём наибольшее и наименьшее среди чисел $y(0), y(1), y(2)$. Получим наибольшее значение $\max\limits_{x\in[0,2]} y(x) = y(2) = \sqrt[3]{9}$ и наименьшее значение $\min\limits_{x\in[0,2]} y(x) = y(1) = 0$.

Ответ: $\max\limits_{x\in[0,2]} y(x) = y(2) = \sqrt[3]{9}$, $\min\limits_{x\in[0,2]} y(x) = y(1) = 0$.

Лекция закончена.

Желаю успешного усвоения и применения на практике рассмотренного на ней материала.