Обработка результатов многократных измерений

Основные задачи:

- оценивание области неопределенности исходных экспериментальных данных;
- нахождение более точного усредненного результата измерения;
- оценивание погрешности этого усредненного результата, то есть более узкой области неопределенности.

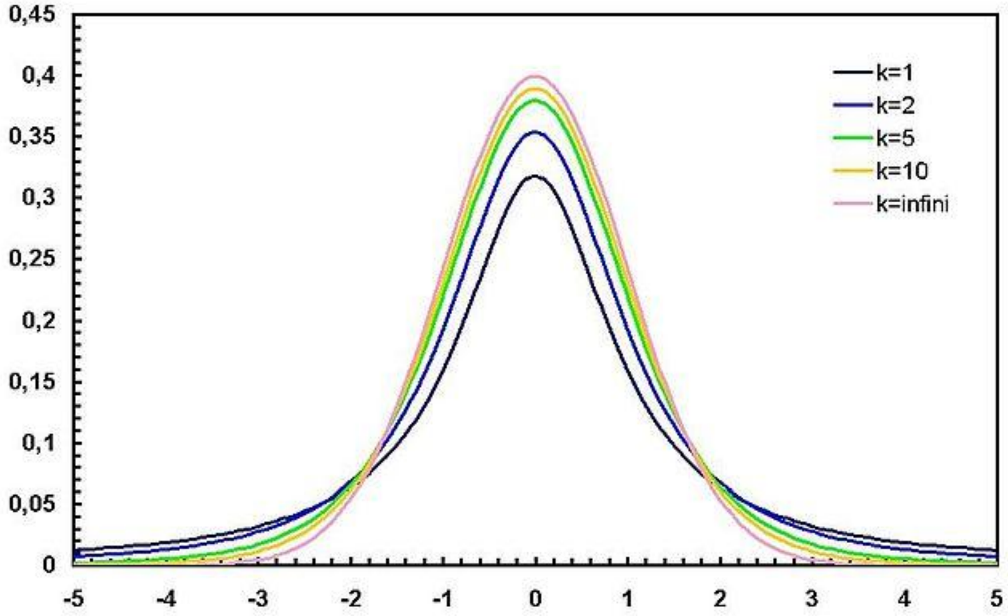
$$\bar{Q} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Q_i \qquad S_Q = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Q_i - \bar{Q}\right)^2} \qquad t_M = \frac{\left|Q_i - \bar{Q}\right|_{\max}}{S_Q}$$

Если $t_M > t_{\text{Т}}$ при принятом $P_{\text{Д}}$ и данном N, Q_i отбрасывается

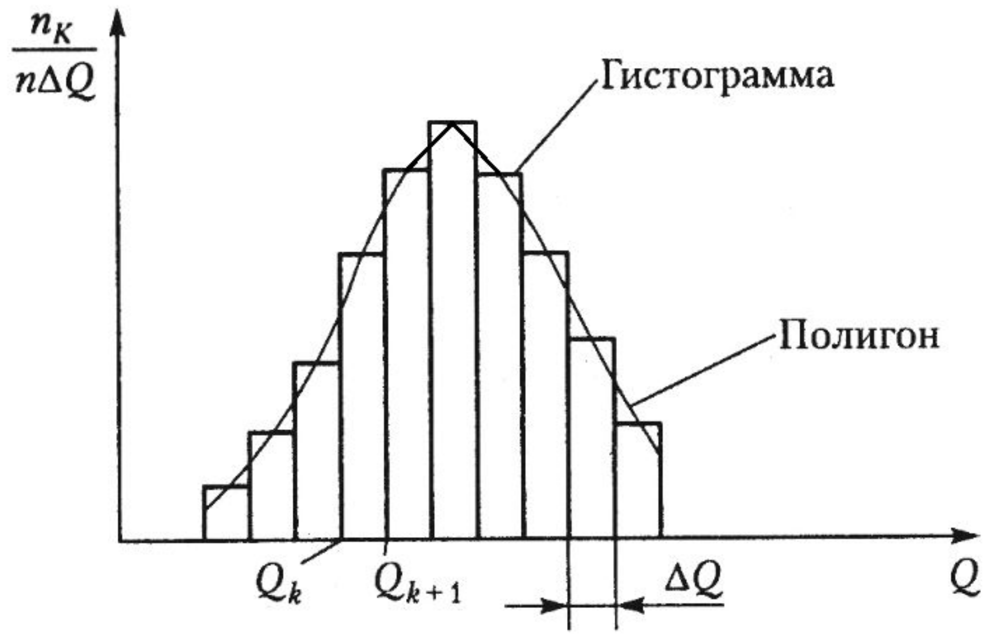
$$S_{\bar{Q}} = \frac{S_Q}{\sqrt{N}} \text{ — СКО среднего арифметического}$$

$$p(\bar{Q}) = \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi N}\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\left(1 + \frac{\bar{Q}^2}{N}\right)^{\frac{N+1}{2}}}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt\,, z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) > 0 \qquad \Gamma(N+1) = N!$$



Определение закона распределения результатов измерений



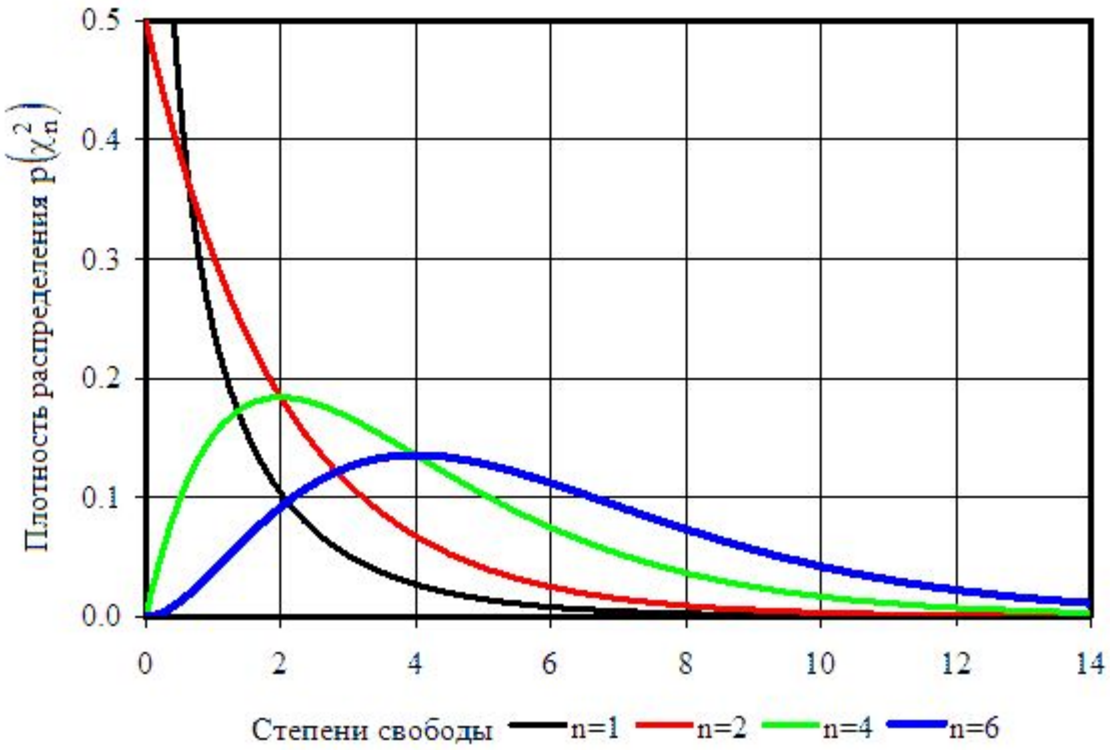
$$m = 1 + \log_2 N = 1 + 3{,}322 \ln N$$

$$\Delta Q = \frac{Q_{max} - Q_{min}}{m} \qquad p_k = \frac{n_k}{N\Delta Q} \qquad \sum_{k=1}^{m} p_k \Delta Q = 1$$

Критерий Пирсона или «хи-квадрат» (например)

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(p_k - p_{k,\text{т}}\right)^2}{p_{k,\text{т}}}$$

$\chi < \chi_{\text{кр}}$ для уровня значимости α и числа степеней свободы $m - 1$



Обработка результатов косвенных измерений

$$Y = f(X_1, \dots, X_j, \dots, X_n,) \qquad \bar{y} = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_j}, \dots, \overline{x_n},) \qquad S_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2_{x_j = \overline{x_j}} S^2_{\overline{x_j}}}$$

$$y = a_1 x_1^{b_1} + a_2 x_2^{b_2} \qquad S_{\bar{y}} = \sqrt{\left(a_1 b_1 \overline{x_1}^{b_1 - 1}\right)^2 S^2_{\overline{x_1}} + \left(a_2 b_2 \overline{x_2}^{b_2 - 1}\right)^2 S^2_{\overline{x_2}}}$$

$$y = \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_j} \qquad \ln y = \sum_{j=1}^{n} b_j \ln x_j \qquad \frac{\partial y}{y} = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial x_j}{x_j} \qquad \delta \bar{y} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(b_j \delta \overline{x_j}\right)^2} \qquad S_{\bar{y}} = \bar{y} \delta \bar{y}$$

$$y = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \qquad S_{\bar{y}} = \bar{y} \sqrt{(b_1 \delta \overline{x_1})^2 + (b_2 \delta \overline{x_2})^2}$$

$$E = \frac{I \cos \alpha}{l^2} \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = 0} = \left(-\frac{I \sin \alpha}{l^2}\right)_{\alpha = 0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = 0} = \frac{I}{l^2} \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos \alpha}{\Delta \alpha}\right] \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = 0} \approx \frac{I}{l^2} \frac{\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos \alpha}{\Delta \alpha} \neq 0$$

Учет неисключенных систематических погрешностей

$$\pm\Delta x_j \qquad \theta_j = \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)_{x_j=\overline{x_j}} \Delta x_j \qquad S_{\theta_j} = \sqrt{\frac{1}{3}\theta_j^2}$$

$$\theta = K_P \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \theta_j^2} \text{ при } n > 4 \qquad \theta = \sum_{j=1}^{n} \left|\theta_j\right| \text{ при } n \le 4$$

$$\frac{\theta}{S_{\bar{y}}} < 0{,}8 \to y = \bar{y} \pm S_{\bar{y}} t_{P,n} \qquad \frac{\theta}{S_{\bar{y}}} > 8 \to y = \bar{y} \pm \theta$$

$$y = \bar{y} \pm S_{\Sigma} t_{P,n} \qquad S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{y}}^2 + S_{\theta}^2} \qquad S_{\theta}^2 = \sum_{j=1}^{n} S_{\theta_j}^2$$

Однократные измерения

Особенности однократных измерений:

- Из множества возможных отсчетов (показаний) средства измерений получается и используется только одно.
- Представление о законе распределения результатов измерений формируется исключительно на основе априорной (известной до измерений) информации.
- Объект измерений, методика выполнения измерений должны быть предварительно изучены, возможные погрешности заранее оценены и уменьшены до необходимых пределов.

Последовательность выполнения однократного измерения

Анализ априорной информации: выяснение закона распределения вероятности результата измерения, СКП, класса точности СИ, определение поправок, НСП

↓

Выполнение измерительной процедуры (сравнения), получение отсчета (показания), рекомендуется среднее арифметическое 3-х измерений

↓

Внесение необходимых поправок, учет известных систематических возмущающих факторов

↓

Представление результата измерений с учетом использования информации о классе точности СИ или информации об СКП

Представление результатов измерения

$$y = (\bar{y} \pm \Delta)[\dots];\ \left(P_{д} =\ \dots;N =\ \dots;\delta =\ \dots\%\right);S_{\bar{y}} =\ \dots[\dots];\ \theta =\ \dots[\dots]$$

$\bar{y}$ − результат измерения

$\Delta = t_{\Sigma}S_{\Sigma}$ − абсолютная погрешность

$$t_{\Sigma} = \frac{\theta + \left(t_{P,N}\right)_{\bar{y}}S_{\bar{y}}}{S_{\bar{y}} + S_{\theta}}$$

θ − неисключенная систематическая погрешность

S_{θ} − СКО систематической погрещности

$S_{\bar{y}}$ − СКО среднего арифметического

$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{y}}^2 + S_{\theta}^2}$ − СКО погрешности

$P_{д}$ − доверительная вероятность

N − количество измерений

δ − относительная погрешность

Погрешности измерения должны содержать не более двух (т. е. одну или две) значащих цифры.

Если первая значащая цифра в абсолютной погрешности меньше 4, то в погрешности оставляем две значащие цифры. Если первая значащая цифра в погрешности больше 3, то в погрешности оставляем одну значащую

Измеренное значение должно заканчиваться тем же младшим разрядом, что и абсолютная погрешность

43,234 ± 0,0417 ≈ 43,23 ± 0,04

$$0{,}0004623 \pm 0{,}000178 \approx (4{,}6 \pm 1{,}8) \cdot 10^{-4}$$

$$I = (109 \pm 5)\ кд;\left(P_{д} = 0{,}95;N = 10;\delta = 4\%\right);S_{\bar{y}} = 0{,}6\ кд;\ \theta = 3{,}6\ кд$$