

Обработка результатов многократных измерений

Основные задачи:

- оценивание области неопределенности исходных экспериментальных данных;
- нахождение более точного усредненного результата измерения;
- оценивание погрешности этого усредненного результата, то есть более узкой области неопределенности.

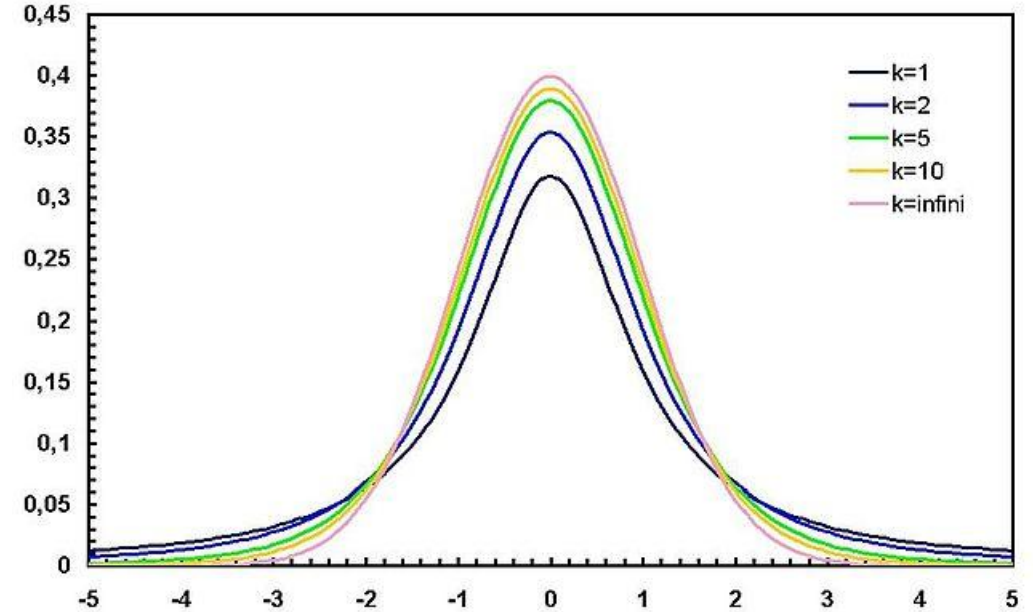
$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q_i \quad S_Q = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Q_i - \bar{Q})^2}$$

$$t_M = \frac{|Q_i - \bar{Q}|_{\max}}{S_Q} \quad \text{Если } t_M > t_T \text{ при принятом } P_d \text{ и данном } N, \\ Q_i \text{ отбрасывается}$$

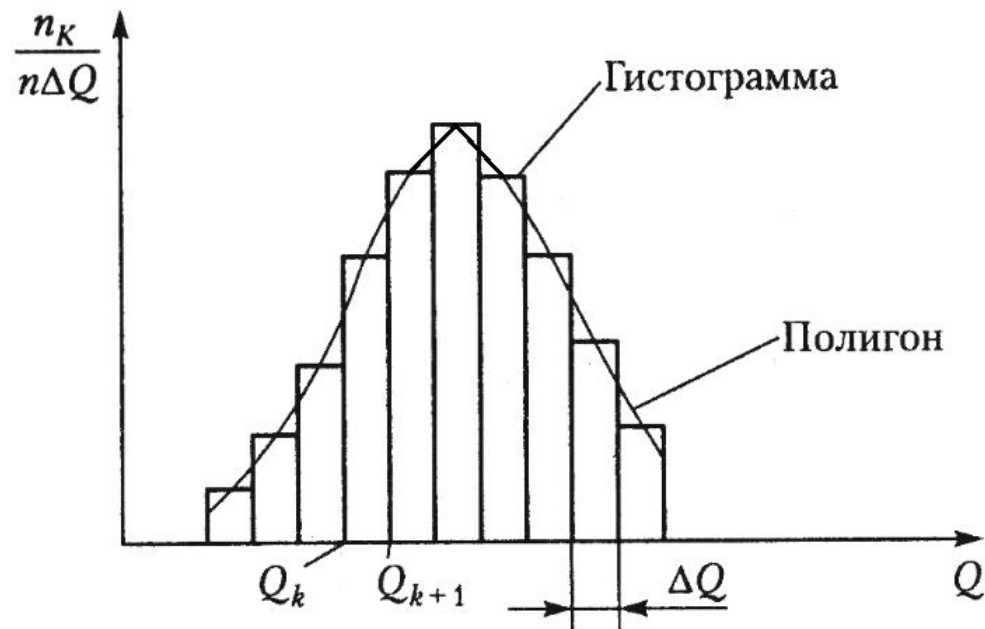
$$S_{\bar{Q}} = \frac{S_Q}{\sqrt{N}} - \text{СКО среднего арифметического}$$

$$p(\bar{Q}) = \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi N} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \left(1 + \frac{\bar{Q}^2}{N}\right)^{\frac{N+1}{2}}}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) > 0 \quad \Gamma(N+1) = N!$$



Определение закона распределения результатов измерений



$$m = 1 + \log_2 N = 1 + 3,322 \ln N$$

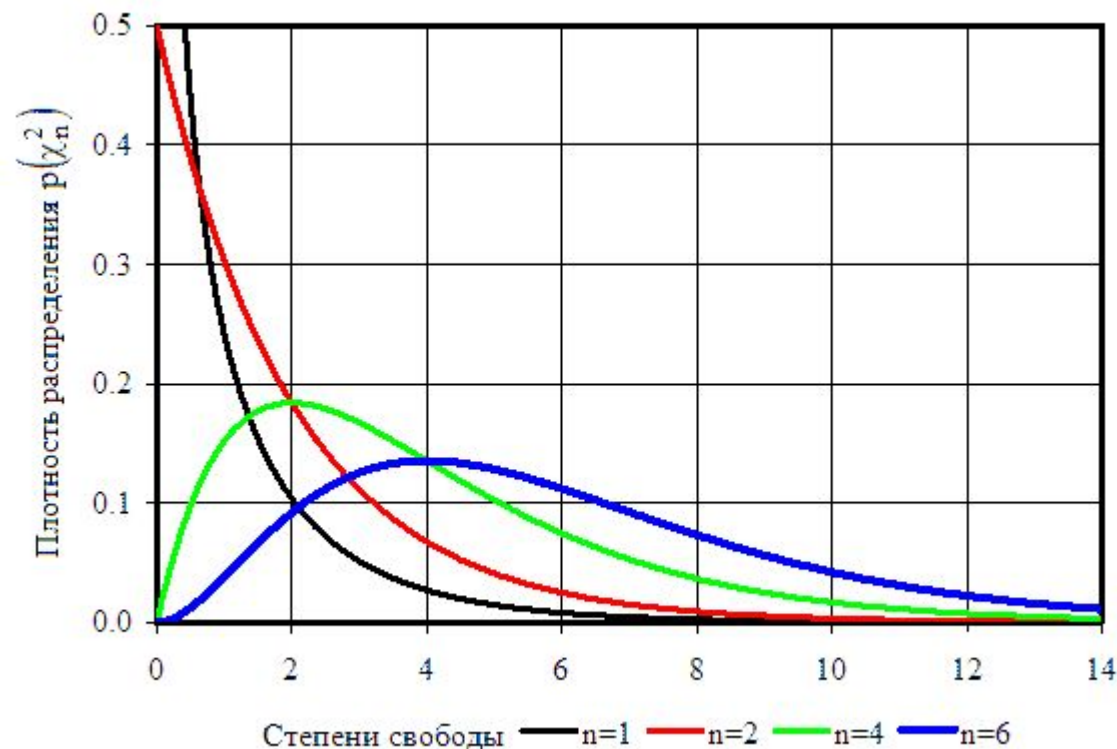
$$\Delta Q = \frac{Q_{max} - Q_{min}}{m}$$

$$p_k = \frac{n_k}{N \Delta Q}$$

$$\sum_{k=1}^m p_k \Delta Q = 1$$

Критерий Пирсона или «хи-квадрат»
(например)

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^m \frac{(p_k - p_{k,T})^2}{p_{k,T}} \quad \chi < \chi_{кр} \text{ для уровня значимости } \alpha \text{ и числа степеней свободы } m - 1$$



Обработка результатов косвенных измерений

$$Y = f(X_1, \dots, X_j, \dots, X_n), \quad \bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n), \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)_{x_j=\bar{x}_j}^2 S_{\bar{x}_j}^2}$$

$$y = a_1 x_1^{b_1} + a_2 x_2^{b_2}, \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{(a_1 b_1 \bar{x}_1^{b_1-1})^2 S_{\bar{x}_1}^2 + (a_2 b_2 \bar{x}_2^{b_2-1})^2 S_{\bar{x}_2}^2}$$

$$y = \prod_{j=1}^n x_j^{b_j}, \quad \ln y = \sum_{j=1}^n b_j \ln x_j, \quad \frac{\partial y}{y} = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial x_j}{x_j}, \quad \delta \bar{y} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (b_j \delta \bar{x}_j)^2}, \quad S_{\bar{y}} = \bar{y} \delta \bar{y}$$

$$y = x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \quad S_{\bar{y}} = \bar{y} \sqrt{(b_1 \delta \bar{x}_1)^2 + (b_2 \delta \bar{x}_2)^2}$$

$$E = \frac{I \cos \alpha}{l^2}, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \left(-\frac{I \sin \alpha}{l^2} \right)_{\alpha=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{I}{l^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos \alpha}{\Delta\alpha} \right], \quad \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \approx \frac{I}{l^2} \frac{\cos(\alpha + \Delta\alpha) - \cos \alpha}{\Delta\alpha} \neq 0$$

Учет неисключенных систематических погрешностей

$$\pm \Delta x_j \quad \theta_j = \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)_{x_j = \bar{x}_j} \Delta x_j \quad S_{\theta_j} = \sqrt{\frac{1}{3} \theta_j^2}$$

$$\theta = K_P \sqrt{\sum_{j=1}^n \theta_j^2} \text{ при } n > 4$$

$$\theta = \sum_{j=1}^n |\theta_j| \text{ при } n \leq 4$$

$$\frac{\theta}{S_{\bar{y}}} < 0,8 \rightarrow y = \bar{y} \pm S_{\bar{y}} t_{P,n}$$

$$\frac{\theta}{S_{\bar{y}}} > 8 \rightarrow y = \bar{y} \pm \theta$$

$$y = \bar{y} \pm S_{\Sigma} t_{P,n}$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{y}}^2 + S_{\theta}^2}$$

$$S_{\theta}^2 = \sum_{j=1}^n S_{\theta_j}^2$$

Однократные измерения

Особенности однократных измерений:

- Из множества возможных отсчетов (показаний) средства измерений получается и используется только одно.
- Представление о законе распределения результатов измерений формируется исключительно на основе априорной (известной до измерений) информации.
- Объект измерений, методика выполнения измерений должны быть предварительно изучены, возможные погрешности заранее оценены и уменьшены до необходимых пределов.

Последовательность выполнения однократного
измерения

Анализ априорной информации: выяснение закона распределения вероятности результата измерения, СКП, класса точности СИ, определение поправок, НСП

Выполнение измерительной процедуры (сравнения), получение отсчета (показания), рекомендуется среднее арифметическое 3-х измерений

Внесение необходимых поправок, учет известных систематических возмущающих факторов

Представление результата измерений с учетом использования информации о классе точности СИ или информации об СКП

Представление результатов измерения

$$y = (\bar{y} \pm \Delta)[\dots]; (P_d = \dots; N = \dots; \delta = \dots\%); S_{\bar{y}} = \dots[\dots]; \theta = \dots[\dots]$$

\bar{y} – результат измерения

$\Delta = t_{\Sigma} S_{\Sigma}$ – абсолютная погрешность

$$t_{\Sigma} = \frac{\theta + (t_{P,N})_{\bar{y}} S_{\bar{y}}}{S_{\bar{y}} + S_{\theta}}$$

θ – неисключенная систематическая погрешность

S_{θ} – СКО систематической погрешности

$S_{\bar{y}}$ – СКО среднего арифметического

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{y}}^2 + S_{\theta}^2} \text{ – СКО погрешности}$$

P_d – доверительная вероятность

N – количество измерений

δ – относительная погрешность

Погрешности измерения должны содержать не более двух (т. е. одну или две) значащих цифры.

Если первая значащая цифра в абсолютной погрешности меньше 4, то в погрешности оставляем две значащие цифры. Если первая значащая цифра в погрешности больше 3, то в погрешности оставляем одну значащую

Измеренное значение должно заканчиваться тем же младшим разрядом, что и абсолютная погрешность
 $43,234 \pm 0,0417 \approx 43,23 \pm 0,04$

$$0,0004623 \pm 0,000178 \approx (4,6 \pm 1,8) \cdot 10^{-4}$$

$$I = (109 \pm 5) \text{ кД}; (P_d = 0,95; N = 10; \delta = 4\%); S_{\bar{y}} = 0,6 \text{ кД}; \theta = 3,6 \text{ кД}$$