Тема: «Вторая производная и ее физический смысл».

Повторение

<u>Определение.</u> ***Производной функции*** $y = f(x)$ *называется конечный предел отношения приращения функции* $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ *к приращению независимой переменной* Δx *при стремлении последнего к нулю:*

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных.

1. $C' = 0;$
2. $x' = 1;$
3. $(Cu)' = C \cdot u';$
4. $(x^n)' = nx^{n-1};$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
7. $(\sin x)' = \cos x;$
8. $(\cos x)' = -\sin x;$
9. $(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
10. $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = -\frac{1}{nx\sqrt[n]{x}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}}$$

Правила дифференцирования.

I. $(u + v)' = u' + v';$

II. $(uv)' = u'v + uv';$

III. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$

IV. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$

Производная от первой производной называется **производной второго порядка** или второй производной и обозначается:

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$$

Физический смысл производной второго порядка.

Пусть тело движется по закону $S = f(x)$

Как известно, скорость v движения тела в данный момент времени равна производной пути по времени, т.е.

$$\boxed{v = S'(t)}$$

Если тело движется неравномерно, то скорость v с течением времени изменяется и является функцией от времени. И, следовательно, от нее также можно найти производную, т.е.

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (S')' = S''}$$

Эта величина называется ускорением в данный момент времени и обозначается буквой а.

Таким образом, **ускорение прямолинейного движения тела в данный момент времени равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.**

В этом и заключается физический смысл второй производной.

3. Применение понятия производной функции при решении задач.

Тело движется прямолинейно по закону:

$$S = 3t^2 - 3t + 8$$

Найти скорость и ускорение тела в момент времени t = 4 с.

Решение.

Для определения скорости движения тела нужно найти первую производную от данной функции при t = 4 с.

$$v = S' = (3t^2 - 3t + 8)' = 6t - 3$$

$$v_{t=4} = 6 \cdot 4 - 3 = 21(м / с)$$

Ускорение тела равно второй производной от функции при t = 4 с.

$$a = S'' = (S')' = (6t - 3)' = 6(м / с^2)$$

Величина ускорения оказалась постоянной для любого значения t, следовательно движение тела по заданному закону происходит с постоянным ускорением.

Ответ: v = 21 м/с, а = 6 м/с ^{2}.

1. $y = x \cdot \ln x$. Найти вторую производную .

Решение.

1. Находим первую производную:

$$y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

2. Находим вторую производную:

$$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

2. $y = e^{2x-1}$ Найти $y''\left(\frac{1}{2}\right)$

Решение.

$$y' = 2e^{2x-1} \Rightarrow y'' = 4e^{2x-1}$$

Вычислим значение второй производной при

$$x = \frac{1}{2}$$

Подставим во вторую производную:

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{1-1} = 4e^{0} = 4$$

Тело движется прямолинейно по закону $S = (t^2 + 2)t - 1$ км. Определить скорость и ускорение движения тела через 6 часов после начала движения.

Решение.

$$v = S' = 3t^2 + 2 \Rightarrow v(6) = 3 \cdot 36 + 2 = 110 км/час$$

$$a = v' = S'' = 6t \Rightarrow a(6) = 6 \cdot 6 = 36 км/час^2$$

Самостоятельная работа

Найти производные второго порядка от заданных функций:

1. $y = x^3 + \sin x$ **2.** $y = e^x - \ln 2$

3. $y = \cos x$ **4.** $y = x + \ln x$

5. Тело движется прямолинейно по закону $S = 1 - 2t + t^3$

. Определить $t = 3$ скорость и ускорение в момент времени .

Критерии оценки:

- «5» - решены правильно все задачи;
- «4» - решены все задачи, но в одной из них допущена ошибка;
- «3» - решены правильно три задачи.