Тема: «Вторая производная и ее физический смысл».

Повторение

Определение. Производной функции y = f(x) называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных.

6.
$$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2};$$

4.
$$(x^n)^i = nx^{n-1}$$
;

9.
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
;

5.
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

10.
$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
.

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = -\frac{1}{nx\sqrt[n]{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Правила дифференцирования.

I.
$$(u + v)' = u' + v';$$

II.
$$(uv)' = u'v + uv';$$

III.
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
;

IV.
$$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$$
.

Производная от первой производной называется производной второго порядка или второй производной и обозначается: $y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$

Физический смысл производной второго порядка.

Пусть тело движется по закону S = f(x) Как известно, скорость у движения тела в данный момент времени равна производной пути по времени, т.е.

$$v = S'(t)$$

Если тело движется неравномерно, то скорость v с течением времени изменяется и является функцией от времени. И, следовательно, от нее также можно найти производную, т.е.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (S')' = S''$$

Эта величина называется ускорением в данный момент времени и обозначается буквой а.

Таким образом, ускорение прямолинейного движения тела в данный момент времени равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.

В этом и заключается физический смысл второй производной.

3. Применение понятия производной функции при решении задач.

Тело движется прямолинейно по закону:

$$S = 3t^2 - 3t + 8$$

Найти скорость и ускорение тела в момент времени t = 4 с.

Решение.

Для определения скорости движения тела нужно найти первую производную от данной функции при t = 4 с.

$$v = S' = (3t^2 - 3t + 8)' = 6t - 3$$
$$v_{t=4} = 6 \cdot 4 - 3 = 21(M/C)$$

Ускорение тела равно второй производной от функции при t = 4 с.

$$a = S'' = (S')' = (6t - 3)' = 6(M/c^2)$$

Величина ускорения оказалась постоянной для любого значения t, следовательно движение тела по заданному закону происходит с постоянным ускорением.

OTBET: v = 21 M/c, a = 6 M/c ?

1. $y = x \cdot \ln x$ Найти вторую производную Решение.

1. Находим первую производную:

$$y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

2. Находим вторую производную:

$$y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$2. y = e^{2x} \text{Найти} y''\left(\frac{1}{2}\right)$$

Решение.

$$y' = 2e^{2x-1} \Rightarrow y'' = 4e^{2x-1}$$

Вычислим значение второй производной при

$$x = \frac{1}{2}$$

Подставим во вторую производную:

$$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{1-1} = 4e^0 = 4$$

Тело движется прямолинейно по закону $S = (t^2 + 2)t - 1$ Прямолинейно по закону скорение и ускорение движения тела через 6 часов после начала движения.

Решение.

$$v = S' = 3t^2 + 2 \Rightarrow v(6) = 3 \cdot 36 + 2 = 110\kappa m / vac$$

$$a = v' = S'' = 6t \Rightarrow a(6) = 6 \cdot 6 = 36\kappa m / vac^2$$

Самостоятельная работа

Найти производные второго порядка от заданных функций:

1.
$$y = x^3 + \sin x^2$$
. $y = e^x - \ln 2$

$$y = e^x - \ln 2$$

3.
$$y = \cos x$$
 4.

$$y = x + \ln x$$

5. Тело движется прямолинейно по закону $S = 1 - 2t + t^3$

. Определиты скорость и ускорение в момент времени .

Критерии оценки:

- «5» решены правильно все задачи;
- «4» решены все задачи, но в одной из них допущена ошибка;
- «3» решены правильно три задачи.