Классы интегрируемых функций

Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

I. Рассмотрим интеграл

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Преобразуем предварительно трехчлен, стоящий в знаменателе, представив его в виде суммы или разности квадратов:

$$ax^2+bx+c=$$
$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right],$$

где обозначено $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$. Знак плюс или минус берется в зависимости от того, будет ли выражение, стоящее слева, положительным или отрицательным, т. е. будут ли корни трехчлена ax^2+bx+c комплексными или действительными.

Таким образом, интеграл I_1 принимает вид

$$I_1=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$.

Тогда получим

$$I_1=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Это — табличные интегралы.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$.

Решение.

$$I=\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

Делаем замену переменной $x+2=t$, $dx=dt$. Подставляя в интеграл, получаем табличный интеграл

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C.$$

Подставляя вместо t его выражение через x, окончательно находим

$$I=\frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

II. Рассмотрим интеграл более общего вида

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Произведем тождественное преобразование подынтегральной функции:

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов. Вынося постоянные множители за знак интегралов, получим

$$I_1 = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Второй интеграл есть интеграл I_1, вычислять который мы умеем. В первом интеграле сделаем замену переменной

$$ax^2+bx+c=t, \quad (2ax+b)\,dx = dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$I_2 = \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$.

Применим указанный прием:

$$I=\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,dx=\int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}\cdot 2\right)}{x^2-2x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x-5}+4\int \frac{dx}{x^2-2x-5}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+C.$$

III. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

С помощью преобразований, рассмотренных в п. I, этот интеграл сводится, в зависимости от знака a, к табличным интегралам вида

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \quad \text{при} \quad a>0 \quad \text{или} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} \quad \text{при} \quad a<0,$$

которые уже рассмотрены в таблице интегралов

IV. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

вычисляется с помощью следующих преобразований, аналогичных тем, которые были рассмотрены в п. II:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Применив к первому из полученных интегралов подстановку $ax^2+bx+c=t$, $(2ax+b)\,dx=dt$, получим

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Как мы увидим ниже, далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n}.$$

Не ограничивая общности рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется *правильной*, в противном случае дробь называется *неправильной*.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

здесь $M(x)$ — многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ — правильная дробь.

Пример 1. Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}.$$

Разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании *правильных* рациональных дробей.

Определение. Правильные рациональные дроби вида

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k — целое положительное число $\geqslant 2$),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\left(\text{корни знаменателя комплексные, т. е. } \frac{p^2}{4}-q<0\right)$.

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k — целое положительное число $\geqslant 2$; корни знаменателя комплексные),

называются *простейшими дробями* I, II, III *и* IV *типов*.

Интегрирование простейших дробей типа I, II и III не составляет большой трудности, поэтому мы проведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$

Произведем преобразования:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Первый интеграл берется подстановкой $x^2+px+q=t$, $(2x+p)\,dx = dt$:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}\,dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k}+C =$$
$$= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C.$$

Второй интеграл — обозначим его через I_k — запишем в виде

$$I_k=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

полагая

$$x+\frac{p}{2}=t,\qquad dx=dt,\qquad q-\frac{p^2}{4}=m^2$$

(по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно, $q-\frac{p^2}{4}>0$). Далее поступаем следующим образом:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt=$$

$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt. \qquad (1)$$

Преобразуем интеграл:

$$\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{2}\int t\,\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}=$$

$$=-\frac{1}{2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t\,\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получим

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} =$$
$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2}\,\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right] =$$
$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что I_k, но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже $(k-1)$; таким образом, мы выразили I_k через I_{k-1}.

Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{m} + C.$$

Подставляя затем всюду вместо t и m их значения, получим выражение интеграла IV через x и заданные числа A, B, p, q.

Пример

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx-2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+3}-2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

К последнему интегралу применяем подстановку $x+1=t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}=\int \frac{dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2}-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2}.$$

Рассмотрим последний интеграл:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{t\,d(t^2+2)}{(t^2+2)^2}=-\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{t^2+2}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=-\frac{t}{2(t^2+2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}$$

(произвольной постоянной пока не пишем: мы учтем ее только в окончательном результате).

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$$

Окончательно будем иметь

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Разложение рациональной дроби на простейшие

Покажем далее, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей.

Пусть нам дана правильная рациональная дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$.

Будем предполагать, что коэффициенты входящих в нее многочленов — действительные числа и что данная дробь несократима (последнее означает, что числитель и знаменатель не имеют общих корней).

Теорема 1. *Пусть $x=a$ есть корень знаменателя кратности k, т. е. $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a)\neq 0$; тогда данную правильную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:*

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}, \qquad (1)$$

где A — постоянная, не равная нулю, а $F_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1}f_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x)-Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \tag{2}$$

(справедливое при любом A) и определим постоянную A так, чтобы многочлен $F(x)-Af_1(x)$ делился на $x-a$. Для этого по теореме Безу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $F(a)-Af_1(a)=0$. Так как $f_1(a)\neq 0$, $F(a)\neq 0$, то A однозначно определится равенством $A=\frac{F(a)}{f_1(a)}$. При таком A будем иметь $F(x)-Af_1(x)=(x-a)F_1(x)$, где $F_1(x)$ есть многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x-a)^{k-1}f_1(x)$. Сокращая дробь в формуле (2) на $x-a$, получаем равенство (1).

Следствие. К правильной рациональной дроби

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)},$$

входящей в равенство (1), можно применять аналогичные рассуждения. Таким образом, если знаменатель имеет корень $x=a$ кратности k, то можно написать

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

где $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ — правильная несократимая дробь. К ней также можно применить только что доказанную теорему, если $f_1(x)$ имеет другие действительные корни.

Рассмотрим далее случай комплексных корней знаменателя. Напомним, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены.

В разложении многочлена на действительные множители каждой паре комплексных корней многочлена соответствует выражение вида x^2+px+q. Если же комплексные корни имеют кратность μ, то им соответствует выражение $(x^2+px+q)^\mu$.

Теорема 2. *Если $f(x)=(x^2+px+q)^\mu\varphi_1(x)$, где многочлен $\varphi_1(x)$ не делится на x^2+px+q, то правильную рациональную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:*

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu}+\frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)}, \tag{3}$$

где $\Phi_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$.

Пример. Пусть требуется разложить дробь $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ на простейшие. На основании формулы имеем

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3,$$

или

$$x^2+2=$$
$$=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x^1, x^0 (свободный член), получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$0=A_2+B,\quad 1=A_1+3B,\quad 0=A-A_1-3A_2+3B,\quad 2=-2A-2A_1-2A_2+B.$$

Решая эту систему, найдем

$$A=-1,\quad A_1=1/3,\quad A_2=-2/9,\quad B=2/9.$$

Можно было бы также определить некоторые коэффициенты из уравнений, которые получаются при некоторых частных значениях x из равенства, которое является тождеством относительно x.

Так, полагая $x=-1$, получим $3=-3A$ или $A=-1$; полагая $x=2$, получим $6=27B$; $B=2/9$. Если к этим двум уравнениям присоединим два уравнения, получающиеся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x, то получим четыре уравнения для определения четырех неизвестных коэффициентов. В результате получаем разложение:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

Интегрирование рациональных дробей

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби $\frac{Q(x)}{f(x)}$, т. е. интеграл $\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$.

Если данная дробь неправильная, то мы представляем ее в виде суммы многочлена $M(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$. Последнюю же представляем в виде суммы

простейших дробей. Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей.

Из результатов следует, что вид простейших дробей определяется корнями знаменателя $f(x)$. Здесь возможны следующие случаи.

I случай. *Корни знаменателя действительны и различны, т. е.*

$$f(x)=(x-a)(x-b)\dots(x-d).$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\dots+\frac{D}{x-d},$$

и тогда

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} dx=\int \frac{A}{x-a} dx+\int \frac{B}{x-b} dx+\dots+\int \frac{D}{x-d} dx=$$
$$=A\ln|x-a|+B\ln|x-b|+\dots+D\ln|x-d|+C.$$

II случай. *Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные*:

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I и II типов.

Пример 1

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+$$
$$+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C=$$
$$=-\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

III случай. *Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся (т. е. различные)*:

$$f(x)=(x^2+px+q)\ldots(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I, II и III типов.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}.$$

Следовательно,

$$x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1).$$

Полагая $x=1$, получим $1=2C$, $C=1/2$; полагая $x=0$, получим $0=$ $=-B+C$, $B=1/2$.

Приравнивая коэффициенты при x^2, получим $0=A+C$, откуда $A=-1/2$. Таким образом,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

П р и м е р. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}\,dx$;

б) $\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$;

в) $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx$.

◑ а) Подынтегральная дробь — правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)},$$

т. е.

$$7x+4 = A(x+2)+B(x-3).$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами: с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. *Метод неопределенных коэффициентов.* Раскроем скобки в правой части равенства (3.2) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x + 4 = (A + B)x + (2A - 3B).$$

Так как многочлены в обоих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x. Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ 2A - 3B = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = 5$, $B = 2$.

2. *Метод частных значений.* Придадим неизвестной x в равенстве (3.2) частное значение $x = 3$. Тогда получим

$$7 \cdot 3 + 4 = A \cdot (3 + 2), \text{ т. е. } 25 = 5A,$$

откуда $A = 5$. Подставляя теперь в уравнение

$$7x + 4 = A(x + 2) + B(x - 3) \quad \text{значение}$$

$x = -2$ (удобнее всего подставлять значения, обращающие одну или несколько скобок в правой части равенства в ноль; эти значения совпадают с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим

$$7 \cdot (-2) + 4 = B \cdot (-2 - 3),$$

откуда $B = 2$.

Таким образом,

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x + 2}$$

и, стало быть,

$$\int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx = 5 \int \frac{dx}{x - 3} + 2 \int \frac{dx}{x + 2} =$$

$$= 5 \ln |x - 3| + 2 \ln |x + 2| + C.$$

б) Подынтегральная дробь — правильная, однако ее знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2-1)(x+1)=(x-1)(x+1)(x+1)=(x-1)(x+1)^2.$$

Отсюда

$$\frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Разложим эту дробь на простейшие:

$$\frac{x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2+5x-2=A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов A, B и C воспользуемся методом частных значений.

Положим $x=1$, тогда

$$1^2+5\cdot 1-2=A\cdot(1+1)^2,$$

т. е. $4A=4$, откуда $A=1$. Аналогично, положим $x=-1$. Тогда

$$(-1)^2+5\cdot(-1)-2=B\cdot(-1-1),$$

откуда $B=3$.

Осталось найти коэффициент C. Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким подстановкам. Проще всего положить $x = 0$. Тогда $-2 = A - B - C$, откуда, с учетом найденных значений A и B, получим $-2 = 1 - 3 - C$, т. е. $C = 0$.

Итак,

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x+1)^2},$$

т. е. окончательно

$$\int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2-1)(x+1)} dx = \int \frac{dx}{x-1} + 3 \cdot \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

в) Данная подынтегральная дробь — неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 x^5 & +0\cdot x^4 & +0\cdot x^3 & +0\cdot x^2 & -1 & x^3+x^2+x \\ \cline{6-6}
-\;x^5 & +\;x^4 & +\;x^3 & & & x^2-x \\ \cline{1-3}
 & -\;x^4 & -\;x^3 & +0\cdot x^2 & -1 & \\
 & -\;x^4 & -\;x^3 & -\;x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & & x^2 & -1 &
\end{array}
$$

т. е.

$$\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}=x^2-x+\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}.$$

Отсюда

$$\int\frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}\,dx=\int(x^2-x)\,dx+\int\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,dx.$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим

$$x^2-1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)x.$$

Сначала воспользуемся методом частных значений. Положив $x=0$, найдем $A=-1$. Далее воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (на практике часто приходится комбинировать оба метода). Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приведем подобные:

$$x^2-1 = (A+B)x^2+(A+C)x+A.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при x^2 и x, в левой и правой частях последнего равенства получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + C = 0, \end{cases}$$

откуда, учитывая, что $A = -1$, найдем оставшиеся коэффициенты: $B = 2$, $C = 1$. Таким образом,

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} = -\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

откуда

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}\, dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx =$$
$$= \left[t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 1)\, dx\right] =$$
$$= -\ln|x| + \int \frac{dt}{t} = -\ln|x| + \ln|t| + C =$$
$$= -\ln|x| + \ln(x^2 + x + 1) + C = \ln\left|\frac{x^2 + x + 1}{x}\right| + C.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x}\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x^2 + x + 1}{x}\right| + C. \quad \bullet$$

IV **случай.** *Среди корней знаменателя есть комплексные кратные*:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^{\mu} \dots (x^2 + lx + s)^{\nu} (x - a)^{\alpha} \dots (x - d)^{\delta}.$$

В этом случае разложение дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ будет содержать и простейшие дроби IV типа.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} dx.$$

Решение. Разлагаем дробь на простейшие:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1},$$

откуда

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 =$$
$$= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2.$$

Комбинируя указанные выше методы определения коэффициентов, находим

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 1.$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3^2)(x + 1)} dx = \int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx + \int \frac{dx}{x + 1} =$$
$$= -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \ln|x + 1| + C.$$

Из всего изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

1) через логарифмы — в случае простейших дробей I типа;

2) через рациональные функции — в случае простейших дробей II типа;

3) через логарифмы и арктангенсы — в случае простейших дробей III типа;

4) через рациональные функции и арктангенсы — в случае простейших дробей IV типа.

Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим те иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

1. Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})\,dx$, где R — рациональная функция своих аргументов).

Пусть k — общий знаменатель дробей $m/n, \ldots, r/s$. Сделаем подстановку $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}\,dt$.

Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/4}+1}.$$

Решение. Общий знаменатель дробей 1/2, 3/4 есть 4; поэтому делаем подстановку $x=t^4$, $dx=4t^3\,dt$; тогда

$$\int \frac{x^{1/2}\,dx}{x^{3/4}+1}=4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,t^3\,dt=4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt=4\int \left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt=$$

$$=4\int t^2\,dt-4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt=4\,\frac{t^3}{3}-\frac{4}{3}\ln|t^3+1|+C=$$

$$=\frac{4}{3}\left[x^{3/4}-\ln|x^{3/4}+1|\right]+C.$$

II. Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right] dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

где k — общий знаменатель дробей $m/n, \ldots, r/s$.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Решение. Делаем подстановку $x+4=t^2$, $x=t^2-4$, $dx=2t\,dt$; тогда

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2\int \left(1+\frac{4}{t^2-4}\right) dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{1}$$

где $a \neq 0$.

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции от новой переменной с помощью следующих подстановок Эйлера.

1. *Первая подстановка Эйлера*. Если $a>0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x+t.$$

Перед корнем $\sqrt{a}$ возьмем для определенности знак плюс. Тогда

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

откуда x определяется как рациональная функция от t:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$$

(значит, dx тоже будет выражаться рационально через t), следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x+t = \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}+t,$$

т. е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ оказывается рациональной функцией от t.

Так как $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x и dx выражаются рационально через t, то, следовательно, данный интеграл (1) преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}.$$

Решение. Так как здесь $a=1>0$, то полагаем $\sqrt{x^2+c}=-x+t$; тогда

$$x^2+c=x^2-2xt+t^2,$$

откуда

$$x=\frac{t^2-c}{2t}.$$

Следовательно,

$$dx=\frac{t^2+c}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+c}=-x+t=-\frac{t^2-c}{2t}+t=\frac{t^2+c}{2t}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+c}{2t}}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+C_1$$

(см. формулу 14 таблицы интегралов).

Пример . Найти интегралы $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

Решение: Так как $4x^2+2x+1 = 4\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right)$,
то

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4((x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16})}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16}}}.$$

Сделаем подстановку $x+\frac{1}{4}=t$, $x=t-\frac{1}{4}$, $dx=dt$. Тогда

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3/16}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right|+C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right|+C.$$

Пример . Найти интеграл $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx$

❍ Решение: Так как $6-2x-x^2 = -(x^2+2x-6) = -((x+1)^2-7) = 7-(x+1)^2$, то подстановка имеет вид $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Тогда

$$I = \int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}\,dt = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}} + 3\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (7-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(7-t^2) + 3\int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-t^2}} =$$

$$= -\sqrt{7-t^2} + 3\cdot\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}} + C = 3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6-2x-x^2} + C. \quad \bullet$$

2. *Вторая подстановка Эйлера.* Если $c > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c};$$

тогда (перед $\sqrt{c}$ для определенности берем знак плюс)

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

Отсюда x определяется как рациональная функция от t:

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже выражаются рационально через t, то, подставляя значения x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и dx в интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, мы сведем его к интегралу от рациональной функции от t.

П р и м е р. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$$

Р е ш е н и е. Полагаем $\sqrt{1+x+x^2}=xt+1$; тогда

$$1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1,\quad x=\frac{2t-1}{1-t^2},\quad dx=\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2};\quad 1-\sqrt{1+x+x^2}=\frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, находим

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\,dx=\int \frac{(-2t^2+t)^2\,(1-t^2)^2\,(1-t^2)\,(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2\,(2t-1)^2\,(t^2-t+1)\,(1-t^2)^2}\,dt=$$

$$=2\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt=-2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C=$$

$$=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right|+C.$$

3. *Третья подстановка Эйлера.* Пусть α и β — действительные корни трехчлена ax^2+bx+c. Полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,t.$$

Так как $ax^2+bx+c=a\,(x-\alpha)(x-\beta)$, то $\sqrt{a\,(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\,t$, $a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)=(x-\alpha)^2\,t^2$, $a\,(x-\beta)=(x-\alpha)\,t^2$. Отсюда находим x как рациональную функцию от t:

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже рационально зависят от t, то данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

Замечание 1. Третья подстановка Эйлера применима не только при $a<0$, но и при $a>0$ — лишь бы многочлен ax^2+bx+c имел два действительных корня.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Решение. Так как $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$, то полагаем

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)\,t;$$

тогда $(x+4)(x-1)=(x+4)^2\,t^2$, $x-1=(x+4)\,t^2$, $x=\dfrac{1+4t^2}{1-t^2}$, $dx=\dfrac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt$,

$\sqrt{(x+4)(x-1)}=\left[\dfrac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\dfrac{5t}{1-t^2}$. Возвращаясь к исходному интегралу,

получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int \frac{10t\,(1-t^2)}{(1-t^2)^2\cdot 5t}\,bt=\int \frac{2}{1-t^2}\,dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C.$$

Замечание 2. Заметим, что для приведения интеграла к интегралу от рациональной функции достаточно первой и третьей подстановок Эйлера. Рассмотрим трехчлен ax^2+bx+c. Если $b^2-4ac>0$, то корни трехчлена действительны и, следовательно, применима третья подстановка Эйлера. Если $b^2-4ac\leqslant 0$, то в этом случае

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]$$

и, следовательно, трехчлен имеет знак, совпадающий со знаком a. Чтобы $\sqrt{ax^2+bx+c}$ был действительным, нужно, чтобы трехчлен был положительным, а следовательно, должно быть $a>0$. В этом случае применима первая подстановка.