

Классы интегрируемых функций

Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

I. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Преобразуем предварительно трехчлен, стоящий в знаменателе, представив его в виде суммы или разности квадратов:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \\ &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right], \end{aligned}$$

где обозначено $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$. Знак плюс или минус берется в зависимости от того, будет ли выражение, стоящее слева, положительным или отрицательным, т. е. будут ли корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ комплексными или действительными.

Таким образом, интеграл I_1 принимает вид

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right]}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$.

Тогда получим

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Это — табличные интегралы.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$.

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 6}. \end{aligned}$$

Делаем замену переменной $x + 2 = t$, $dx = dt$. Подставляя в интеграл, получаем табличный интеграл

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C.$$

Подставляя вместо t его выражение через x , окончательно находим

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Рассмотрим интеграл более общего вида

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx.$$

Произведем тождественное преобразование подынтегральной функции:

$$I_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} dx.$$

Последний интеграл представим в виде суммы двух интегралов. Вынося постоянные множители за знак интегралов, получим

$$I_1 = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Второй интеграл есть интеграл I_1 , вычислять который мы умеем. В первом интеграле сделаем замену переменной

$$ax^2+bx+c = t, \quad (2ax+b) dx = dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(2ax+b) dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$I_2 = \frac{A}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx$.

Применим указанный прием:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 2\right)}{x^2-2x-5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2) dx}{x^2-2x-5} + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + 2 \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)} \right| + C. \end{aligned}$$

III. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

С помощью преобразований, рассмотренных в п. I, этот интеграл сводится, в зависимости от знака a , к табличным интегралам вида

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \quad \text{при } a > 0 \quad \text{или} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \quad \text{при } a < 0,$$

которые уже рассмотрены в таблице интегралов.

IV. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

вычисляется с помощью следующих преобразований, аналогичных тем, которые были рассмотрены в п. II:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

Применив к первому из полученных интегралов подстановку $ax^2+bx+c=t$, $(2ax+b)dx=dt$, получим

$$\int \frac{(2ax+b) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = \\ &= 5 \sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2 + \sqrt{(x+2)^2+6}| + C = \\ &= 5 \sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2 + \sqrt{x^2+4x+10}| + C.\end{aligned}$$

Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Как мы увидим ниже, далеко не всякая элементарная функция имеет интеграл, выражающийся в элементарных функциях. Поэтому очень важно выделить такие классы функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции. Простейшим из этих классов является класс рациональных функций.

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n}.$$

Не ограничивая общности рассуждения, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется *правильной*, в противном случае дробь называется *неправильной*.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

здесь $M(x)$ — многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ — правильная дробь.

Пример 1. Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании *правильных* рациональных дробей.

Определение. Правильные рациональные дроби вида

I. $\frac{A}{x-a},$

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k — целое положительное число ≥ 2),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $\frac{p^2}{4} - q < 0$).

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k — целое положительное число ≥ 2 ; корни

знаменателя комплексные),

называются *простейшими дробями I, II, III и IV типов*.

Интегрирование простейших дробей типа I, II и III не составляет большой трудности, поэтому мы проведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned}$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа. Пусть нам дан интеграл такого типа:

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx.$$

Произведем преобразования:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}. \end{aligned}$$

Первый интеграл берется подстановкой $x^2+px+q=t$, $(2x+p) dx = dt$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C = \\ &= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Второй интеграл — обозначим его через I_k — запишем в виде

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k},$$

полагая

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt, \quad q - \frac{p^2}{4} = m^2$$

(по предположению корни знаменателя комплексные, а следовательно, $q - \frac{p^2}{4} > 0$). Далее поступаем следующим образом:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} &= \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2 + m^2)}{(t^2 + m^2)^k} = \\ &= -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \left[t \frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right].$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получим

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \\ &= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2m^2(k-1)} \frac{t}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}}. \end{aligned}$$

В правой части содержится интеграл того же типа, что I_k , но показатель степени знаменателя подынтегральной функции на единицу ниже ($k-1$); таким образом, мы выразили I_k через I_{k-1} .

Продолжая идти тем же путем, дойдем до известного интеграла:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

Подставляя затем всюду вместо t и m их значения, получим выражение интеграла IV через x и заданные числа A , B , p , q .

Пример

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-1-1)}{(x^2+2x+3)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+2x+3} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.\end{aligned}$$

К последнему интегралу применяем подстановку $x+1=t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2}.\end{aligned}$$

Рассмотрим последний интеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int td \left(\frac{1}{t^2+2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = \\ &= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(произвольной постоянной пока не пишем: мы учтем ее только в окончательном результате).

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right].$$

Окончательно будем иметь

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C,$$

Разложение рациональной дроби на простейшие

Покажем далее, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей.

Пусть нам дана правильная рациональная дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$.

Будем предполагать, что коэффициенты входящих в нее многочленов — действительные числа и что данная дробь несократима (последнее означает, что числитель и знаменатель не имеют общих корней).

Теорема I. Пусть $x=a$ есть корень знаменателя кратности k , т. е. $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a) \neq 0$; тогда данную правильную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \quad (1)$$

где A — постоянная, не равная нулю, а $F_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Доказательство. Напишем тождество

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \quad (2)$$

(справедливое при любом A) и определим постоянную A так, чтобы многочлен $F(x) - Af_1(x)$ делился на $x-a$. Для этого по теореме Безу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $F(a) - Af_1(a) = 0$. Так как $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, то A однозначно определится равенством $A = \frac{F(a)}{f_1(a)}$. При таком A будем иметь $F(x) - Af_1(x) = (x-a)F_1(x)$, где $F_1(x)$ есть многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x-a)^{k-1}f_1(x)$. Сокращая дробь в формуле (2) на $x-a$, получаем равенство (1).

Следствие. К правильной рациональной дроби

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)},$$

входящей в равенство (1), можно применять аналогичные рассуждения. Таким образом, если знаменатель имеет корень $x=a$ кратности k , то можно написать

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

где $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ — правильная несократимая дробь. К ней также можно применить только что доказанную теорему, если $f_1(x)$ имеет другие действительные корни.

Рассмотрим далее случай комплексных корней знаменателя. Напомним, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены.

В разложении многочлена на действительные множители каждой паре комплексных корней многочлена соответствует выражение вида $x^2 + px + q$. Если же комплексные корни имеют кратность μ , то им соответствует выражение $(x^2 + px + q)^\mu$.

Теорема 2. Если $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \Phi_1(x)$, где многочлен $\Phi_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$, то правильную рациональную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1} \Phi_1(x)}, \quad (3)$$

где $\Phi_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени многочлена $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \Phi_1(x)$.

Пример. Пусть требуется разложить дробь $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ на простейшие. На основании формулы имеем

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая числители, получим

$$x^2+2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^3,$$

или

$$\begin{aligned} x^2+2 &= \\ &= (A_2+B)x^3 + (A_1+3B)x^2 + (A-A_1-3A_2+3B)x + (-2A-2A_1-2A_2+B). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при x^3 , x^2 , x^1 , x^0 (свободный член), получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$0 = A_2 + B, \quad 1 = A_1 + 3B, \quad 0 = A - A_1 - 3A_2 + 3B, \quad 2 = -2A - 2A_1 - 2A_2 + B.$$

Решая эту систему, найдем

$$A = -1, \quad A_1 = 1/3, \quad A_2 = -2/9, \quad B = 2/9.$$

Можно было бы также определить некоторые коэффициенты из уравнений, которые получаются при некоторых частных значениях x из равенства, которое является тождеством относительно x .

Так, полагая $x = -1$, получим $3 = -3A$ или $A = -1$; полагая $x = 2$, получим $6 = 27B$; $B = 2/9$. Если к этим двум уравнениям присоединим два уравнения, получающиеся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x , то получим четыре уравнения для определения четырех неизвестных коэффициентов. В результате получаем разложение:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}.$$

Интегрирование рациональных дробей

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби $\frac{Q(x)}{f(x)}$, т. е. интеграл $\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$.

Если данная дробь неправильная, то мы представляем ее в виде суммы многочлена $M(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$. Последнюю же представляем в виде суммы

простейших дробей. Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей.

Из результатов следует, что вид простейших дробей определяется корнями знаменателя $f(x)$. Здесь возможны следующие случаи.

I случай. *Корни знаменателя действительны и различны, т. е.*

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-d).$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби **I** типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d},$$

и тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{F(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{D}{x-d} dx = \\ &= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \dots + D \ln|x-d| + C. \end{aligned}$$

II случай. Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные:

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - d)^\delta.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I и II типов.

Пример 1

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3 (x-2)} dx &= - \int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \\ &+ \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{2}{9} \ln|x-2| + C = \\ &= - \frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

III случай. Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся (т. е. различные):

$$f(x) = (x^2 + px + q) \dots (x^2 + lx + s) (x - a)^\alpha \dots (x - d)^\delta.$$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I, II и III типов.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Следовательно,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Полагая $x=1$, получим $1=2C$, $C=1/2$; полагая $x=0$, получим $0=-B+C$, $B=1/2$.

Приравнявая коэффициенты при x^2 , получим $0=A+C$, откуда $A=-1/2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x^2+1)(x-1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Пример. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx;$

б) $\int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx;$

в) $\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx.$

○ а) Подынтегральная дробь — правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B , приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю, откуда

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)},$$

т. е.

$$7x + 4 = A(x + 2) + B(x - 3).$$

Из полученного равенства можно найти коэффициенты A и B двумя способами: с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений. Рассмотрим оба способа.

1. *Метод неопределенных коэффициентов.* Раскроем скобки в правой части равенства (3.2) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$7x + 4 = (A + B)x + (2A - 3B).$$

Так как многочлены в обеих частях полученного равенства тождественно равны, то у них должны быть равны и коэффициенты при соответствующих степенях переменной x . Сравнивая эти коэффициенты, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ 2A - 3B = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $A = 5$, $B = 2$.

2. *Метод частных значений.* Придадим неизвестной x в равенстве (3.2) частное значение $x = 3$. Тогда получим

$$7 \cdot 3 + 4 = A \cdot (3 + 2), \text{ т. е. } 25 = 5A,$$

откуда $A = 5$. Подставляя теперь в уравнение

$$7x + 4 = A(x + 2) + B(x - 3) \text{ значение}$$

$x = -2$ (удобнее всего подставлять значения, обращающие одну или несколько скобок в правой части равенства в ноль; эти значения совпадают с действительными корнями знаменателя подынтегральной дроби), получим

$$7 \cdot (-2) + 4 = B \cdot (-2 - 3),$$

откуда $B = 2$.

Таким образом,

$$\frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{5}{x - 3} + \frac{2}{x + 2}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \int \frac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)} dx &= 5 \int \frac{dx}{x - 3} + 2 \int \frac{dx}{x + 2} = \\ &= 5 \ln |x - 3| + 2 \ln |x + 2| + C. \end{aligned}$$

б) Подынтегральная дробь — правильная, однако ее знаменатель не до конца разложен на множители. Поэтому сначала преобразуем знаменатель:

$$(x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Отсюда

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2}.$$

Разложим эту дробь на простейшие:

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Приводя к общему знаменателю и избавляясь от знаменателей, приходим к равенству

$$x^2 + 5x - 2 = A(x + 1)^2 + B(x - 1) + C(x - 1)(x + 1).$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов A , B и C воспользуемся методом частных значений.

Положим $x = 1$, тогда

$$1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = A \cdot (1 + 1)^2,$$

т. е. $4A = 4$, откуда $A = 1$. Аналогично, положим $x = -1$. Тогда

$$(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 2 = B \cdot (-1 - 1),$$

откуда $B = 3$.

Осталось найти коэффициент C . Поскольку «удобных» частных значений уже не осталось, придадим x какое-нибудь значение, приводящее к не очень громоздким подстановкам. Проще всего положить $x = 0$. Тогда $-2 = A - B - C$, откуда, с учетом найденных значений A и B , получим $-2 = 1 - 3 - C$, т. е. $C = 0$.

Итак,

$$\frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{(x + 1)^2},$$

т. е. окончательно

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + 3 \cdot \int \frac{dx}{(x + 1)^2} = \\ &= \ln |x - 1| - \frac{3}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

в) Данная подынтегральная дробь — неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель «столбиком»:

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \quad | \quad x^3 + x^2 + x \\
 - \quad x^5 + \quad x^4 + \quad x^3 \quad \quad \quad | \quad x^2 - x \\
 \hline
 \quad - \quad x^4 - \quad x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \\
 - \quad - \quad x^4 - \quad x^3 - \quad x^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x^2 - 1
 \end{array}$$

т. е.

$$\frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} = x^2 - x + \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx &= \int (x^2 - x) dx + \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \\
 &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx.
 \end{aligned}$$

Разложив на множители знаменатель полученной правильной дроби, представим ее в виде суммы простейших:

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим

$$x^2 - 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x.$$

Сначала воспользуемся методом частных значений. Положив $x = 0$, найдем $A = -1$. Далее воспользуемся методом неопределенных коэффициентов (на практике часто приходится комбинировать оба метода). Раскроем скобки в правой части последнего равенства и приведем подобные:

$$x^2 - 1 = (A + B)x^2 + (A + C)x + A.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при x^2 и x , в левой и правой частях последнего равенства получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A + C = 0, \end{cases}$$

откуда, учитывая, что $A = -1$, найдем оставшиеся коэффициенты: $B = 2$, $C = 1$. Таким образом,

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} = -\frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

откуда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= [t = x^2 + x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 1) dx] = \\ &= -\ln|x| + \int \frac{dt}{t} = -\ln|x| + \ln|t| + C = \\ &= -\ln|x| + \ln(x^2 + x + 1) + C = \ln\left|\frac{x^2 + x + 1}{x}\right| + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получим окончательный ответ:

$$\int \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x^2 + x + 1}{x}\right| + C. \quad \bullet$$

IV случай. Среди корней знаменателя есть комплексные кратные:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu (x - a)^\alpha \dots (x - d)^\delta.$$

В этом случае разложение дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ будет содержать и простейшие дроби IV типа.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} dx.$$

Решение. Разлагаем дробь на простейшие:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1},$$

откуда

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 &= \\ &= (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2. \end{aligned}$$

Комбинируя указанные выше методы определения коэффициентов, находим

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 1.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)} dx &= \int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx + \int \frac{dx}{x + 1} = \\ &= -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \ln|x + 1| + C. \end{aligned}$$

Из всего изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

- 1) через логарифмы — в случае простейших дробей I типа;
- 2) через рациональные функции — в случае простейших дробей II типа;
- 3) через логарифмы и арктангенсы — в случае простейших дробей III типа;
- 4) через рациональные функции и арктангенсы — в случае простейших дробей IV типа.

Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим те иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

1. Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) dx$, где R — рациональная функция своих аргументов).

Пусть k — общий знаменатель дробей $m/n, \dots, r/s$. Сделаем подстановку $x = t^k$, $dx = kt^{k-1} dt$.

Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t .

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1}.$$

Решение. Общий знаменатель дробей $1/2$, $3/4$ есть 4 ; поэтому делаем подстановку $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$; тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} &= 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C = \\ &= \frac{4}{3} [x^{3/4} - \ln |x^{3/4} + 1|] + C. \end{aligned}$$

II. Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m/n}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r/s} \right] dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

где k — общий знаменатель дробей $m/n, \dots, r/s$.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Решение. Делаем подстановку $x+4=t^2$, $x=t^2-4$, $dx=2t dt$; тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4} \right) dt = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} = \\ &= 2t + 2 \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C. \end{aligned}$$

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

Рассмотрим интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx, \quad (1)$$

где $a \neq 0$.

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции от новой переменной с помощью следующих подстановок Эйлера.

1. *Первая подстановка Эйлера.* Если $a > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{a}x + t.$$

Перед корнем \sqrt{a} возьмем для определенности знак плюс. Тогда

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2,$$

откуда x определяется как рациональная функция от t :

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$$

(значит, dx тоже будет выражаться рационально через t), следовательно,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t = \sqrt{a} \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t,$$

т. е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ оказывается рациональной функцией от t .

Так как $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x и dx выражаются рационально через t , то, следовательно, данный интеграл (1) преобразуется в интеграл от рациональной функции от t .

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}.$$

Решение. Так как здесь $a=1 > 0$, то полагаем $\sqrt{x^2+c} = -x+t$; тогда
 $x^2+c = x^2 - 2xt + t^2$,

откуда

$$x = \frac{t^2 - c}{2t}.$$

Следовательно,

$$dx = \frac{t^2 + c}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2+c} = -x+t = -\frac{t^2-c}{2t} + t = \frac{t^2+c}{2t}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2} dt}{\frac{t^2+c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2+c}| + C_1$$

(см. формулу 14 таблицы интегралов).

Пример . Найти интегралы $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$.

○ Решение: Так как $4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right)$,

то

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}}.$$

Сделаем подстановку $x + \frac{1}{4} = t$, $x = t - \frac{1}{4}$, $dx = dt$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3/16}} = \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} \right| + C. \bullet \end{aligned}$$

Пример . Найти интеграл $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx$

○ Решение: Так как $6 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 6) = -((x + 1)^2 - 7) = 7 - (x + 1)^2$, то подстановка имеет вид $x + 1 = t$, $x = t - 1$, $dx = dt$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}} dt = \int \frac{t dt}{\sqrt{7-t^2}} + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \int (7-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(7-t^2) + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} = \\ &= -\sqrt{7-t^2} + 3 \cdot \arcsin \frac{t}{\sqrt{7}} + C = 3 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} - \sqrt{6-2x-x^2} + C. \quad \bullet \end{aligned}$$

2. *Вторая подстановка Эйлера.* Если $c > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c};$$

тогда (перед \sqrt{c} для определенности берем знак плюс)

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

Отсюда x определяется как рациональная функция от t :

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ тоже выражаются рационально через t , то, подставляя значения x , $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ и dx в интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, мы сведем его к интегралу от рациональной функции от t .

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

Решение. Полагаем $\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1$; тогда

$$1+x+x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1, \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2} dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}; \quad 1 - \sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}.$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx &= \int \frac{(-2t^2+t)^2 (1-t^2)^2 (1-t^2) (2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2 (2t-1)^2 (t^2-t+1) (1-t^2)^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\ &= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}-1}{x - \sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C = \\ &= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln |2x + 2\sqrt{1+x+x^2}+1| + C. \end{aligned}$$

3. *Третья подстановка Эйлера.* Пусть α и β — действительные корни трехчлена $ax^2 + bx + c$. Полагаем

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha) t.$$

Так как $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, то $\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha) t$, $a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 t^2$, $a(x - \beta) = (x - \alpha) t^2$. Отсюда находим x как рациональную функцию от t :

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

Так как dx и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ тоже рационально зависят от t , то данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции от t .

Замечание 1. Третья подстановка Эйлера применима не только при $a < 0$, но и при $a > 0$ — лишь бы многочлен $ax^2 + bx + c$ имел два действительных корня.

Пример. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

Решение. Так как $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, то полагаем

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = (x + 4)t;$$

тогда $(x + 4)(x - 1) = (x + 4)^2 t^2$, $x - 1 = (x + 4)t^2$, $x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2}$, $dx = \frac{10t}{(1 - t^2)^2} dt$,

$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = \left[\frac{1 + 4t^2}{1 - t^2} + 4 \right] t = \frac{5t}{1 - t^2}$. Возвращаясь к исходному интегралу,

получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} &= \int \frac{10t(1 - t^2)}{(1 - t^2)^2 \cdot 5t} dt = \int \frac{2}{1 - t^2} dt = \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x - 1}{x + 4}}}{1 - \sqrt{\frac{x - 1}{x + 4}}} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 1}} \right| + C. \end{aligned}$$

Замечание 2. Заметим, что для приведения интеграла к интегралу от рациональной функции достаточно первой и третьей подстановок Эйлера. Рассмотрим трехчлен $ax^2 + bx + c$. Если $b^2 - 4ac > 0$, то корни трехчлена действительны и, следовательно, применима третья подстановка Эйлера. Если $b^2 - 4ac \leq 0$, то в этом случае

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

и, следовательно, трехчлен имеет знак, совпадающий со знаком a . Чтобы $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ был действительным, нужно, чтобы трехчлен был положительным, а следовательно, должно быть $a > 0$. В этом случае применима первая подстановка.