Базовые задачи по теме «Решение задач в целых числах»

Проблема

На уроках математики не отводится должного внимания решению задач в целых числах, тем не менее, задания такого типа включены в задания ЕГЭ.

Цель

Овладеть системой знаний и умений при решении задач с целыми числами.

Задачи

1) Описать основные базовые задачи в целых числах;

2) На основе базовых задач решать более сложные задачи в целых числах, разлагая их по базовым задачам;

3) Сформулировать алгоритм решения задач КИМ ЕГЭ типа C_6.

Объектом исследования является класс теоретико-числовых задач, решаемых в целых числах, **предметом** исследования – технология базовых задач в целых числах.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

БЗ1. Деление с остатком

БЗ2. Задача определения вида числа: простое или составное

БЗ3. Задача приведения натурального числа к каноническому виду

БЗ4. Задача нахождения НОК, НОД двух и более чисел

БЗ5. 1) Задача нахождения числа делителей произвольного натурального числа (прямая задача)

2) Задача нахождения числа по числу его делителей (обратная задача)

БЗ6. Задача нахождения целых решений линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными

БЗ7. Задача нахождения целых решений квадратных диофантовых уравнений с двумя неизвестными

БЗ8. Задача нахождения целых решений диофантовых уравнений с двумя и более неизвестными различного вида

БЗ9. Задача нахождения сумм различных числовых последовательностей

БЗ10. Задача математического моделирования в виде диофантовых уравнений (неравенств) и их систем

БЗ11. Решение задачи о принадлежности данного числа данному числовому множеству

Рассмотрим пример:

Пример: Существует ли квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, дискриминант которого равен 20092007?

Решение: Допустим, что $D = b^2 - 4ac = 20092007$

Решим полученное уравнение в целых числах.

$$b^2 = 4ac + 20092007 = 4(ac + 5023001) + 3$$

- это число при делении на 4 дает остаток 3. Рассуждая по модулю 4, все числа делятся на 4 класса:

$$:\ 4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3.$$

$$(4k)^2 = 16k^2 \vdots 4 (ост\ 0)$$

$$(4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1 \vdots 4 (ост\ 1).$$

$$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1) \vdots 4 (ост\ 0).$$

$$(4k+3)^2 = 16k^2 + 48k + 9 = 4(4k^2 + 12k + 2) + 1 \vdots 4 (ост\ 1)$$

Квадрат любого числа при делении на 4 имеет остаток 0 или 1, а т.к. число $4ac+20092007$ при делении на 4 имеет остаток 3, то оно не может являться точным квадратом (b^2). Итак, дискриминант трехчлена с целыми коэффициентами не может равняться числу 20092007.

Ответ: нет. (Использовали БЗ1, БЗ8)

Задача С6: Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

Решение: Пусть искомое число N.

Представим его в каноническом виде $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, тогда его количество делителей равно

$$(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1) = 15$$

1) $15 = 15 \cdot 1$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1) = 15 \cdot 1$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1 + 1) = 15$$

$$\alpha_1 = 14$$

Итак, число p^{14} - имеет ровно 15 делителей, где p - простое число. Но не одно из них не может оканчиваться 0.

2)

$$15 = 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$$

$$\downarrow$$

$$(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1) = 5 \cdot 3 \quad \text{и} \quad (\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k + 1) = 3 \cdot 5$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 5 \\ \alpha_2 + 1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3 \\ \alpha_2 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 4 \end{cases}$$

Итак, числа $N = p_1^4 \cdot p_2^2$, $N = p_1^2 \cdot p_2^4$ - имеют ровно 15 делителей, где p -простое число. По условию число N должно оканчиваться 0. $\Rightarrow$ p_1 и p_2 должны равняться 2 и 5.

$2^4 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$ и $2^2 \cdot 5^4 = 4 \cdot 625 = 2500$

Ответ: 400 и 2500. (Использовали Б35 (обратную задачу))

Спасибо за внимание!