Векторная алгебра.

раздел 2

http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-1488/776493_0001.pdf

М. А. Дараган, С. И. Дорофеева

Практикум по векторной алгебре и аналитической геометрии

http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-152/%D0%9C54.pdf

Э. М. Исхаков

Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Лекция №6

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ.
БАЗИС И КООРДИНАТЫ.

Основные определения

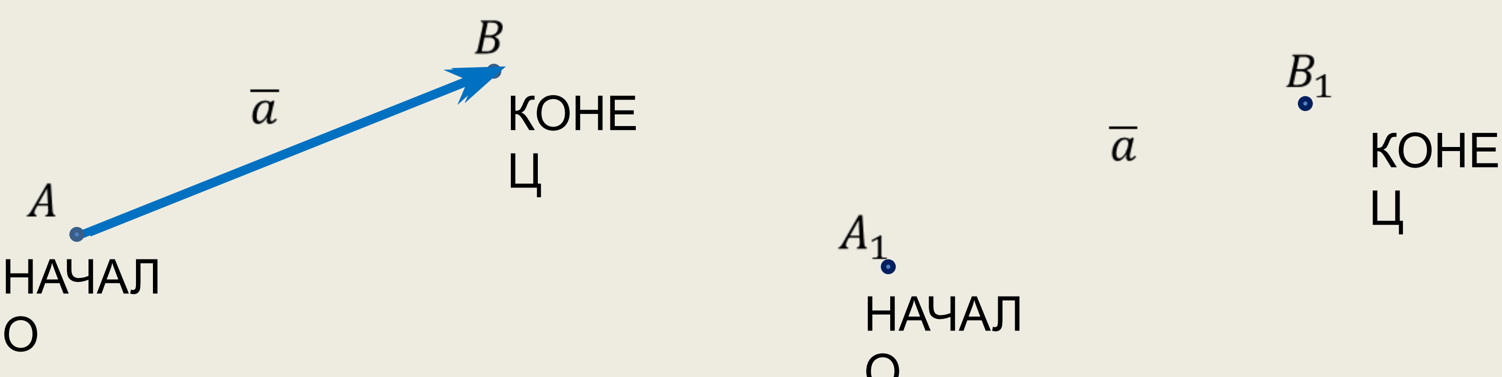
ВЕКТОР - это направленный отрезок : $\overline{AB}$;

точка A называется НАЧАЛОМ, точка B - КОНЦОМ вектора.

Отрезок $\overline{AB}$ можно передвигать параллельно самому себе.

Считается, что два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ одинаковой длины и направления

задают один и тот же вектор $\overline{a}$: $\overline{a} = \overline{AB} = \overline{A_1B_1}$.



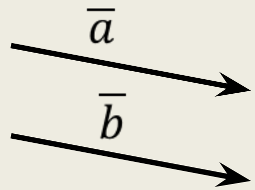
МОДУЛЬ (ДЛИНА) вектора - это число (неотрицательное) , равное длине отрезка $\overline{AB}$:

$$|\overline{a}| = |\overline{AB}|$$

Если точки A и B совпадают, то $\overline{AB} = \overline{AA} = \overline{0}$ считают тоже вектором - НУЛЕВЫМ вектором.

Его длина равна нулю, а направление для него не имеет смысла (не определено)

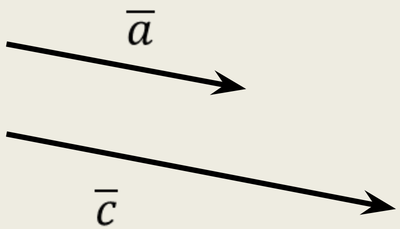
Векторы называются **РАВНЫМИ**, если они одинаково направлены и имеют равные модули: $\overline{a} = \overline{b}$.

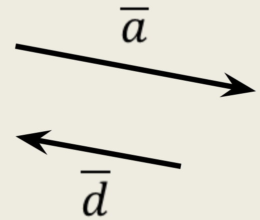


Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **КОЛЛИНЕАРНЫМИ**. Коллинеарность обозначается $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Если направления коллинеарных векторов одинаковы, это обозначается $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c}$;

если направления коллинеарных векторов противоположны: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{d}$





Векторы, параллельные одной плоскости, называются К**ОМПЛАНАРНЫМИ**.

Вектор $\overline{e}$, модуль которого равен ***ЕДИНИЦЕ***, называется ***ЕДИНИЧНЫМ*** ,

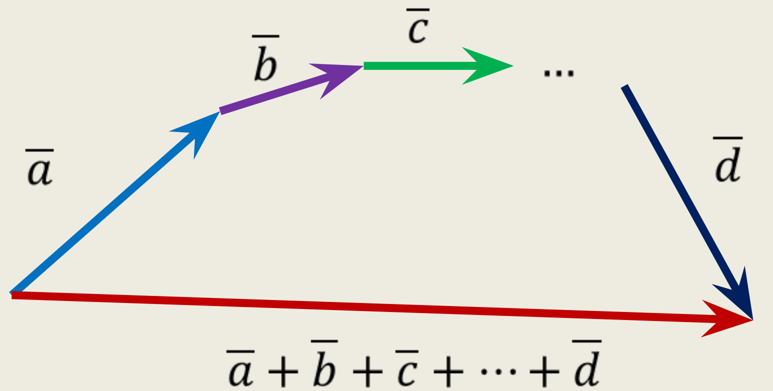
или ***ОРТ- вектором***: $|\overline{e}| = 1$.

Линейные операции над векторами

ЛИНЕЙНЫЕ операции над векторами - это СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ и УМНОЖЕНИЕ вектора НА ЧИСЛО (скаляр).

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, …, $\overline{d}$. Построим из них ЛОМАНУЮ, выбирая конец предыдущего вектора за начало следующего:

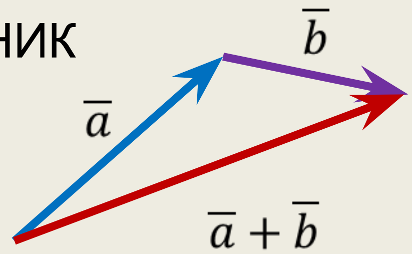


СУММОЙ векторов $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\cdots+\overline{d}$ называется вектор, который ЗАМЫКАЕТ ЛОМАНУЮ, построенную из данных векторов,

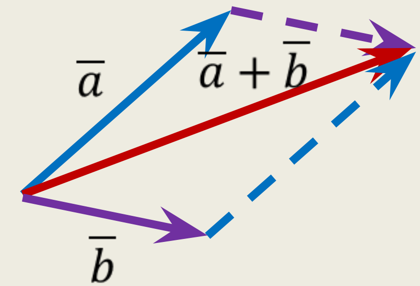
причем начало вектора СУММЫ совпадает с началом первого слагаемого, а конец - с концом последнего слагаемого (ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА).

Для двух векторов правило сложения имеет вид

правила ТРЕУГОЛЬНИКА :



или правила ПАРАЛЛЕЛОГРАММА:

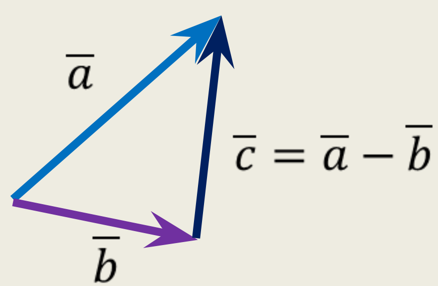


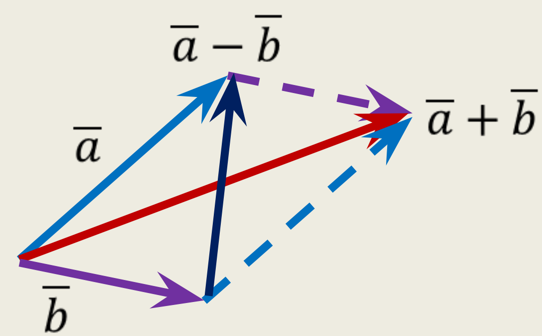
ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

РАЗНОСТЬЮ двух векторов $\overline{a}-\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$,который при сложении с вычитаемым вектором $\overline{b}$ дает уменьшаемый вектор $\overline{a}$:

$$\overline{c}+\overline{b}=\overline{a}$$

Для построения разности $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приводим к общему началу; тогда вектор разности направлен от КОНЦА ВЫЧИТАЕМОГО вектора $\overline{b}$ к КОНЦУ УМЕНЬШАЕМОГО вектора $\overline{a}$.





ЗАМЕЧАНИЕ. Векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ служат ДИАГОНАЛЯМИ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

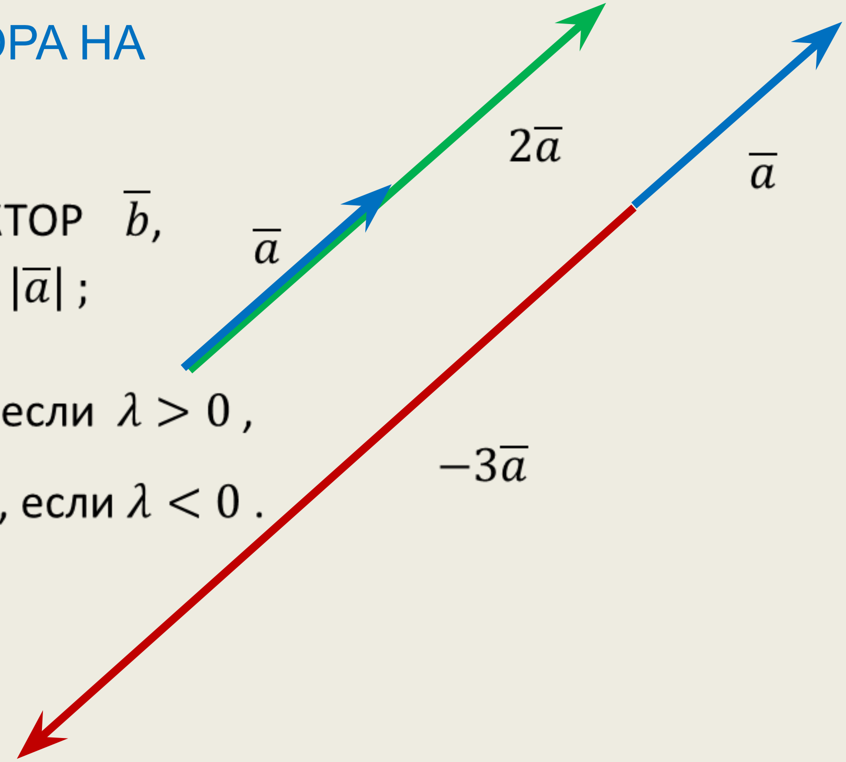
УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Пусть дан вектор $\overline{a}$ и число λ.

ПРОИЗВЕДЕНИЕМ $\overline{a}\cdot\lambda=\lambda\cdot\overline{a}$ называется ВЕКТОР $\overline{b}$,
длина которого $\left|\overline{b}\right|=|\lambda\cdot\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$;

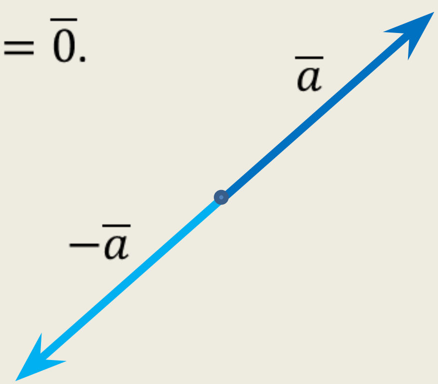
направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda>0$,

и противоположно направлению $\overline{a}$, если $\lambda<0$.



При $\lambda=0$ длина $|\lambda\cdot\overline{a}|=0$ и вектор $\lambda\cdot\overline{a}$ превращается в нулевой вектор (точку),
не имеющий направления.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если вектор $\overline{b}=(-1)\cdot\overline{a}$, то он называется ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ вектору $\overline{a}$ и обозначается $-\overline{a}$; очевидно, что $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$.



Условие коллинеарности двух векторов

ТЕОРЕМА 1.

Ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ КОЛЛИНЕАРНЫ тогда и только тогда, когда существует число λ такое , что

$$\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$$

Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть даны числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$.

Составим из них ЛИНЕЙНУЮ КОМБИНАЦИЮ (сумму произведений чисел и векторов) :

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \cdots + \lambda_n\overline{a}_n$$

(числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются коэффициентами линейной комбинации)

Назовем линейную комбинацию ТРИВИАЛЬНОЙ , если ВСЕ коэффициенты в ней РАВНЫ НУЛЮ :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0 .$$

Назовем линейную комбинацию НЕТРИВИАЛЬНОЙ , ЕСЛИ ХОТЯ БЫ ОДИН из коэффициентов НЕ РАВЕН НУЛЮ : $\lambda_k \neq 0$.

ТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация любых векторов ВСЕГДА РАВНА НУЛЮ.

(ПОЧЕМУ ?)

Если существует НЕТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация , РАВНАЯ НУЛЮ , то вектора называют ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \cdots + \lambda_n\overline{a}_n = 0$$

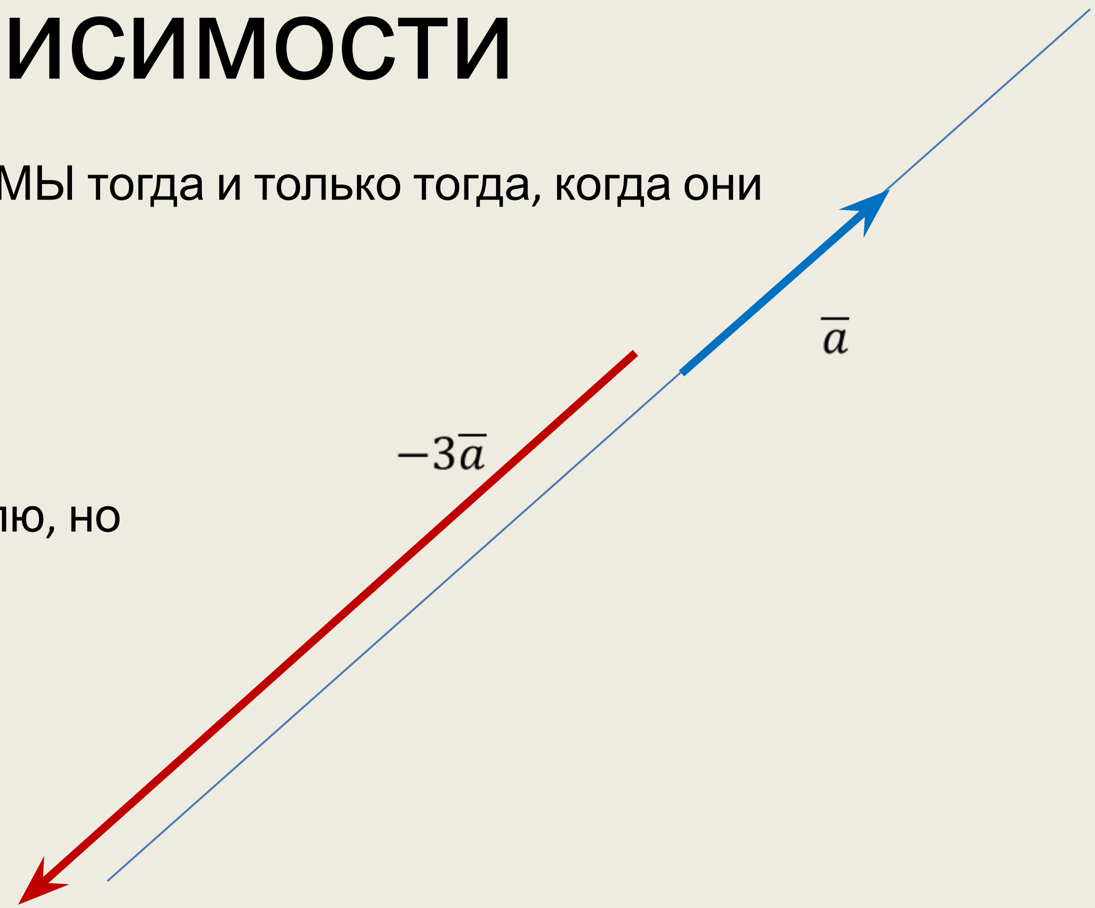
Если ЛЮБАЯ НЕТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация векторов НЕ РАВНА НУЛЮ ,

то вектора называют ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫМИ

Критерий линейной зависимости

ТЕОРЕМА 2.

ДВА вектора ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ тогда и только тогда, когда они КОЛЛИНЕАРНЫ.



Пусть $\overline{b} = -3\overline{a}$; тогда $\overline{b} + 3\overline{a} = 0$;

линейная комбинация равна нулю, но она нетривиальна, так как

$$\lambda_1 = 1 \neq 0, \qquad \lambda_2 = 3 \neq 0.$$

Для трех векторов справедлива

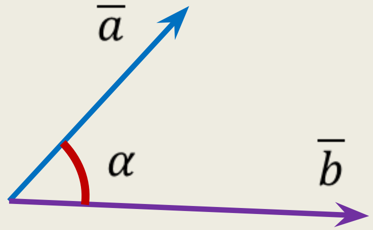
ТЕОРЕМА 3.

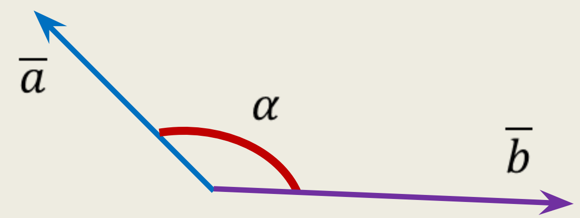
ТРИ вектора ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ тогда и только тогда, когда они КОМПЛАНАРНЫ.

ЗАМЕЧАНИЕ. ЧЕТЫРЕ вектора в пространстве всегда ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ.

Угол между векторами. Ось

УГЛОМ α между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется НАИМЕНЬШИЙ из двух углов между векторами, приведенными к общему началу:

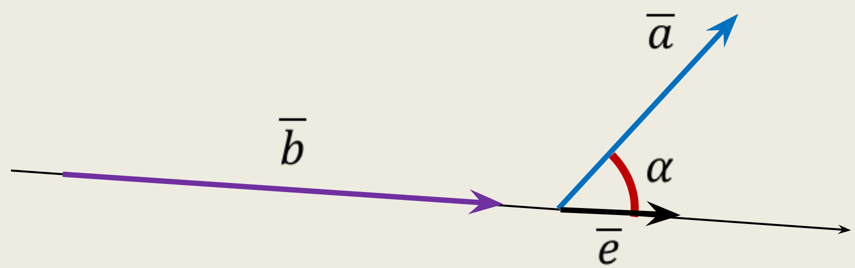




Из определения следует, что $0 \leq \alpha \leq \pi$ (ПОЧЕМУ? ОБЪЯСНИТЕ!)

ОСЬ - это прямая с выбранным положительным направлением.

Направление оси может быть определено с помощью какого-нибудь ненулевого вектора $\overline{b}$ (или орта $\overline{e}$).



УГЛОМ между осью и вектором $\overline{a}$ называется угол $\alpha = (\widehat{\overline{a}, \overline{e}})$.

Проекция вектора на ось

ПРОЕКЦИЕЙ вектора $\overline{a}$ на ось (на направление вектора $\overline{e}$) называется ЧИСЛО

$$\boxed{\text{пр}_{\,\overline{e}}\,\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha}$$

Возможны три случая:

1. Если $\overline{a} = \overline{0}$ или если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то проекция равна нулю:

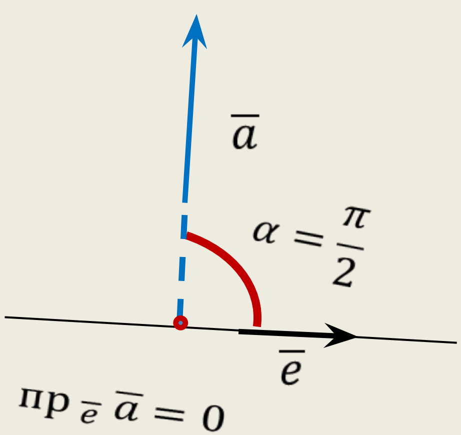
$$\text{пр}_{\,\overline{e}}\,\overline{a} = 0$$

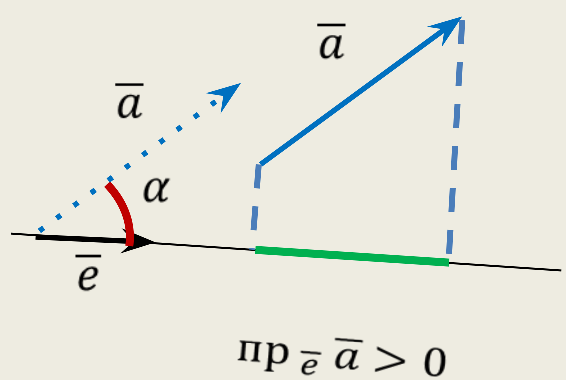
2. Если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то проекция положительна :

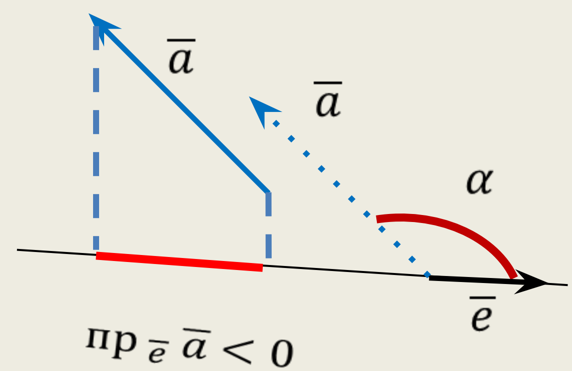
$$\text{пр}_{\,\overline{e}}\,\overline{a} > 0$$

3. Если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, то проекция отрицательна :

$$\text{пр}_{\,\overline{e}}\,\overline{a} < 0$$







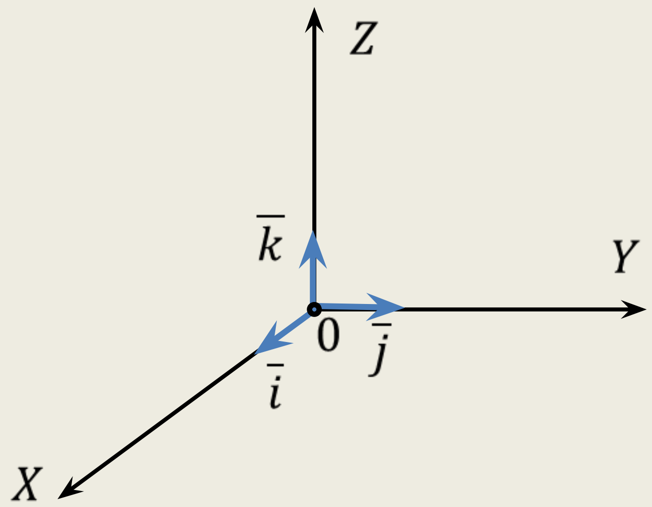
Прямоугольная система координат

Зададим вектора в пространстве с помощью чисел.

Для этого рассмотрим ПРЯМОУГОЛЬНУЮ (Декартову) систему координат (x, y, z) ,то есть

ТРИ взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку 0 - НАЧАЛО КООРДИНАТ.

Выберем единичный отрезок, при помощи которого измеряются все длины.



Обозначим орты осей:

для оси $0X$ (оси абсцисс) $\bar{i}$

для оси $0Y$ (оси ординат) $\bar{j}$

для оси $0Z$ (оси аппликат) $\bar{k}$

Разложение вектора по базису

Отметим любую точку A пространства.

Вектор $\overline{0A} = \overline{a}$, соединяющий начало координат и точку A, называется

РАДИУС-ВЕКТОРОМ точки A.

Проекции вектора $\overline{a}$ на оси $0X$, $0Y$, $0Z$ обозначим x, y, z : это КООРДИНАТЫ вектора $\overline{a}$.

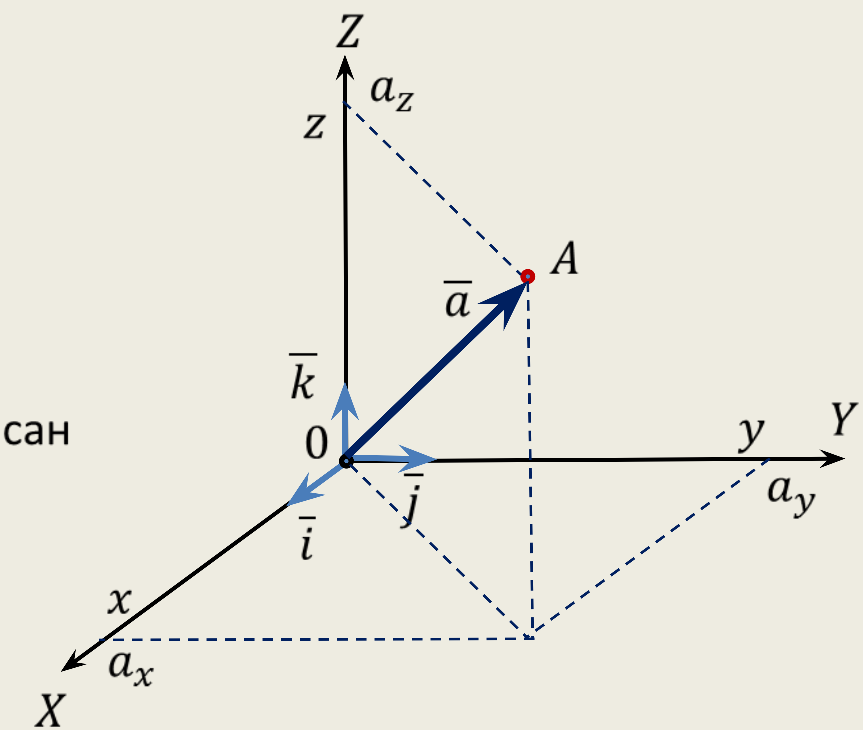
Обозначим это : $\overline{a} = (x, y, z) = \left(a_x, a_y, a_z\right)$.

Очевидно, что координаты ортов равны:

$$\overline{i} = (1,0,0);$$

$$\overline{j} = (0,1,0);$$

$$\overline{k} = (0,0,1);$$



Тогда вектор $\overline{a} = (x, y, z)$ может быть записан

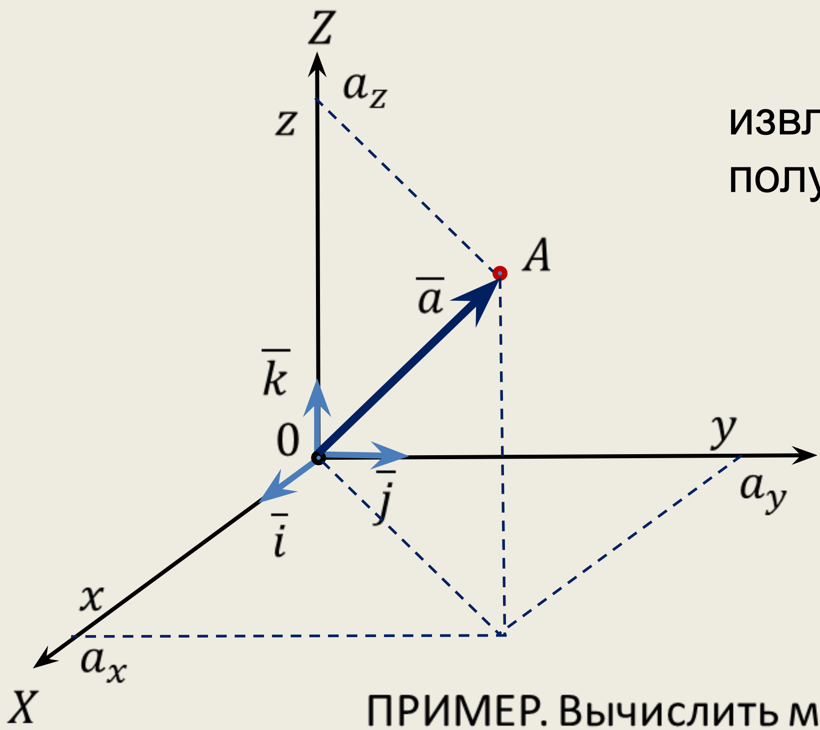
в виде $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k};$

Эта запись называется РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА $\overline{a}$ ПО БАЗИСУ $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Модуль вектора

Зная проекции вектора $\overline{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$, можно найти выражение для модуля вектора.

По теореме о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать :



$$|\overline{a}|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2 \,;$$

извлекая корень из обеих частей равенства, получим :

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

МОДУЛЬ вектора равен КВАДРАТНОМУ КОРНЮ из СУММЫ КВАДРАТОВ его КООРДИНАТ, или проекций на оси.

ПРИМЕР. Вычислить модули векторов $\overline{a} = (3, -1, 2)$ и $\overline{b} = (6, -2, -3)$.

РЕШЕНИ
Е:

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14};$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7;$$

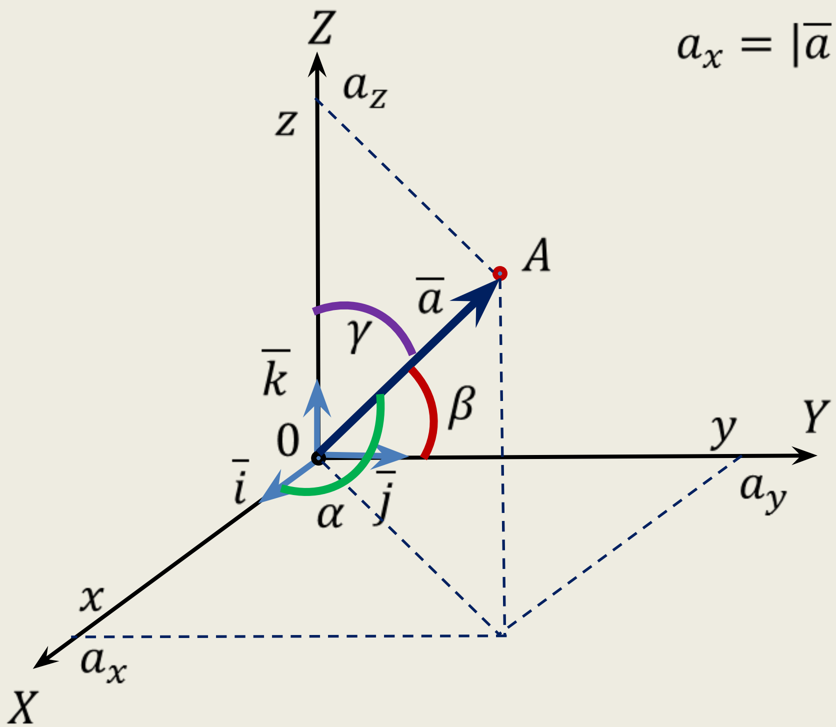
Направляющие косинусы вектора

Пусть вектор $\overline{a} = (x, y, z) = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ составляет углы с осями координат:

с осью $0X$ угол α; с осью $0Y$ угол β; с осью $0Z$ угол γ .

По свойству проекции вектора на ось можно написать :

$$a_x = |\overline{a}| \cos\alpha \,; \;\; a_y = |\overline{a}| \cos\beta \,; \;\; a_z = |\overline{a}| \cos\gamma \,;$$



Выразим косинусы углов α, β, γ:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|};$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются НАПРАВЛЯЮЩИМИ КОСИНУСАМИ вектора $\overline{a}$.

Подставим выражение для проекций вектора в формулу модуля и получим : $|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot (\cos\alpha)^2 + |\bar{a}|^2 \cdot (\cos\beta)^2 + |\bar{a}|^2 \cdot (\cos\gamma)^2$

Сократив на $|\bar{a}| \neq 0$, получим соотношение:

$$1 = (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2$$

СУММА КВАДРАТОВ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ ненулевого вектора РАВНА ЕДИНИЦЕ.

ВОПРОС : найти координаты орта $\bar{e}$ (единичного вектора), образующего с осями координат углы α, β, γ.

ОТВЕТ : $e_x = |\bar{e}| \cos\alpha$ $e_y = |\bar{e}| \cos\beta$ $e_z = |\bar{e}| \cos\gamma$

так как модуль орта равен единице, то

$e_x = \cos\alpha$ $e_y = \cos\beta$ $e_z = \cos\gamma$

$\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$

Линейные операции в координатах

РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Два вектора РАВНЫ , если РАВНЫ их СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КООРДИНАТЫ :

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow (a_x, a_y, a_z) = (b_x, b_y, b_z);$$

СЛОЖЕНИЕ и ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

При СЛОЖЕНИИ векторов их одноименные координаты

СКЛАДЫВАЮТСЯ;

При ВЫЧИТАНИИ векторов их одноименные координаты

ВЫЧИТАЮТСЯ:

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z);$$

$$\overline{a} - \overline{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z);$$

УМНОЖЕНИЕ на ЧИСЛО

При УМНОЖЕНИИ вектора на число КАЖДАЯ КООРДИНАТА УМНОЖАЕТСЯ на это ЧИСЛО :

$$\lambda \cdot \overline{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z)$$

Коллинеарность векторов

Выясним условие коллинеарности векторов, заданных своими координатами.

Пусть $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Так как дано , что $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то по теореме 1

можно найти такое число λ, что $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$.

В координатах это значит:

$$b_x = \lambda \cdot a_x\ ; \quad b_y = \lambda \cdot a_y\ ; \quad b_z = \lambda \cdot a_z\ ;$$

$$\frac{b_x}{a_x} = \lambda\ ; \qquad \frac{b_y}{a_y} = \lambda\ ; \qquad \frac{b_z}{a_z} = \lambda\ ;$$

$$\boxed{\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda}$$

Вывод : ВЕКТОРА КОЛЛИНЕАРНЫ тогда и только тогда, когда их КООРДИНАТЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ.

ПРИМЕР. Проверить коллинеарность векторов $\overline{a} = (3, -2, 1)$ и $\overline{b} = (6, -4, 2)$;

$\overline{a} = (3, -2, 1)$ и $\overline{c} = (9, 6, 3)$;

РЕШЕНИЕ:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{6}{3} = 2; \quad \frac{b_y}{a_y} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad \frac{b_z}{a_z} = \frac{2}{1} = 2; \quad 2 = 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = 2 \cdot \overline{a} \quad \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}\ .$$

$$\frac{c_x}{a_x} = \frac{9}{3} = 3; \quad \frac{c_y}{a_y} = \frac{6}{-2} = -3; \quad 3 \neq -3 \quad \Rightarrow$$

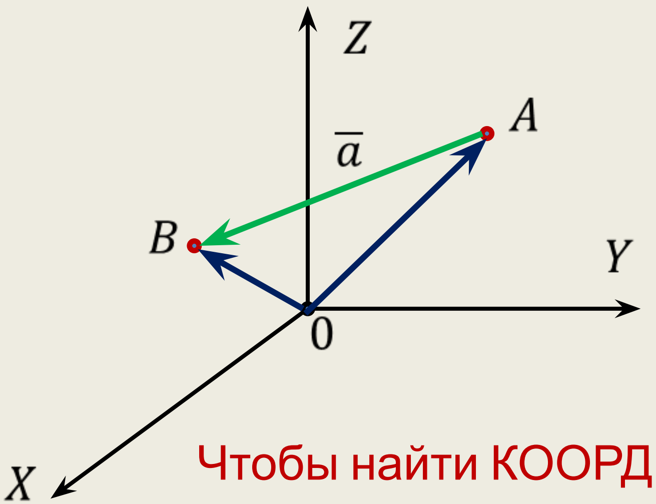
$\overline{a}$ и $\overline{c}$ НЕ КОЛЛИНЕАРНЫ.

ВОПРОС : что можно сказать про направление векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A); \;\; B = (x_B, y_B, z_B);$$



$$\overline{a} = \overline{AB} = \overline{0B} - \overline{0A} =$$

$$= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A);$$

Чтобы найти КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА, надо из КООРДИНАТ точки КОНЦА вектора ВЫЧЕСТЬ соответствующие КООРДИНАТЫ точки НАЧАЛА вектора.

ПРИМЕР:

$$A = (4, -2, -4); B = (6, -3, 2);$$

$$\overline{AB} = \big(6 - 4, -3 - (-2\,), 2 - (-4)\big) = (2, -3 + 2, 2 + 4) = (2, -1, 6).$$

$$C = (-10, 5, -14); D = (6, -8, 0);$$

$$\overline{CD} = \big(6 - (-10), -8 - 5, 0 - (-14)\big) = (6 + 10, -13, 0 + 14) = (16, -13, 14).$$