

Векторная алгебра.

раздел 2

http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-1488/776493_0001.pdf

М. А. Дараган, С. И. Дорофеева

Практикум по векторной алгебре и аналитической геометрии

<http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-152/%D0%9C54.pdf>

Э. М. Исхаков

Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Лекция №6

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. БАЗИС И КООРДИНАТЫ.

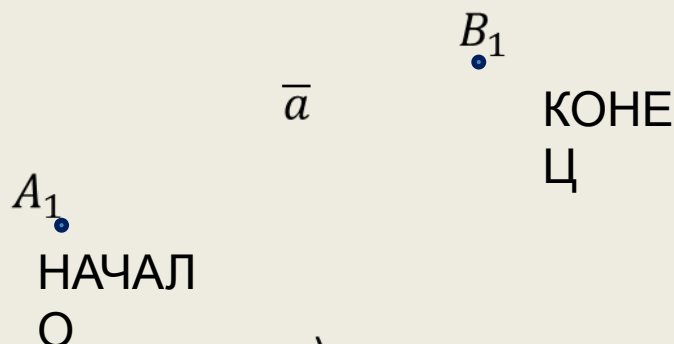
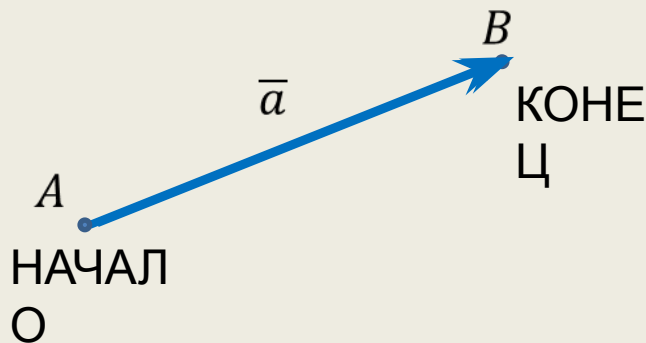
Основные определения

ВЕКТОР - это направленный отрезок : \overline{AB} ;

точка A называется НАЧАЛОМ, точка B - КОНЦОМ вектора.

Отрезок \overline{AB} можно передвигать параллельно самому себе.

Считается, что два направленных отрезка \overline{AB} и $\overline{A_1B_1}$ одинаковой длины и направления задают один и тот же вектор \vec{a} : $\vec{a} = \overline{AB} = \overline{A_1B_1}$.



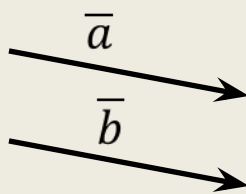
МОДУЛЬ (ДЛИНА) вектора - это число (неотрицательное), равно длине отрезка \overline{AB} :

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|$$

Если точки A и B совпадают, то $\overline{AB} = \overline{AA} = \vec{0}$ считают тоже вектором - НУЛЕВЫМ вектором.

Его длина равна нулю, а направление для него не имеет смысла (не определено)

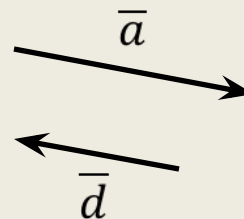
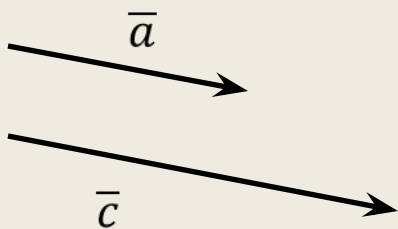
Векторы называются **РАВНЫМИ**, если они одинаково направлены и имеют равные модули: $\vec{a} = \vec{b}$.



Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **КОЛЛИНЕАРНЫМИ**. Коллинеарность обозначается $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Если направления коллинеарных векторов одинаковы, это обозначается $\vec{a} \uparrow \vec{c}$;

если направления коллинеарных векторов противоположны: $\vec{a} \updownarrow \vec{d}$



Векторы, параллельные одной плоскости, называются **КОМПЛАНАРНЫМИ**.

Вектор \vec{e} , модуль которого равен **ЕДИНИЦЕ**, называется **ЕДИНИЧНЫМ**,

или **ОРТ-вектором**: $|\vec{e}| = 1$.

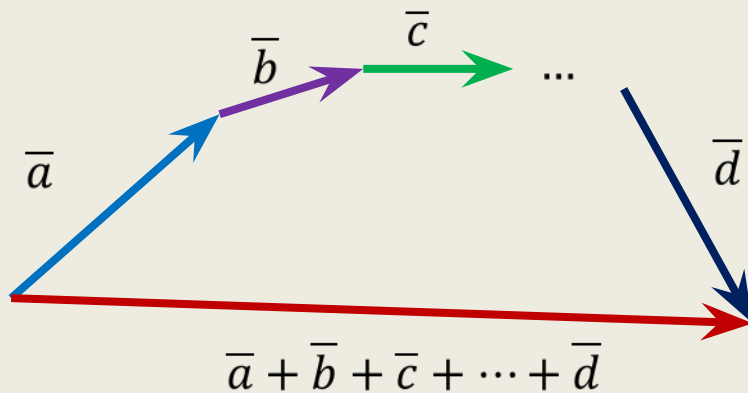
Линейные операции над

векторами

ЛИНЕЙНЫЕ операции над векторами — это СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ и УМНОЖЕНИЕ вектора НА ЧИСЛО (скаляр).

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots, \bar{d}$. Построим из них ЛОМАНУЮ, выбирая конец предыдущего вектора за начало следующего:



СУММОЙ векторов $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \dots + \bar{d}$ называется вектор, который ЗАМЫКАЕТ ЛОМАНУЮ, построенную из данных векторов,

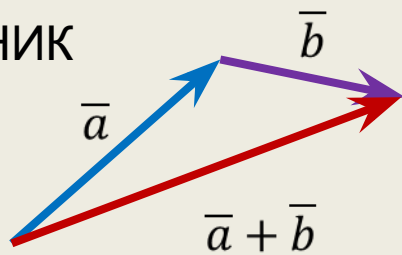
причем начало вектора СУММЫ совпадает с началом первого

слагаемого, а конец - с концом последнего слагаемого (ПРАВИЛО

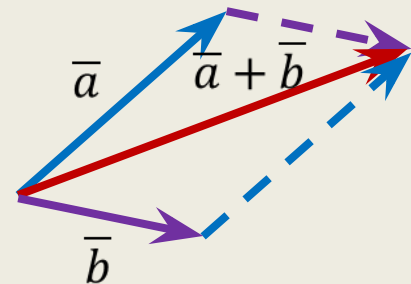
МНОГОУГОЛЬНИКА).

Для двух векторов правило сложения имеет вид

правила
ТРЕУГОЛЬНИК
А:



или правила
ПАРАЛЛЕЛОГРАМ
МА:

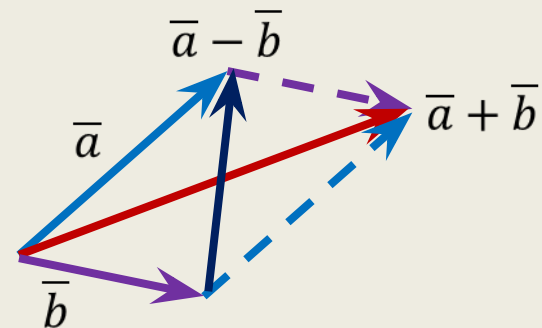
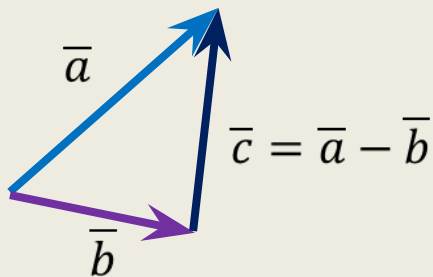


ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

РАЗНОСТЬЮ двух векторов $\bar{a} - \bar{b}$ называется такой вектор \bar{c} , который при сложении с вычитаемым вектором \bar{b} дает уменьшаемый вектор \bar{a} :

$$\bar{c} + \bar{b} = \bar{a}$$

Для построения разности $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ векторы \bar{a} и \bar{b} приводим к общему началу; тогда вектор разности направлен от КОНЦА ВЫЧИТАЕМОГО вектора \bar{b} к КОНЦУ УМЕНЬШАЕМОГО вектора \bar{a} .



ЗАМЕЧАНИЕ. Векторы $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ служат ДИАГОНАЛЯМИ параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} .

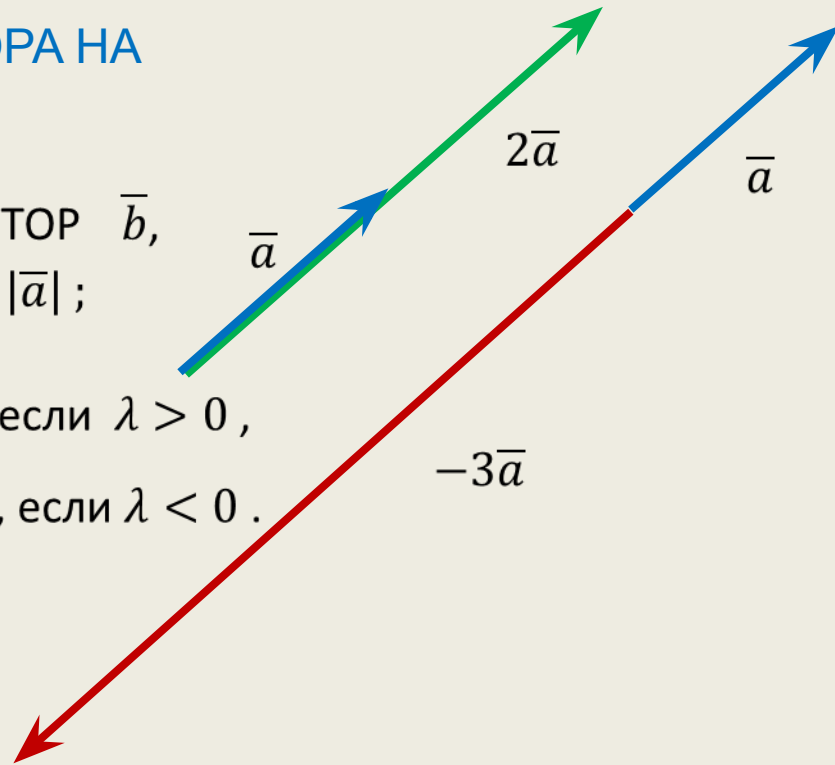
УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Пусть дан вектор \vec{a} и число λ .

ПРОИЗВЕДЕНИЕМ $\vec{a} \cdot \lambda = \lambda \cdot \vec{a}$ называется ВЕКТОР \vec{b} ,
длина которого $|\vec{b}| = |\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

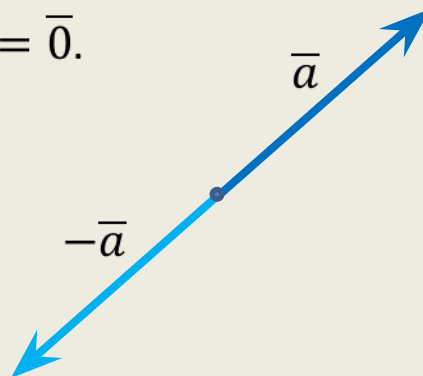
направление совпадает с направлением \vec{a} , если $\lambda > 0$,

и противоположно направлению \vec{a} , если $\lambda < 0$.



При $\lambda = 0$ длина $|\lambda \cdot \vec{a}| = 0$ и вектор $\lambda \cdot \vec{a}$ превращается в нулевой вектор (точку),
не имеющий направления.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если вектор $\vec{b} = (-1) \cdot \vec{a}$, то он называется ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ вектору \vec{a}
и обозначается $-\vec{a}$; очевидно, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.



Условие коллинеарности двух векторов

ТЕОРЕМА 1.

Ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} КОЛЛИНЕАРНЫ

тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$$



Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть даны числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Составим из них ЛИНЕЙНУЮ КОМБИНАЦИЮ (сумму произведений чисел и векторов) :

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$$

(числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются коэффициентами линейной комбинации)

Назовем линейную комбинацию ТРИВИАЛЬНОЙ, если ВСЕ коэффициенты в ней РАВНЫ НУЛЮ :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

Назовем линейную комбинацию НЕТРИВИАЛЬНОЙ, ЕСЛИ ХОТЯ БЫ ОДИН из коэффициентов НЕ РАВЕН НУЛЮ : $\lambda_k \neq 0$.

ТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация любых векторов ВСЕГДА РАВНА НУЛЮ. (ПОЧЕМУ ?)

Если существует НЕТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация, РАВНАЯ НУЛЮ, то вектора называют ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$$

Если ЛЮБАЯ НЕТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация векторов НЕ РАВНА НУЛЮ,

то вектора называют ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫМИ

Критерий линейной зависимости

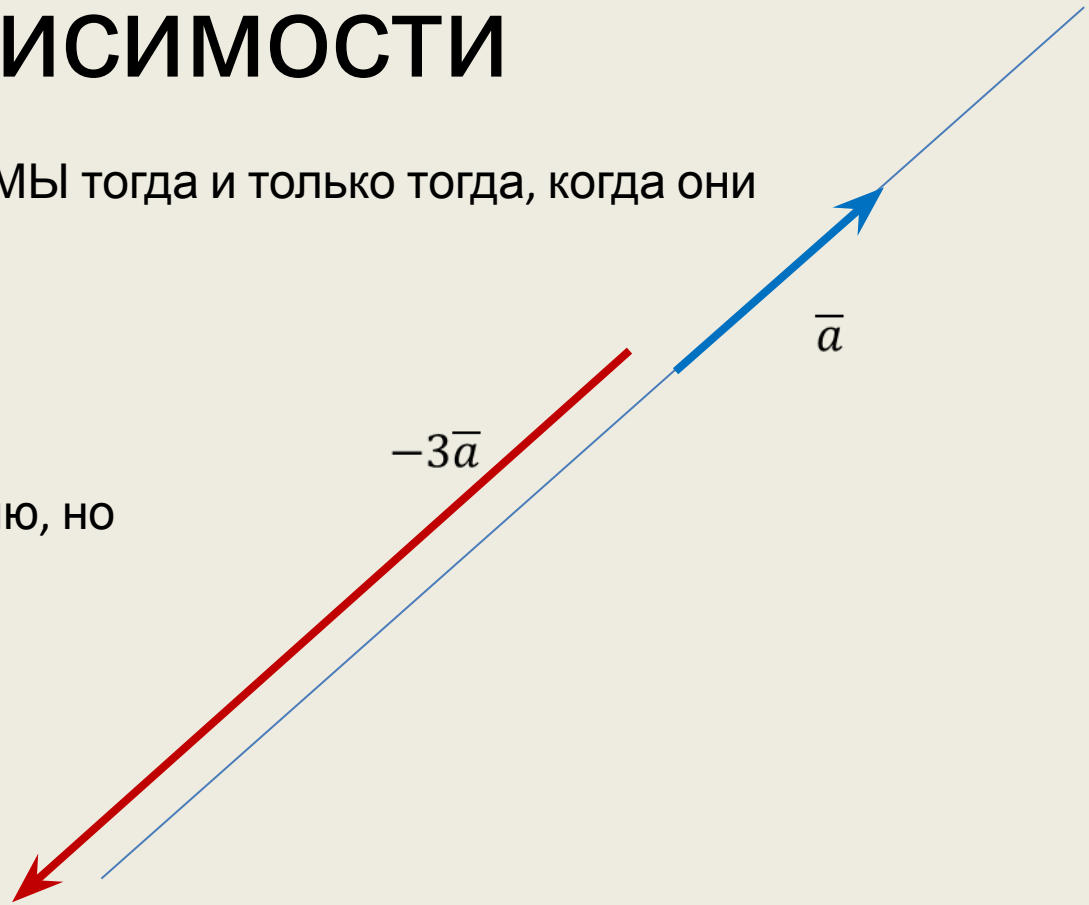
ТЕОРЕМА

ДВА вектора ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ тогда и только тогда, когда они КОЛЛИНЕАРНЫ.

Пусть $\bar{b} = -3\bar{a}$; тогда $\bar{b} + 3\bar{a} = 0$;

линейная комбинация равна нулю, но она нетривиальна, так как

$$\lambda_1 = 1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 3 \neq 0.$$



Для трех векторов справедлива

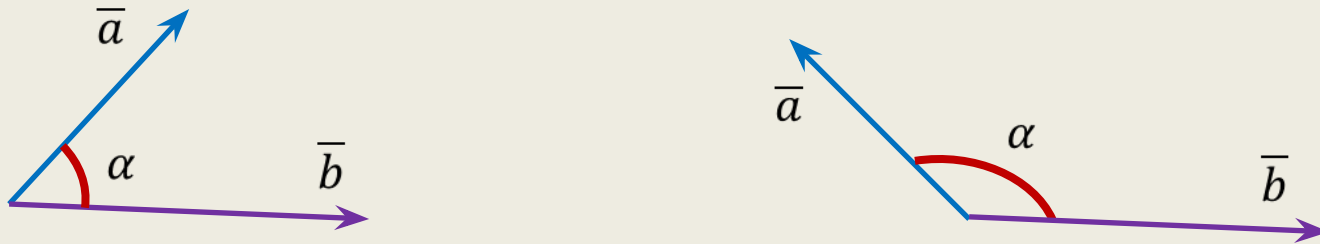
ТЕОРЕМА

ТРИ вектора ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ тогда и только тогда, когда они КОМПЛАНАРНЫ.

ЗАМЕЧАНИЕ ЧЕТЫРЕ вектора в пространстве всегда ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ.

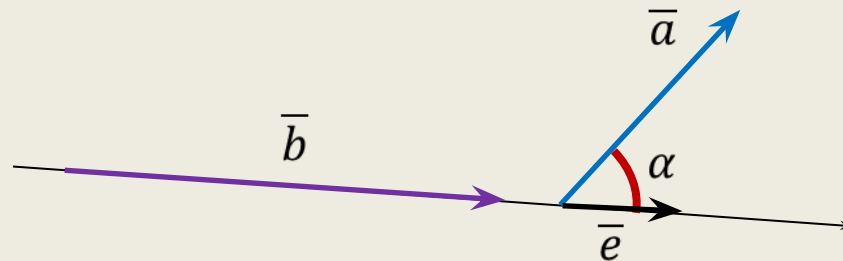
Угол между векторами. Ось

УГЛОМ α между векторами \bar{a} и \bar{b} называется НАИМЕНЬШИЙ из двух углов между векторами, приведенными к общему началу:



Из определения следует, что $0 \leq \alpha \leq \pi$ (ПОЧЕМУ? ОБЪЯСНИТЕ!)

ОСЬ - это прямая с выбранным положительным направлением.
Направление оси может быть определено с помощью какого-нибудь ненулевого вектора \bar{b} (или орта \bar{e}).



УГЛОМ между осью и вектором \bar{a} называется угол $\alpha = \widehat{(\bar{a}, \bar{e})}$.

Проекция вектора на

ПРОЕКЦИЕЙ вектора \vec{a} на ось (на направление вектора \vec{e}) называется ЧИСЛО

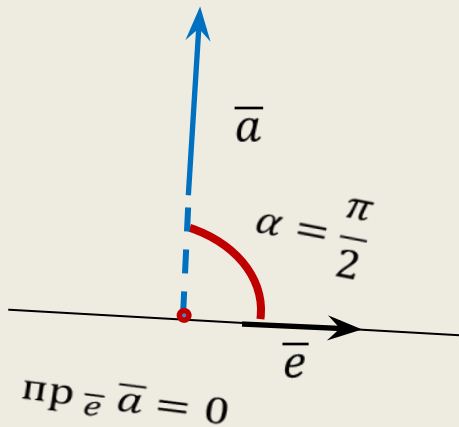
ОСЬ

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha$$

Возможны три случая:

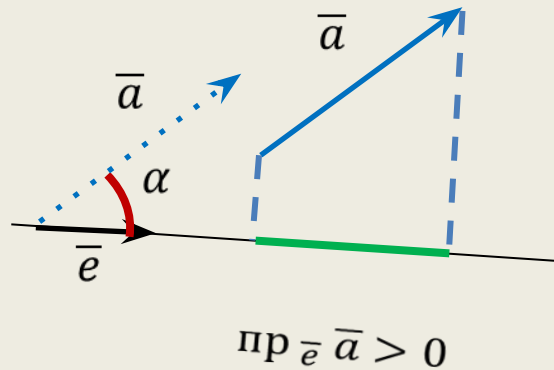
1. Если $\vec{a} = \vec{0}$ или если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то проекция равна нулю:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = 0$$



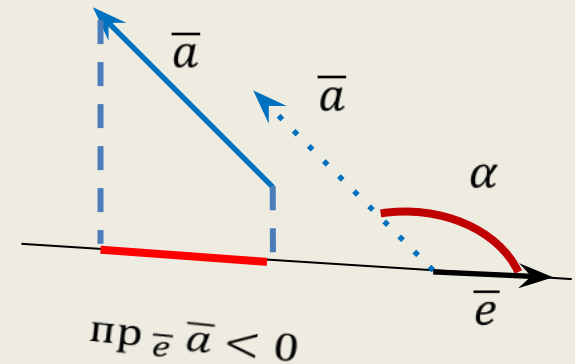
2. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то проекция положительна:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} > 0$$



3. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, то проекция отрицательна:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} < 0$$



I Прямоугольная система

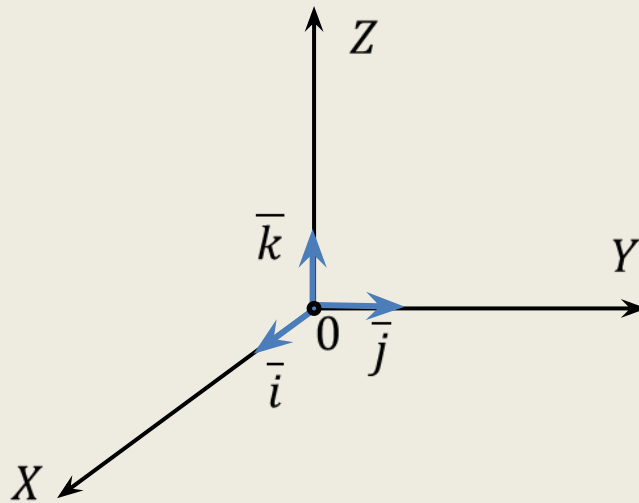
координат

Зададим вектора в пространстве с помощью чисел.

Для этого рассмотрим ПРЯМОУГОЛЬНУЮ (Декартову) систему координат (x, y, z) , то есть

ТРИ взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку O - НАЧАЛО КООРДИНАТ.

Выберем единичный отрезок, при помощи которого измеряются все длины.



Обозначим орты осей:

для оси OX (оси абсцисс) \vec{i}

для оси OY (оси ординат) \vec{j}

для оси OZ (оси аппликат) \vec{k}

Разложение вектора по

базису

Отметим любую точку A пространства.

Вектор $\overline{0A} = \bar{a}$, соединяющий начало координат и точку A , называется

РАДИУС-ВЕКТОРОМ точки A .

Проекции вектора \bar{a} на оси OX , OY , OZ обозначим x, y, z : это **КООРДИНАТЫ** вектора \bar{a} .

Обозначим это: $\bar{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$.

Очевидно, что координаты ортов
равны:

$$\bar{i} = (1, 0, 0);$$

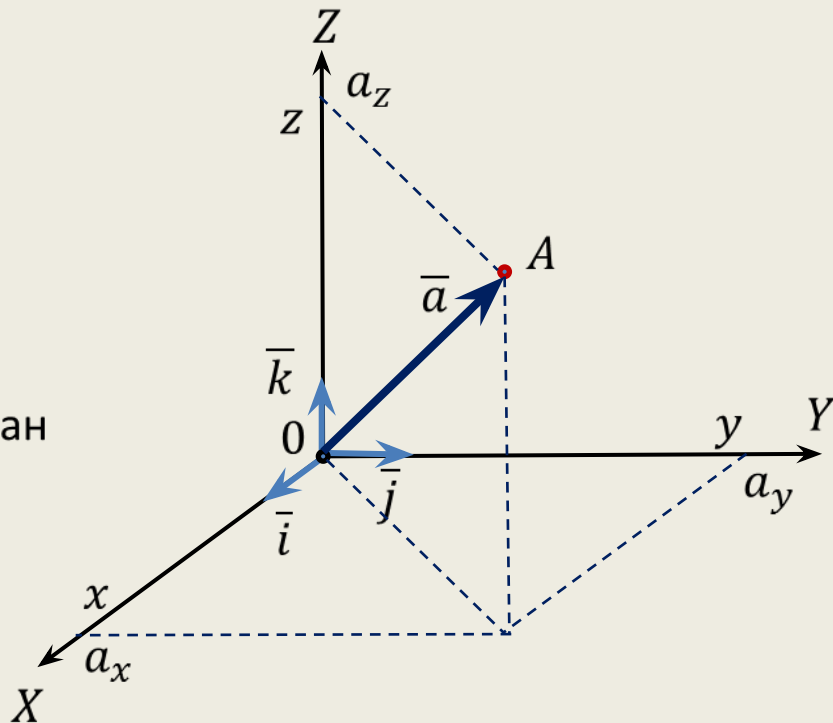
$$\bar{j} = (0, 1, 0);$$

$$\bar{k} = (0, 0, 1);$$

Тогда вектор $\bar{a} = (x, y, z)$ может быть записан

в виде $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$;

Эта запись называется **РАЗЛОЖЕНИЕ**
ВЕКТОРА \bar{a} ПО БАЗИСУ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.



Модуль вектора

Зная проекции вектора $\vec{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$, можно найти выражение для модуля вектора.

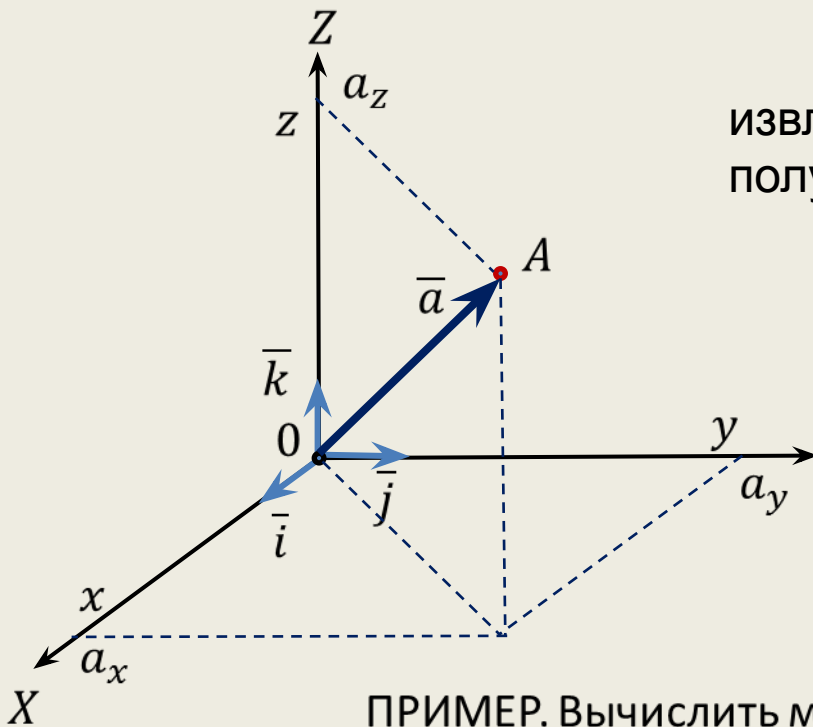
По теореме о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать :

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 ;$$

извлекая корень из обеих частей равенства, получим :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

МОДУЛЬ вектора равен КВАДРАТНОМУ КОРНЮ из СУММЫ КВАДРАТОВ его КООРДИНАТ, или проекций на оси.



ПРИМЕР. Вычислить модули векторов $\vec{a} = (3, -1, 2)$ и $\vec{b} = (6, -2, -3)$.

РЕШЕНИЕ:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7;$$

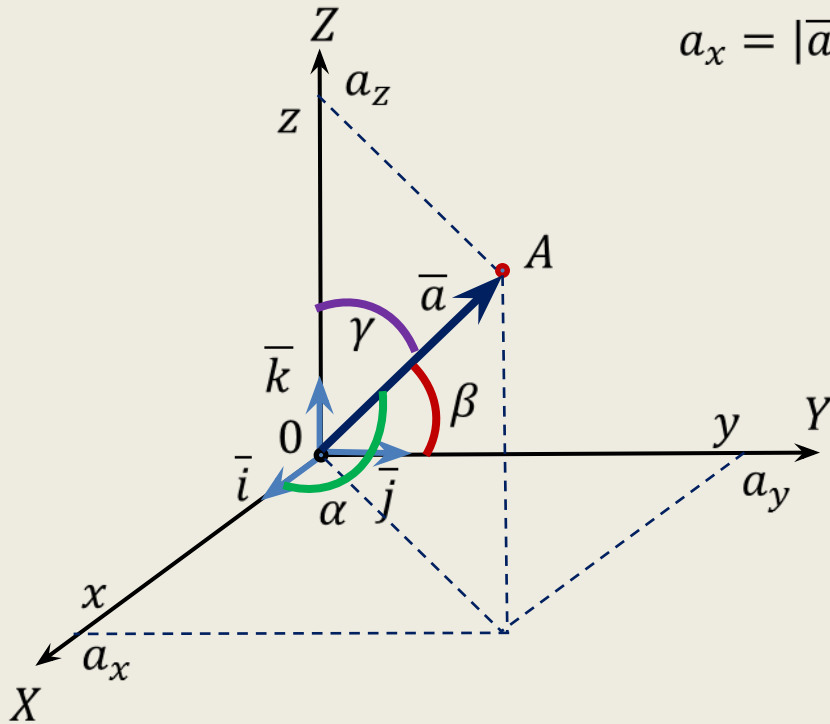
Направляющие косинусы вектора

Пусть вектор $\vec{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$ составляет углы с осями координат:
с осью OX угол α ; с осью OY угол β ; с осью OZ угол γ .

По свойству проекции вектора на ось можно написать:

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha; \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta; \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma;$$

Выразим косинусы углов α, β, γ :



$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|};$$

Числа $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются **НАПРАВЛЯЮЩИМИ КОСИНУСАМИ** вектора \vec{a} .

Подставим выражение для проекций вектора в формулу модуля и получим :

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2 + |\bar{a}|^2 \cdot (\cos \beta)^2 + |\bar{a}|^2 \cdot (\cos \gamma)^2$$

Сократив на $|\bar{a}| \neq 0$, получим соотношение:

$$1 = (\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2$$

СУММА КВАДРАТОВ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ ненулевого вектора РАВНА ЕДИНИЦЕ.

ВОПРОС : найти координаты орта \bar{e} (единичного вектора), образующего с осями координат углы α , β , γ .

ОТВЕ Т :

$$e_x = |\bar{e}| \cos \alpha \quad e_y = |\bar{e}| \cos \beta \quad e_z = |\bar{e}| \cos \gamma$$

так как модуль орта равен единице,

то

$$e_x = \cos \alpha \quad e_y = \cos \beta \quad e_z = \cos \gamma$$

$$\bar{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$$

Линейные операции в координатах

РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Два вектора РАВНЫ, если РАВНЫ их СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КООРДИНАТЫ:

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow (a_x, a_y, a_z) = (b_x, b_y, b_z);$$

СЛОЖЕНИЕ и ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

При СЛОЖЕНИИ векторов их одноименные координаты
СКЛАДЫВАЮТСЯ;

При ВЫЧИТАНИИ векторов их одноименные координаты
ВЫЧИТАЮТСЯ:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z);$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z);$$

УМНОЖЕНИЕ на ЧИСЛО

При УМНОЖЕНИИ вектора на число КАЖДАЯ КООРДИНАТА УМНОЖАЕТСЯ
на это ЧИСЛО:

$$\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z)$$

Коллинеарность векторов

Выясним условие коллинеарности векторов, заданных своими координатами.

Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Так как дано, что $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то по теореме 1

можно найти такое число λ , что $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

В координатах это

значит: $b_x = \lambda \cdot a_x$; $b_y = \lambda \cdot a_y$; $b_z = \lambda \cdot a_z$;

$$\frac{b_x}{a_x} = \lambda; \quad \frac{b_y}{a_y} = \lambda; \quad \frac{b_z}{a_z} = \lambda;$$

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$$

Вывод: **ВЕКТОРА КОЛЛИНЕАРНЫ** тогда и только тогда, когда их **КООРДИНАТЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ**.

ПРИМЕР. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a} = (3, -2, 1)$ и $\vec{b} = (6, -4, 2)$;

РЕШЕНИ

$$\vec{a} = (3, -2, 1) \text{ и } \vec{c} = (9, 6, 3);$$

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{6}{3} = 2; \quad \frac{b_y}{a_y} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad \frac{b_z}{a_z} = \frac{2}{1} = 2; \quad 2 = 2 = 2 \Rightarrow \vec{b} = 2 \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

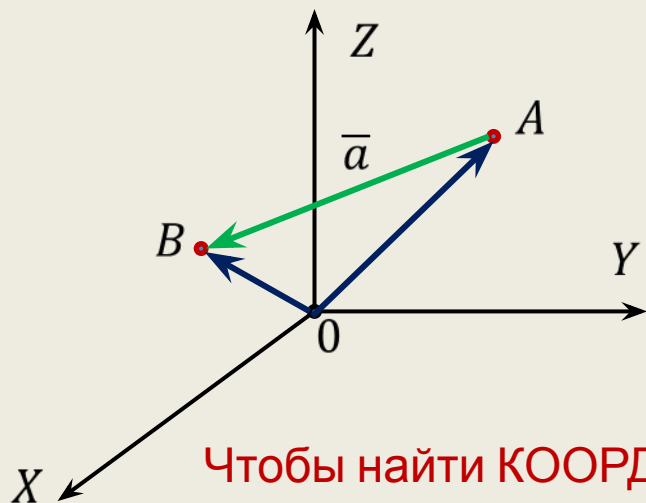
$$\frac{c_x}{a_x} = \frac{9}{3} = 3; \quad \frac{c_y}{a_y} = \frac{6}{-2} = -3; \quad 3 \neq -3 \Rightarrow \vec{a} \text{ и } \vec{c} \text{ НЕ КОЛЛИНЕАРНЫ.}$$

ВОПРОС: что можно сказать про направление векторов \vec{a} и \vec{b} ?

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\vec{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A); B = (x_B, y_B, z_B);$$



$$\begin{aligned}\vec{a} = \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = \\ &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A);\end{aligned}$$

Чтобы найти **КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА**, надо из **КООРДИНАТ** точки **КОНЦА** вектора **ВЫЧЕСТЬ** соответствующие **КООРДИНАТЫ** точки **НАЧАЛА** вектора.

ПРИМЕ $A = (4, -2, -4); B = (6, -3, 2);$

Р: $\overline{AB} = (6 - 4, -3 - (-2), 2 - (-4)) = (2, -3 + 2, 2 + 4) = (2, -1, 6).$

$$C = (-10, 5, -14); D = (6, -8, 0);$$

$$\overline{CD} = (6 - (-10), -8 - 5, 0 - (-14)) = (6 + 10, -13, 0 + 14) = (16, -13, 14).$$