

# ***Векторная алгебра.***

раздел 2

[http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-1488/776493\\_0001.pdf](http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-1488/776493_0001.pdf)

М. А. Дараган, С. И. Дорофеева

Практикум по векторной алгебре и аналитической геометрии

<http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-152/%D0%9C54.pdf>

Э. М. Исхаков

Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Лекция №6

# **ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. БАЗИС И КООРДИНАТЫ.**

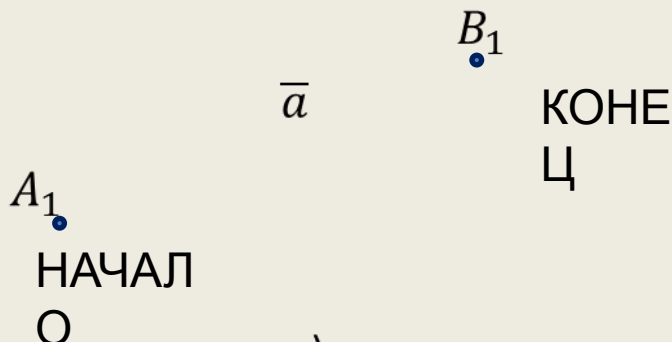
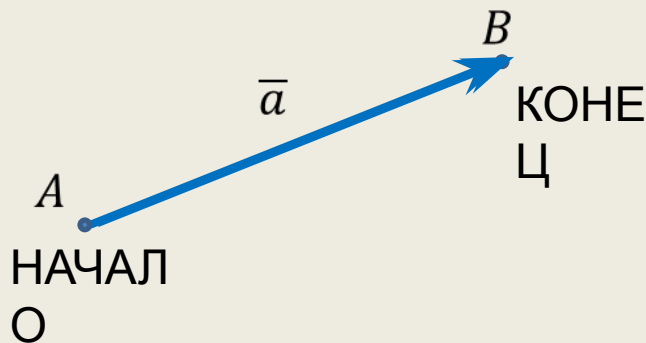
# Основные определения

ВЕКТОР - это направленный отрезок :  $\overline{AB}$ ;

точка  $A$  называется НАЧАЛОМ, точка  $B$  - КОНЦОМ вектора.

Отрезок  $\overline{AB}$  можно передвигать параллельно самому себе.

Считается, что два направленных отрезка  $\overline{AB}$  и  $\overline{A_1B_1}$  одинаковой длины и направления задают один и тот же вектор  $\vec{a}$ :  $\vec{a} = \overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ .



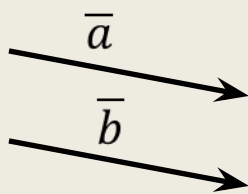
МОДУЛЬ (ДЛИНА) вектора - это число (неотрицательное), равное длине отрезка  $\overline{AB}$ :

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|$$

Если точки  $A$  и  $B$  совпадают, то  $\overline{AB} = \overline{AA} = \vec{0}$  считают тоже вектором - НУЛЕВЫМ вектором.

Его длина равна нулю, а направление для него не имеет смысла (не определено)

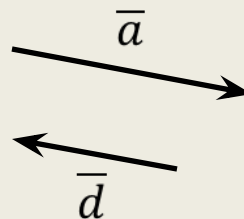
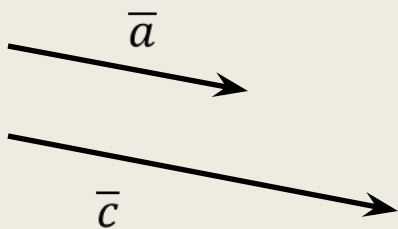
Векторы называются **РАВНЫМИ**, если они одинаково направлены и имеют равные модули:  $\vec{a} = \vec{b}$ .



Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **КОЛЛИНЕАРНЫМИ**. Коллинеарность обозначается  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

Если направления коллинеарных векторов одинаковы, это обозначается  $\vec{a} \uparrow \vec{c}$ ;

если направления коллинеарных векторов противоположны:  $\vec{a} \updownarrow \vec{d}$



Векторы, параллельные одной плоскости, называются **КОМПЛАНАРНЫМИ**.

Вектор  $\vec{e}$ , модуль которого равен **ЕДИНИЦЕ**, называется **ЕДИНИЧНЫМ**,

или **ОРТ-вектором**:  $|\vec{e}| = 1$ .

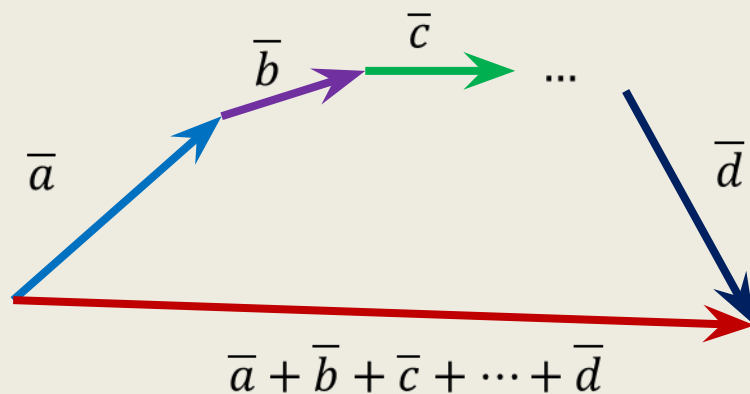
# Линейные операции над

## векторами

ЛИНЕЙНЫЕ операции над векторами — это СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ и УМНОЖЕНИЕ вектора НА ЧИСЛО (скаляр).

### СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть даны векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots, \bar{d}$ . Построим из них ЛОМАНУЮ, выбирая конец предыдущего вектора за начало следующего:

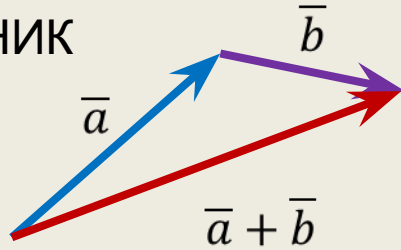


СУММОЙ векторов  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \dots + \bar{d}$  называется вектор, который ЗАМЫКАЕТ ЛОМАНУЮ, построенную из данных векторов,

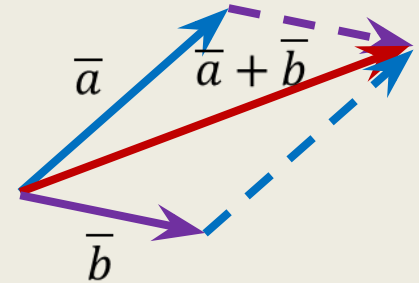
причем начало вектора СУММЫ совпадает с началом первого слагаемого, а конец - с концом последнего слагаемого (ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА).

Для двух векторов правило сложения имеет вид

правила  
ТРЕУГОЛЬНИК  
А:



или правила  
ПАРАЛЛЕЛОГРАМ  
МА:

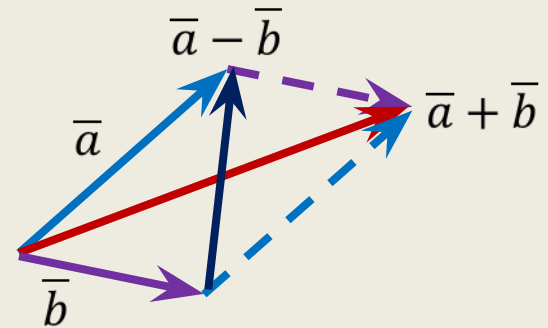
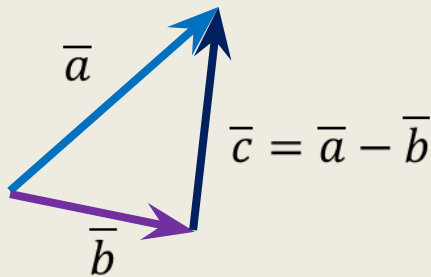


## ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

РАЗНОСТЬЮ двух векторов  $\bar{a} - \bar{b}$  называется такой вектор  $\bar{c}$ , который при сложении с вычитаемым вектором  $\bar{b}$  дает уменьшаемый вектор  $\bar{a}$ :

$$\bar{c} + \bar{b} = \bar{a}$$

Для построения разности  $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$  векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  приводим к общему началу; тогда вектор разности направлен от КОНЦА ВЫЧИТАЕМОГО вектора  $\bar{b}$  к КОНЦУ УМЕНЬШАЕМОГО вектора  $\bar{a}$ .



**ЗАМЕЧАНИЕ.** Векторы  $\bar{a} + \bar{b}$  и  $\bar{a} - \bar{b}$  служат ДИАГОНАЛЯМИ параллелограмма, построенного на векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

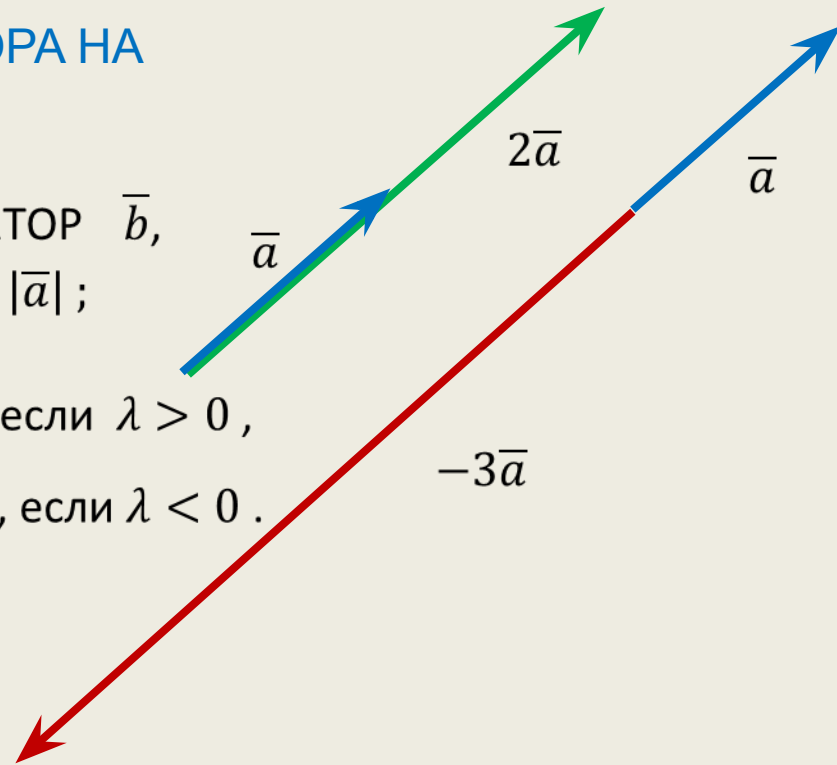
## УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Пусть дан вектор  $\vec{a}$  и число  $\lambda$ .

ПРОИЗВЕДЕНИЕМ  $\vec{a} \cdot \lambda = \lambda \cdot \vec{a}$  называется ВЕКТОР  $\vec{b}$ ,  
длина которого  $|\vec{b}| = |\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ;

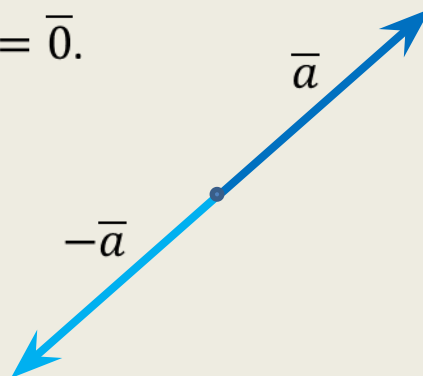
направление совпадает с направлением  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ ,

и противоположно направлению  $\vec{a}$ , если  $\lambda < 0$ .



При  $\lambda = 0$  длина  $|\lambda \cdot \vec{a}| = 0$  и вектор  $\lambda \cdot \vec{a}$  превращается в нулевой вектор ( точку ),  
не имеющий направления.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если вектор  $\vec{b} = (-1) \cdot \vec{a}$ , то он называется ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ вектору  $\vec{a}$   
и обозначается  $-\vec{a}$ ; очевидно, что  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .





# Условие коллинеарности двух векторов

## ТЕОРЕМА 1.

Ненулевые векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  КОЛЛИНЕАРНЫ

тогда и только тогда, когда существует число  $\lambda$  такое, что

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$$



# Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть даны числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и вектора  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ .

Составим из них ЛИНЕЙНУЮ КОМБИНАЦИЮ (сумму произведений чисел и векторов) :

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$$

( числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  называются коэффициентами линейной комбинации )

Назовем линейную комбинацию ТРИВИАЛЬНОЙ, если ВСЕ коэффициенты в ней РАВНЫ НУЛЮ :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

Назовем линейную комбинацию НЕТРИВИАЛЬНОЙ, ЕСЛИ ХОТЯ БЫ ОДИН из коэффициентов НЕ РАВЕН НУЛЮ :  $\lambda_k \neq 0$ .

ТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация любых векторов ВСЕГДА РАВНА НУЛЮ. ( ПОЧЕМУ ? )

Если существует НЕТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация, РАВНАЯ НУЛЮ, то вектора называют ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$$

Если ЛЮБАЯ НЕТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация векторов НЕ РАВНА НУЛЮ,

то вектора называют ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫМИ

# Критерий линейной зависимости

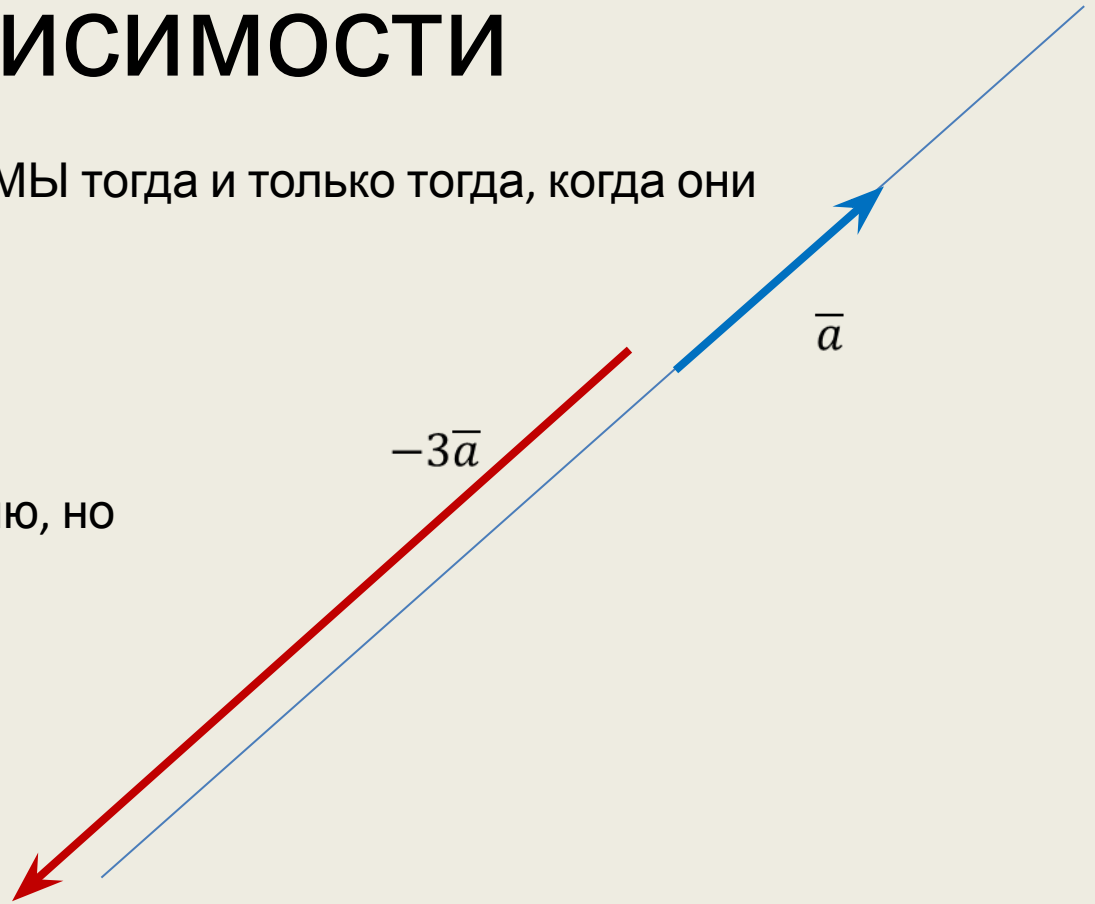
## ТЕОРЕМА

ДВА вектора ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ тогда и только тогда, когда они КОЛЛИНЕАРНЫ.

Пусть  $\bar{b} = -3\bar{a}$ ; тогда  $\bar{b} + 3\bar{a} = 0$ ;

линейная комбинация равна нулю, но она нетривиальна, так как

$$\lambda_1 = 1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 3 \neq 0.$$



Для трех векторов справедлива

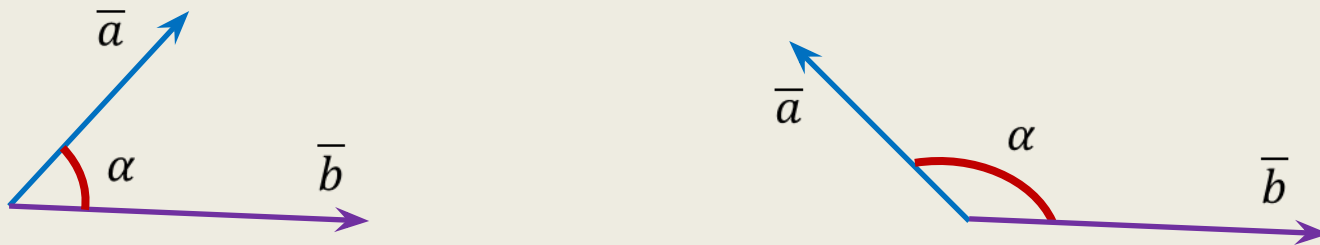
## ТЕОРЕМА

ТРИ вектора ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ тогда и только тогда, когда они КОМПЛАНАРНЫ.

ЗАМЕЧАНИЕ ЧЕТЫРЕ вектора в пространстве всегда ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ.

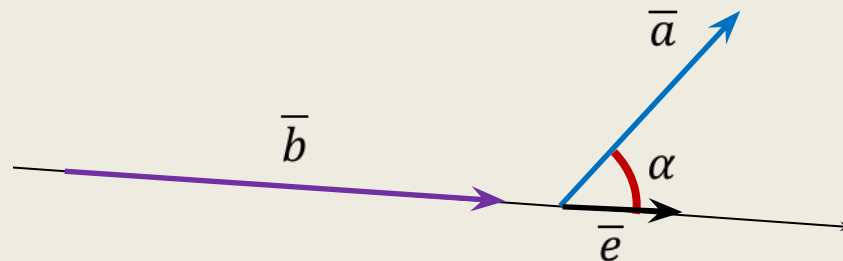
# Угол между векторами. Ось

УГЛОМ  $\alpha$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется НАИМЕНЬШИЙ из двух углов между векторами, приведенными к общему началу:



Из определения следует, что  $0 \leq \alpha \leq \pi$  (ПОЧЕМУ?  
ОБЪЯСНИТЕ!)

ОСЬ - это прямая с выбранным положительным направлением.  
Направление оси может быть определено с помощью какого-нибудь ненулевого вектора  $\vec{b}$  (или орта  $\vec{e}$  ).



УГЛОМ между осью и вектором  $\vec{a}$  называется угол  $\alpha = (\vec{a}, \vec{e})$ .

# Проекция вектора на

ПРОЕКЦИЕЙ вектора  $\vec{a}$  на ось ( на направление вектора  $\vec{e}$  ) называется ЧИСЛО

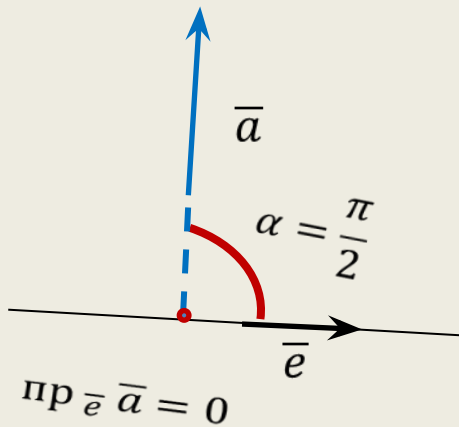
ОСЬ

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha$$

Возможны три случая:

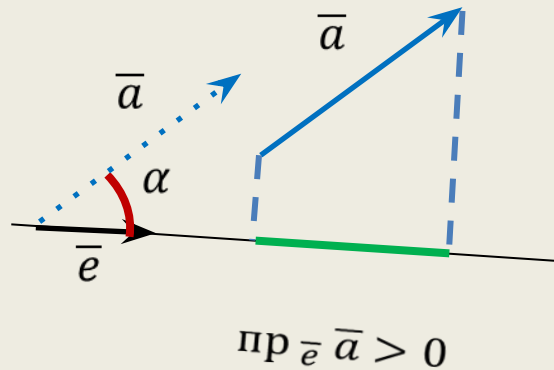
1. Если  $\vec{a} = \vec{0}$  или если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то проекция равна нулю:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = 0$$



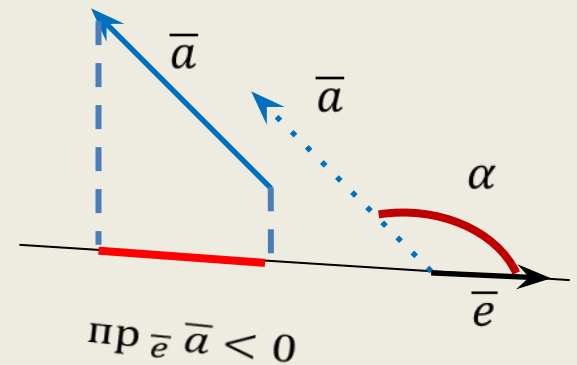
2. Если  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , то проекция положительна:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} > 0$$



3. Если  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ , то проекция отрицательна:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} < 0$$



# I Прямоугольная система

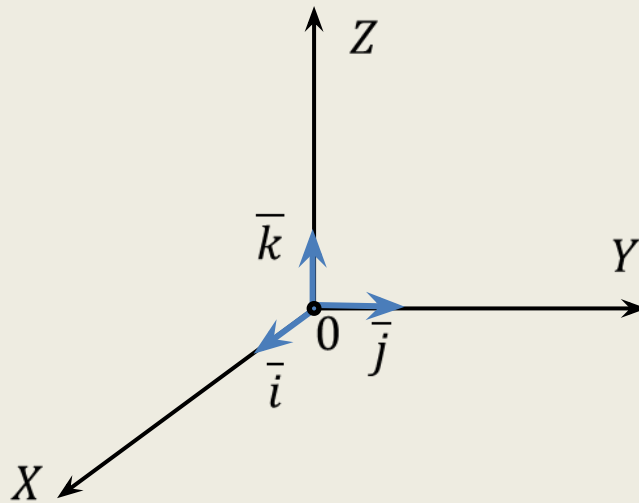
## координат

Зададим вектора в пространстве с помощью чисел.

Для этого рассмотрим ПРЯМОУГОЛЬНУЮ (Декартову) систему координат  $(x, y, z)$ , то есть

ТРИ взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку  $O$  - НАЧАЛО КООРДИНАТ.

Выберем единичный отрезок, при помощи которого измеряются все длины.



Обозначим орты осей:

для оси  $OX$  (оси абсцисс)  $\vec{i}$

для оси  $OY$  (оси ординат)  $\vec{j}$

для оси  $OZ$  (оси аппликат)  $\vec{k}$

# Разложение вектора по

## базису

Отметим любую точку  $A$  пространства.

Вектор  $\overline{0A} = \bar{a}$ , соединяющий начало координат и точку  $A$ , называется

РАДИУС-ВЕКТОРОМ точки  $A$ .

Проекции вектора  $\bar{a}$  на оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  обозначим  $x, y, z$ : это **КООРДИНАТЫ** вектора  $\bar{a}$ .

Обозначим это:  $\bar{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$ .

Очевидно, что координаты ортов  
равны:

$$\bar{i} = (1, 0, 0);$$

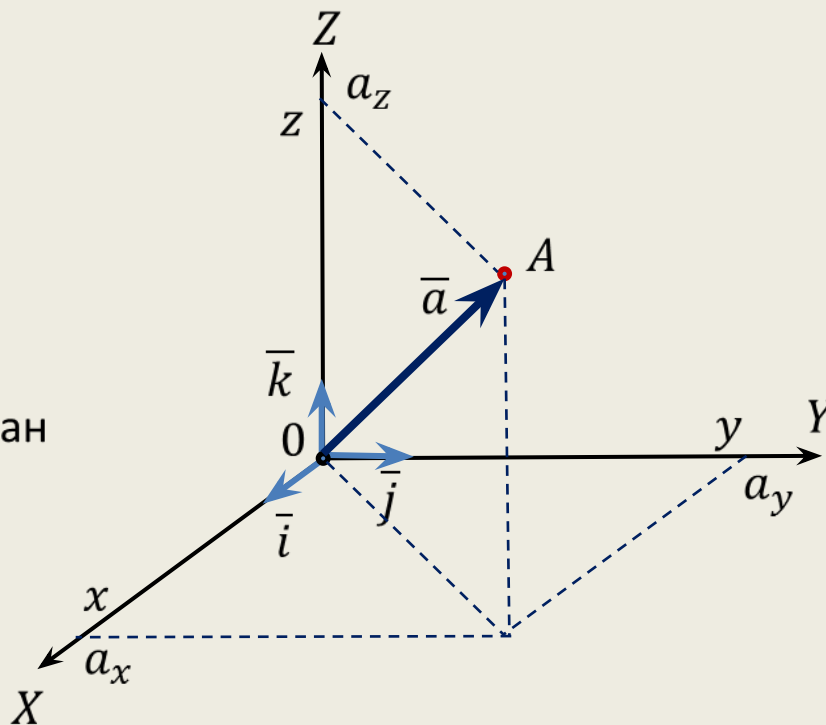
$$\bar{j} = (0, 1, 0);$$

$$\bar{k} = (0, 0, 1);$$

Тогда вектор  $\bar{a} = (x, y, z)$  может быть записан

в виде  $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ;

Эта запись называется **РАЗЛОЖЕНИЕ**  
**ВЕКТОРА  $\bar{a}$  ПО БАЗИСУ  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .**



# Модуль вектора

Зная проекции вектора  $\vec{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$ , можно найти выражение для модуля вектора.

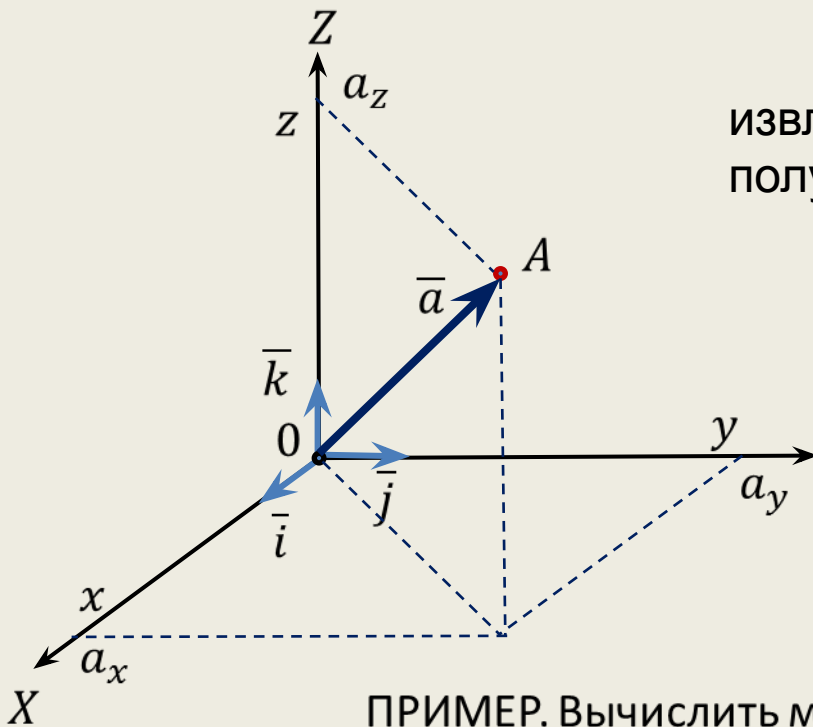
По теореме о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать :

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 ;$$

извлекая корень из обеих частей равенства, получим :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

МОДУЛЬ вектора равен КВАДРАТНОМУ КОРНЮ из СУММЫ КВАДРАТОВ его КООРДИНАТ, или проекций на оси.



ПРИМЕР. Вычислить модули векторов  $\vec{a} = (3, -1, 2)$  и  $\vec{b} = (6, -2, -3)$ .

РЕШЕНИЕ:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7;$$



# Направляющие косинусы вектора

Пусть вектор  $\vec{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$  составляет углы с осями координат:

с осью  $OX$  угол  $\alpha$ ; с осью  $OY$  угол  $\beta$ ; с осью  $OZ$  угол  $\gamma$ .

По свойству проекции вектора на ось можно написать:

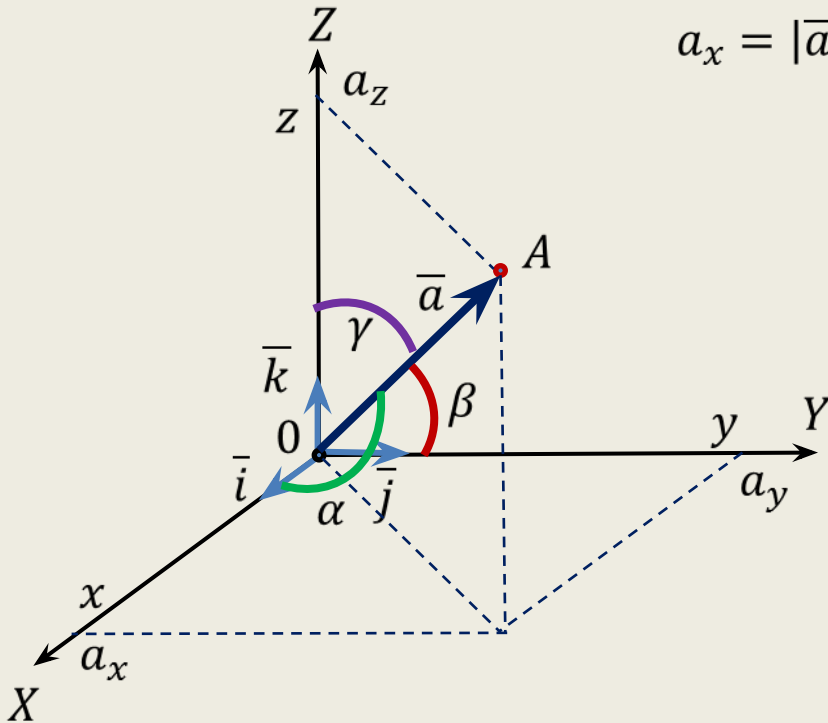
$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha; \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta; \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma;$$

Выразим косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|};$$



Числа  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  называются **НАПРАВЛЯЮЩИМИ КОСИНУСАМИ** вектора  $\vec{a}$ .

Подставим выражение для проекций вектора в формулу модуля и получим :

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2 + |\bar{a}|^2 \cdot (\cos \beta)^2 + |\bar{a}|^2 \cdot (\cos \gamma)^2$$

Сократив на  $|\bar{a}| \neq 0$ , получим соотношение:

$$1 = (\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2$$

СУММА КВАДРАТОВ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ ненулевого вектора РАВНА ЕДИНИЦЕ.

ВОПРОС : найти координаты орта  $\bar{e}$  (единичного вектора), образующего с осями координат углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

ОТВЕ  
Т :

$$e_x = |\bar{e}| \cos \alpha \quad e_y = |\bar{e}| \cos \beta \quad e_z = |\bar{e}| \cos \gamma$$

так как модуль орта равен единице,

то

$$e_x = \cos \alpha \quad e_y = \cos \beta \quad e_z = \cos \gamma$$

$$\bar{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$$

# Линейные операции в координатах

## РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Два вектора РАВНЫ, если РАВНЫ их СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КООРДИНАТЫ:

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow (a_x, a_y, a_z) = (b_x, b_y, b_z);$$

## СЛОЖЕНИЕ и ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

При СЛОЖЕНИИ векторов их одноименные координаты  
СКЛАДЫВАЮТСЯ;

При ВЫЧИТАНИИ векторов их одноименные координаты  
ВЫЧИТАЮТСЯ:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z);$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z);$$

## УМНОЖЕНИЕ на ЧИСЛО

При УМНОЖЕНИИ вектора на число КАЖДАЯ КООРДИНАТА УМНОЖАЕТСЯ  
на это ЧИСЛО:

$$\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z)$$

# Коллинеарность векторов

Выясним условие коллинеарности векторов, заданных своими координатами.

Пусть  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ;  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ . Так как дано, что  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то по теореме 1

можно найти такое число  $\lambda$ , что  $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ .

В координатах это

значит:  $b_x = \lambda \cdot a_x$ ;  $b_y = \lambda \cdot a_y$ ;  $b_z = \lambda \cdot a_z$ ;

$$\frac{b_x}{a_x} = \lambda; \quad \frac{b_y}{a_y} = \lambda; \quad \frac{b_z}{a_z} = \lambda;$$

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$$

Вывод: **ВЕКТОРА КОЛЛИНЕАРНЫ** тогда и только тогда, когда их **КООРДИНАТЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ**.

ПРИМЕР. Проверить коллинеарность векторов  $\vec{a} = (3, -2, 1)$  и  $\vec{b} = (6, -4, 2)$ ;

РЕШЕНИ

$$\vec{a} = (3, -2, 1) \text{ и } \vec{c} = (9, 6, 3);$$

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{6}{3} = 2; \quad \frac{b_y}{a_y} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad \frac{b_z}{a_z} = \frac{2}{1} = 2; \quad 2 = 2 = 2 \Rightarrow \vec{b} = 2 \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

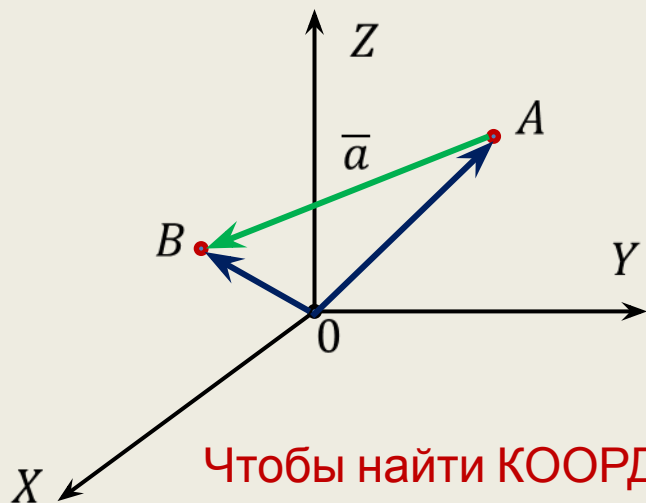
$$\frac{c_x}{a_x} = \frac{9}{3} = 3; \quad \frac{c_y}{a_y} = \frac{6}{-2} = -3; \quad 3 \neq -3 \Rightarrow \vec{a} \text{ и } \vec{c} \text{ НЕ КОЛЛИНЕАРНЫ.}$$

ВОПРОС: что можно сказать про направление векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ?

# Координаты вектора

Найдем координаты вектора  $\vec{a} = \overline{AB}$ , если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A); B = (x_B, y_B, z_B);$$



$$\begin{aligned}\vec{a} = \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = \\ &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A);\end{aligned}$$

Чтобы найти **КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА**, надо из **КООРДИНАТ** точки **КОНЦА** вектора **ВЫЧЕСТЬ** соответствующие **КООРДИНАТЫ** точки **НАЧАЛА** вектора.

ПРИМЕ  $A = (4, -2, -4); B = (6, -3, 2);$

Р:  $\overline{AB} = (6 - 4, -3 - (-2), 2 - (-4)) = (2, -3 + 2, 2 + 4) = (2, -1, 6).$

$$C = (-10, 5, -14); D = (6, -8, 0);$$

$$\overline{CD} = (6 - (-10), -8 - 5, 0 - (-14)) = (6 + 10, -13, 0 + 14) = (16, -13, 14).$$