

Численное интегрирование

Интегрирование

Операция нахождения интеграла называется интегрированием.

Операции интегрирования и дифференцирования обратны друг другу в следующем смысле:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x), \quad \int \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) + C$$

Первообразная

Первообразной функции $f(x)$
называется такая функция $F(x)$,
производная которой равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Неопределённый интеграл

Запись вида

$$F(x) = \int f(x) dx,$$

*где $f(x)$ – функция действительного аргумента,
 $F(x)$ – первообразная $f(x)$,
 dx – знак дифференциала,
указывает на
переменную дифференцирования*

называется неопределённым интегралом подынтегральной функции $f(x)$ по переменной x .

Значение неопределённого интеграла

Производные двух функций, отличающихся на константу, совпадают, поэтому в выражение для неопределенного интеграла включают произвольную постоянную C :

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

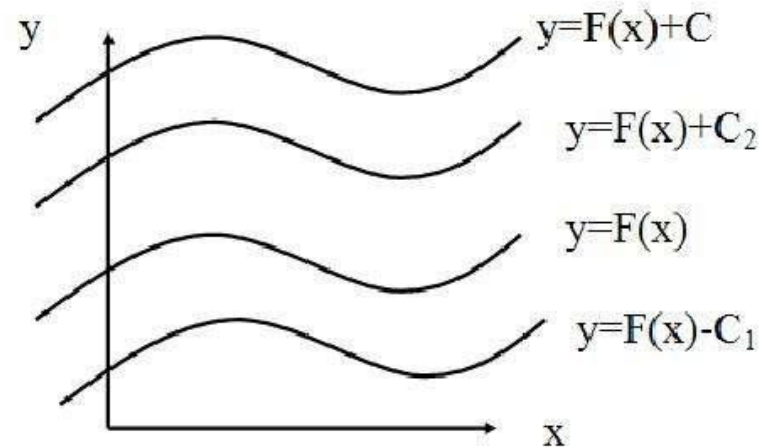
Нап

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

Геометрический смысл неопределённого интеграла

График первообразной называется **интегральной кривой**.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой **семейство интегральных кривых**, полученных параллельным переносом графика функции $y=F(x)$ вдоль оси ординат



Определённый интеграл

Об определенном интеграле есть смысл говорить на отрезке интегрирования $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx$$

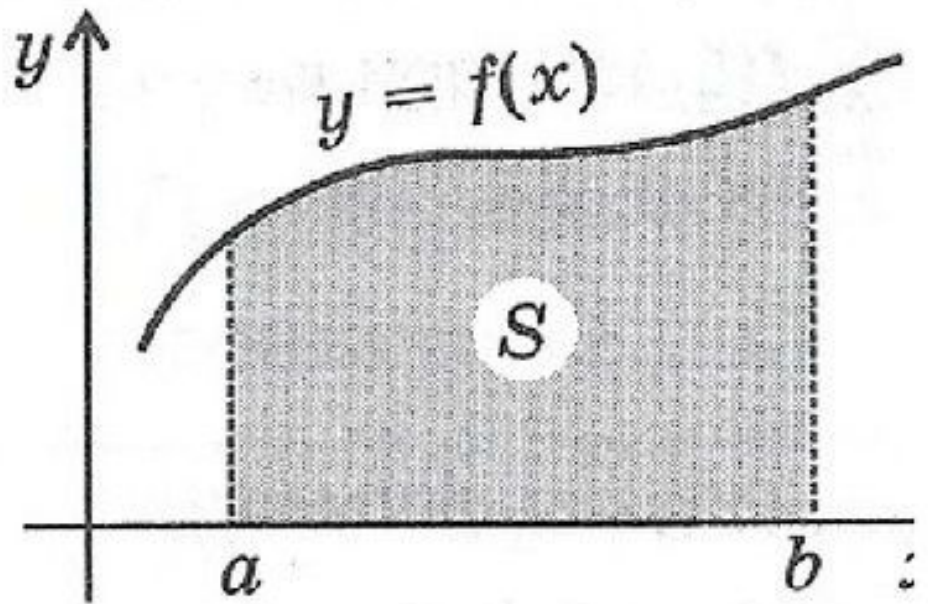
Значение определённого интеграла

Значение определенного интеграла вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Геометрический смысл определённого интеграла

Определенный
интеграл
численно равен S
- площади
криволинейной
трапеции?
ограниченной
осью абсцисс
(Ox), прямыми $x=a$
и $x=b$ и графиком
функции $y=f(x)$



Случаи применения численных методов для интегрирования

Численные методы интегрирования применяются, когда невозможно или затруднительно воспользоваться Ньютона-Лейбница, например, в случаях:

- $f(x)$ задана графически или таблично, тогда у нее не существуют первообразной $F(x)$
- $f(x)$ задана аналитически, то есть формулой, но интеграл не берущийся, не выражается через элементарные функции
- $f(x)$ задана аналитически, интеграл берущийся, но первообразная $F(x)$ громоздкая.

Методы в численном интегрировании

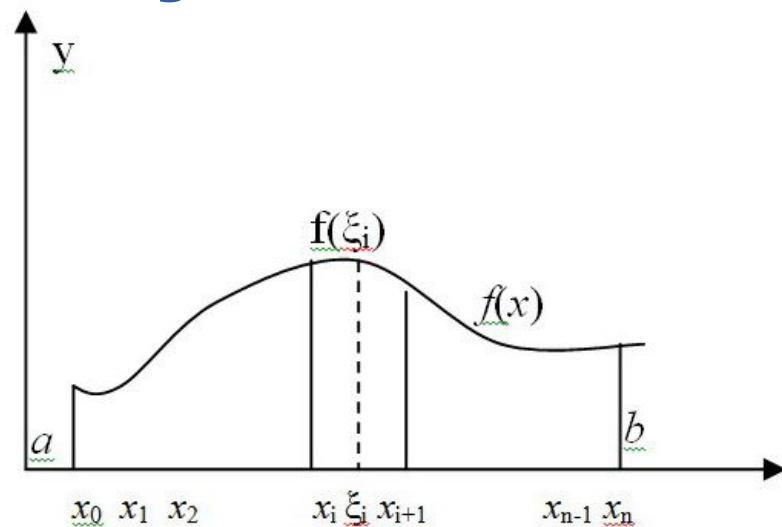
В случае численного интегрирования прибегают к приближенному нахождению интеграла, для чего подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют другой, «близкой» к ней функцией, которая легко интегрируется.

Формулы, которые используют для приближенного вычисления интегралов, - **квadrатурные формулы.**

Квадратурная сумма

Пусть вещественная функция $f(x)$ определена и ограничена на замкнутом интервале от $[a; b]$. Разобьем $[a; b]$ на n частичных интервалов $[x_i; x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, $x_n = b$, $x_0 = a$. Выберем в каждом частичном интервале произвольную точку ξ_i , $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, и

составим интегральную сумму $S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$



Обозначим: ξ_i – узел, $x_{i+1} - x_i = q_i$ – веса, тогда интегральная сумма заменится квадратурной суммой



$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i)$$

Общий вид квадратурной формулы

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i) + R$$

R называется погрешностью, или остаточным членом квадратурной формулы.

Чтобы получить конкретную квадратурную формулу, нужно указать, как выбирать ξ_i , соответствующие веса q_i и оценку погрешности R для определенных классов функций.

Для некоторых классов функций можно записать квадратурные формулы с погрешностью $R=0$ сразу для всего класса. Такие квадратурные формулы называются точными.

Формула прямоугольников.

Идея

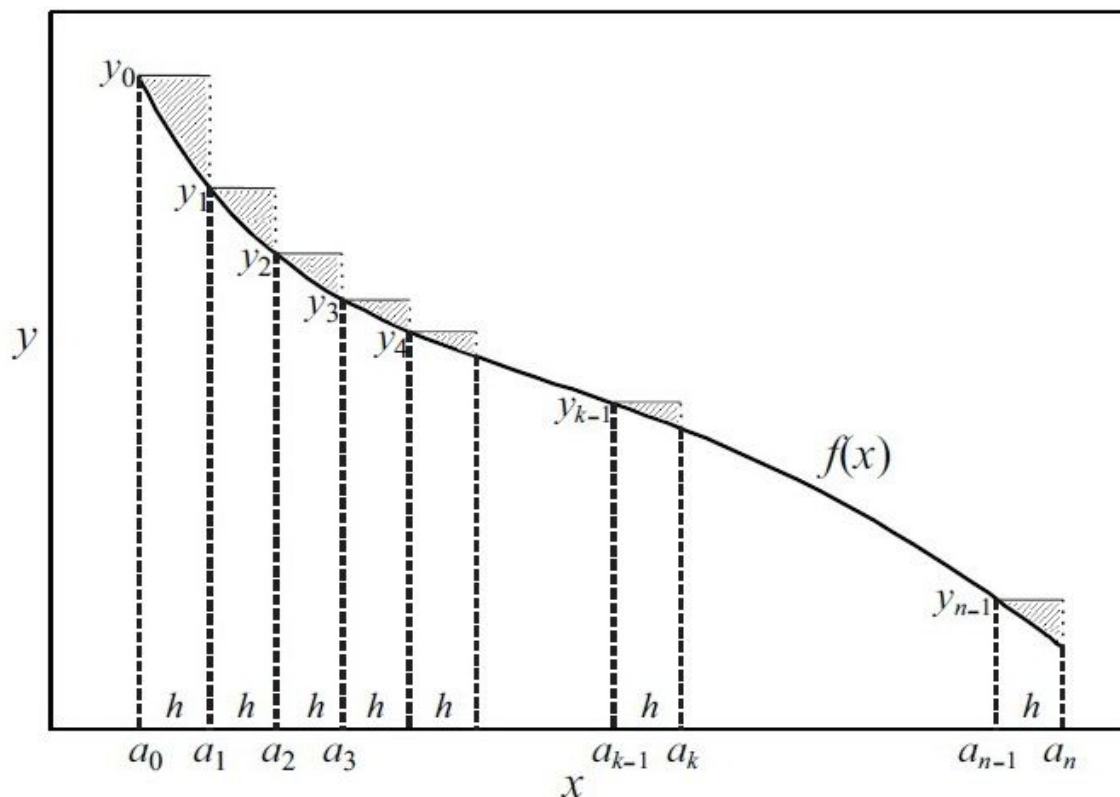
Разобьем
[a, b] на n
равных
отрезков с
шагом
 $h=(b-a)/n$
точками
 $x_0=a$
 $x_1=a+h$
 $x_2=a+2h$
...
 $x_n=x_0+nh=b$

На каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ аппроксимируем $f(x)$ полиномом нулевой степени $P_0(x_i)=f(x_i)=y_i$, тогда площадь криволинейной трапеции на этом участке будет равна площади прямоугольника $S_i = h * y_i$.
На всем отрезке $[a, b]$ площадь криволинейной трапеции будет приближенно равна сумме площадей n прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + \dots + y_{n-1} h = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

Формула прямоугольников. Геометрический смысл

На каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ графически прямая $P_0(x_i) = f(x_i) = y_i$, параллельная оси (O, x) , ограничивает кривую $f(x)$



На всем отрезке $[a, b]$ $f(x)$ будет ограничена ступенчатой фигурой, площадь которой и необходимо вычислить для определения интеграла $f(x)$

Формула прямоугольников. Вид для вычислений

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Формула трапеции. Идея

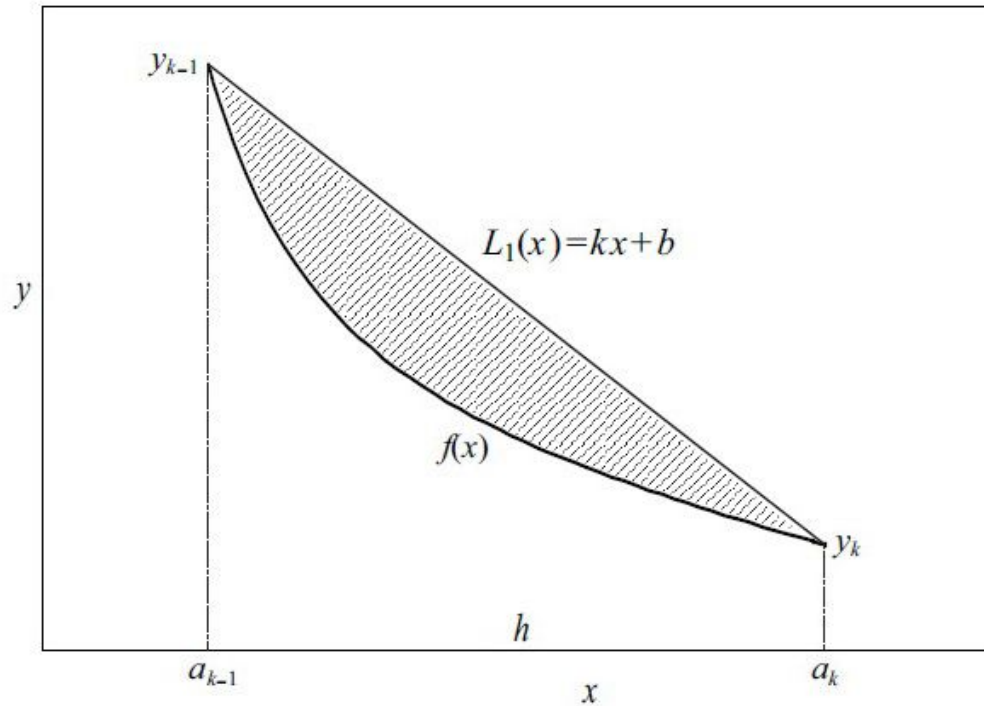
Разобьем
[a, b] на n
равных
отрезков с
шагом
 $h=(b-a)/n$
точками
 $x_k = x_1 + kh,$
 $k=1, \dots, n$

На каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ аппроксимируем $f(x)$ полиномом первой степени $P_1(x_i)$ с узлами на концах отрезка, тогда каждая малая дуга будет заменена на хорду, стягивающую эту дугу. То есть криволинейная трапеция будет заменена прямолинейной. Ее площадь вычисляется по формуле:

На всем отрезке $[a, b]$ площадь криволинейной трапеции будет приближенно равна площади составной фигуры

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \frac{y_2 + y_3}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h = \\ = \frac{h}{2} [y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n].$$

Формула трапеции. Геометрический смысл



На i -том отрезке графически
прямая

$L_1(x) = kx + b$ ограничивает кривую
 $f(x)$
 $s_k = 1/2 \cdot (y_{k-1} + y_k) \cdot h$

Формула трапеции. Вид для вычислений

$$\int_a^b f(x) dx = h * \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right]$$

Практическая работа №5

Задание

Вычислить приближенно на отрезке $[x_0, x_4]$ интеграл функции, заданной таблично, по формуле прямоугольника и по формуле трапеции.

Практическая работа №5

x_i	y_i
1.035	5.34032
1.037	5.35672
1.039	5.36731
1.041	5.36789
1.043	5.37091

Вычисления по формуле прямоугольников.

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

i	x_i	y_i
0	1.035	5,34032
1	1.037	5,35672
2	1.039	5,36731
3	1.041	5,36789
4	1.043	5,37091
\sum_0^3		21,43224

$$h = |1,035 - 1,037| = 0,002$$

$$I = 0,002 * 21,43224$$

$$I =$$

0,04286448

Формула трапеции. Вид для вычислений

$$I = \int_a^b f(x) dx = h * \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right]$$

i	x_i	y_i
0	1.035	5,34032
1	1.037	5,35672
2	1.039	5,36731
3	1.041	5,36789
4	1.043	5,37091
\sum_1^3		16,09192

$$h = |1,035 - 1,037| = 0,002$$

$$I = 0,002 * [(5,34032 + 5,37091)/2 + 16,09192] =$$
$$= 0,002 * 21,447535$$

$$I = \mathbf{0,04289507}$$