Численное интегрирование

Интегрирование

Операция нахождения интеграла называется интегрированием.

Операции интегрирования и дифференцирования обратны друг другу в следующем смысле:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \qquad \int \frac{df(x)}{dx}dx = f(x) + C$$

Первообразная

Первообразной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Неопределённый интеграл

Запись вида

$$F(x) = \int f(x)\,dx,$$

где f(x) – функция действительного аргумента,
F (x) – первообразная f(x),
dx – знак дифференциала, указывает на переменную дифференцирования

называется неопределенным интегралом подынтегральной функции *f(x)* по переменной x.

Значение неопределённого интеграла

Производные двух функций, отличающихся на константу, совпадают, поэтому в выражение для неопределенного интеграла включают произвольную постоянную C:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

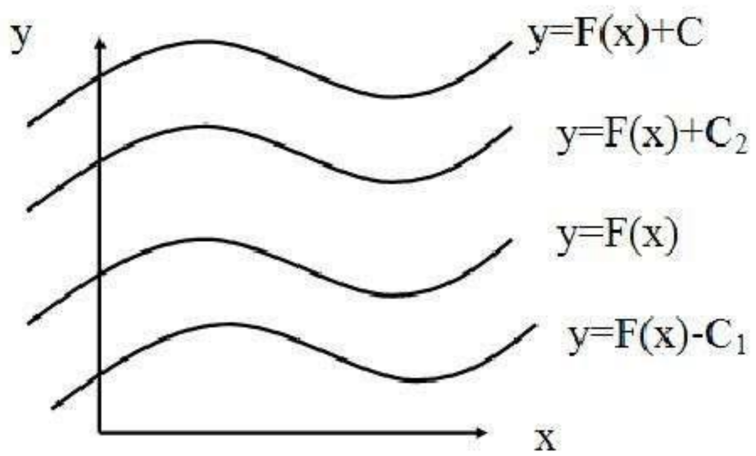
Нап

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \qquad \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

Геометрический смысл неопределённого интеграла

График первообразной называется **интегральной кривой.**

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой **семейство интегральных кривых**, полученных параллельным переносом графика функции y=F(x) вдоль оси ординат



Определённый интеграл

Об определенном интеграле есть смысл говорить на отрезке интегрирования [a, b]

$$\int_a^b f(x)dx$$

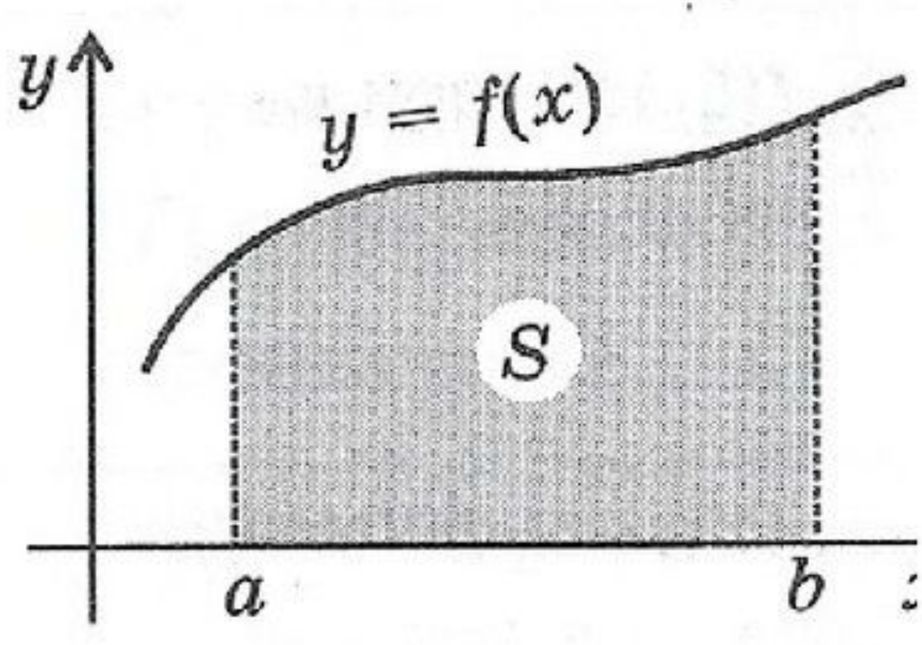
Значение определённого интеграла

Значение определенного интеграла вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Геометрический смысл определённого интеграла

Определенный интеграл численно равен S - площади криволинейной трапеции? ограниченной осью абсцисс *(Ox)*, прямыми $x=a$ и $x=в$ и графиком функции $y=f(x)$



Случаи применения численных методов для интегрирования

Численные методы интегрирования применяются, когда невозможно или затруднительно воспользоваться Ньютона-Лейбница, например, в случаях:

- *f(x)* задана графически или таблично, тогда у нее не существуют первообразной *F(x)*
- *f(x)* задана аналитически, то есть формулой, но интеграл неберущийся, не выражается через элементарные функции
- *f(x)* задана аналитически, интеграл берущийся, но первообразная *F(x)* громоздкая.

Методы в численном интегрировании

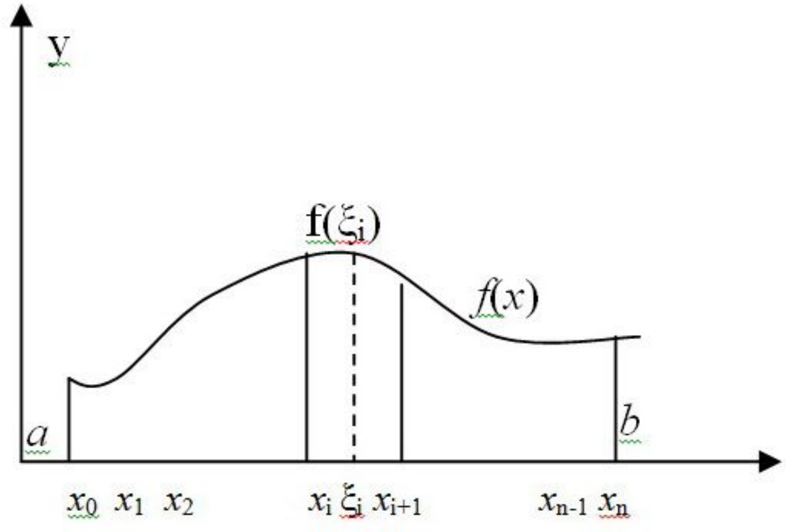
В случае численного интегрирования прибегают к приближенному нахождению интеграла, для чего подынтегральную функцию f(x) заменяют другой, «близкой» к ней функцией, которая легко интегрируется.

Формулы, которые используют для приближенного вычисления интегралов, - **квадратурные формулы**.

Квадратурная сумма

Пусть вещественная функция f(x) определена и ограничена на замкнутом интервале от [a; b]. Разобьем [a; b] на n частичных интервалов $[x_i; x_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$, $x_n = b$, x0=a. Выберем в каждом частичном интервале произвольную точку ξ_i, $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, и составим интегральную сумму

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$



Обозначим: ξ_i – узел, $x_{i+1} - x_i = q_i$ – весы, тогда интегральная сумма заменится квадратурной суммой

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i)$$

Общий вид квадратурной формулы

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} q_i f(\xi_i) + R$$

R называется погрешностью, или остаточным членом квадратурной формулы.

Чтобы получить конкретную квадратурную формулу, нужно указать, как выбирать ξ_i, соответствующие веса q_i и оценку погрешности *R* для определенных классов функций.

Для некоторых классов функций можно записать квадратурные формулы с погрешностью *R=0* сразу для всего класса. Такие квадратурные формулы называются точными.

Формула прямоугольников. Идея

Разобьем [a, b] на n равных отрезков с шагом $h=(b-a)/2$ точками
$x_0=a$
$x_1=a+h$
$x_2=a+2h$
…
$x_n=x_1+nh=b$

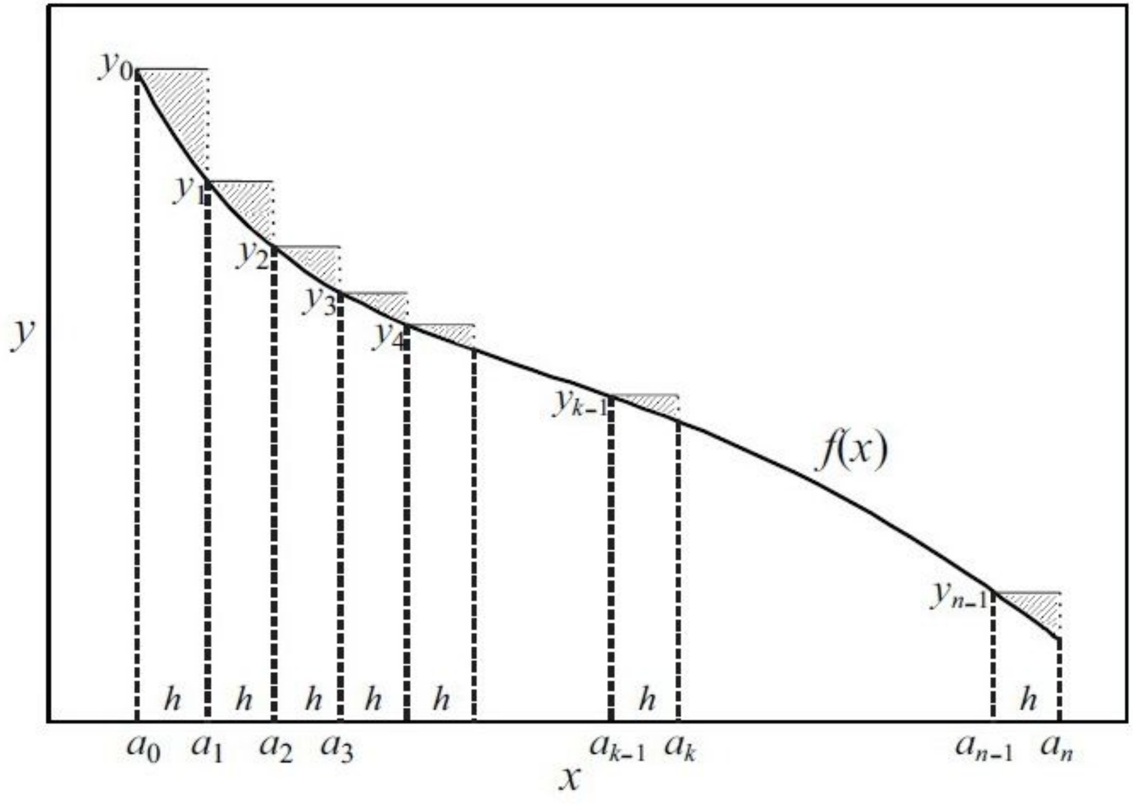
На каждом отрезке [x_i; x_{i+1}] аппроксимируем *f*(*x*) полиномом нулевой степени $P_0(x_i)=f(x_i)=y_i$, тогда площадь криволинейной трапеции на этом участке будет равна площади прямоугольника $S_i = h * y_i$

На всем отрезке [a, b] площадь криволинейной трапеции будет приближенно равна сумме площадей *i* прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx y_0 h + y_1 h + \ldots + y_{n-1} h = h\left(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

Формула прямоугольников. Геометрический смысл

На каждом отрезке [x_i; x_{i+1}] графически прямая
$P_0(x_i) = f(x_i) = y_i$ | ,
параллельная оси (O, x), ограничивает кривую f(x)



На всем отрезке [a, b]
f(x) будет ограничена ступенчатой фигурой, площадь которой и необходимо вычислить для определения интеграла f(x)

Формула прямоугольников. Вид для вычислений

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Формула трапеции. Идея

Разобьем [a, b] на n равных отрезков с шагом h=(b-a)/2 точками $x_k=x_1+kh$, k=1,…,n

На каждом отрезке [x_i; x_{i+1}] аппроксимируем *f*(*x*) полиномом первой степени $P_1(x_i)$ с узлами на концах отрезка, тогда каждая малая дуга будет заменена на хорду, стягивающую эту дугу. То есть криволинейная трапеция будет заменена прямолинейной. Ее площадь вычисляется по формуле:

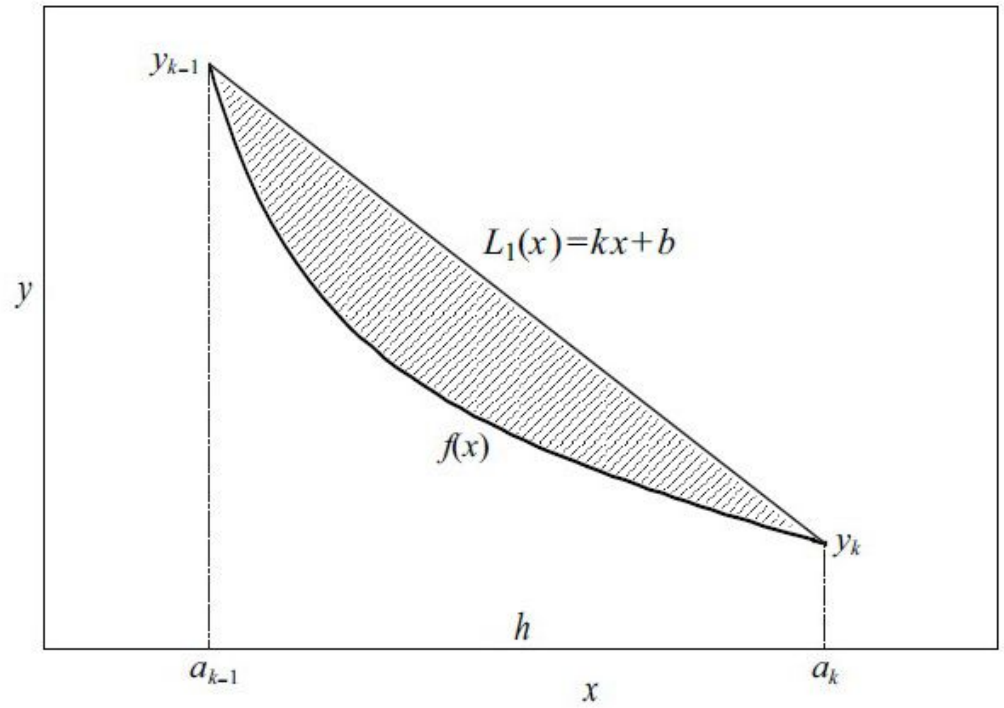
$$S_k = 1/2 * (y_{k-1} + y_k) * h$$

На всем отрезке [a, b] площадь криволинейной трапеции будет приближенно равна площади составной фигуры

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}h + \frac{y_1+y_2}{2}h + \frac{y_2+y_3}{2}h + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}h =$$

$$= \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) + y_n\right].$$

Формула трапеции. Геометрический смысл



На i-том отрезке графически прямая
$L_1(x)$ = kx+b ограничивает кривую f(x)

$S_k = 1/2 * (y_{k-1} + y_k) * h$

Формула трапеции. Вид для вычислений

$$\int_a^b f(x)dx = \text{h}*\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

Практическая работа №5

Задание

Вычислить приближенно на отрезке [$x_{0,}$ x_4] интеграл функции, заданной таблично, по формуле прямоугольника и по формуле трапеции.

Практическая работа №5

x_i	y_i
1.035	5.34032
1.037	5.35672
1.039	5.36731
1.041	5.36789
1.043	5.37091

x_i

Вычисления по формуле прямоугольников.

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

i	x_i	y_i
0	1.035	5,34032
1	1.037	5,35672
2	1.039	5,36731
3	1.041	5,36789
4	1.043	5,37091
$\sum_0^3$		21,43224

h = | 1,035 – 1,037| = 0,002

I = 0,002 * 21,43224

I = 0,04286448

Формула трапеции. Вид для вычислений

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx = \mathrm{h}*\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\ \right]$$

i	x_i	y_i
0	1.035	5,34032
1	1.037	5,35672
2	1.039	5,36731
3	1.041	5,36789
4	1.043	5,37091
$\sum_1^3$		16,09192

h = | 1,035 – 1,037| = 0,002

I = 0,002 * [(5,34032+ 5,37091)/2 + 16,09192] =

= 0,002 * 21,447535

I = 0,04289507