

# Односторонние пределы

Число  $A1$  называется пределом функции  $f(x)$  слева в точке  $a$  и обозначают  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  или  $f(a-0)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (a - \delta, a) \rightarrow |f(x) - A1| < \varepsilon$$

Число  $A2$  называется пределом функции  $f(x)$  справа в точке  $a$  и обозначают  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  или  $f(a+0)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (a, a + \delta) \rightarrow |f(x) - A2| < \varepsilon$$

**Утверждение.** Функция  $f(x)$  имеет предел в точке  $a$  тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции и выполняется равенство  $f(a-0) = f(a+0)$

# Непрерывность

**Определение 1.** Функция  $f(x)$  называется **непрерывной** в точке  $x_0$ , если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в точке  $x_0$  (т.е. существует  $f(x_0)$ ), 2) имеет конечный предел функции при  $x \rightarrow x_0$ ; 3) этот предел равен значению функции в точке  $x_0$ , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Определение 2.** Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывной** в точке  $x_0$ , если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

# Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , то их сумма  $f(x) + \varphi(x)$ , произведение  $f(x)\varphi(x)$  и частное  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  (при условии  $\varphi(x_0) \neq 0$ ) являются функциями, непрерывными в точке  $x_0$ .

2. Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) > 0$ , то существует такая окрестность точки  $x_0$ , в которой  $f(x) > 0$ .

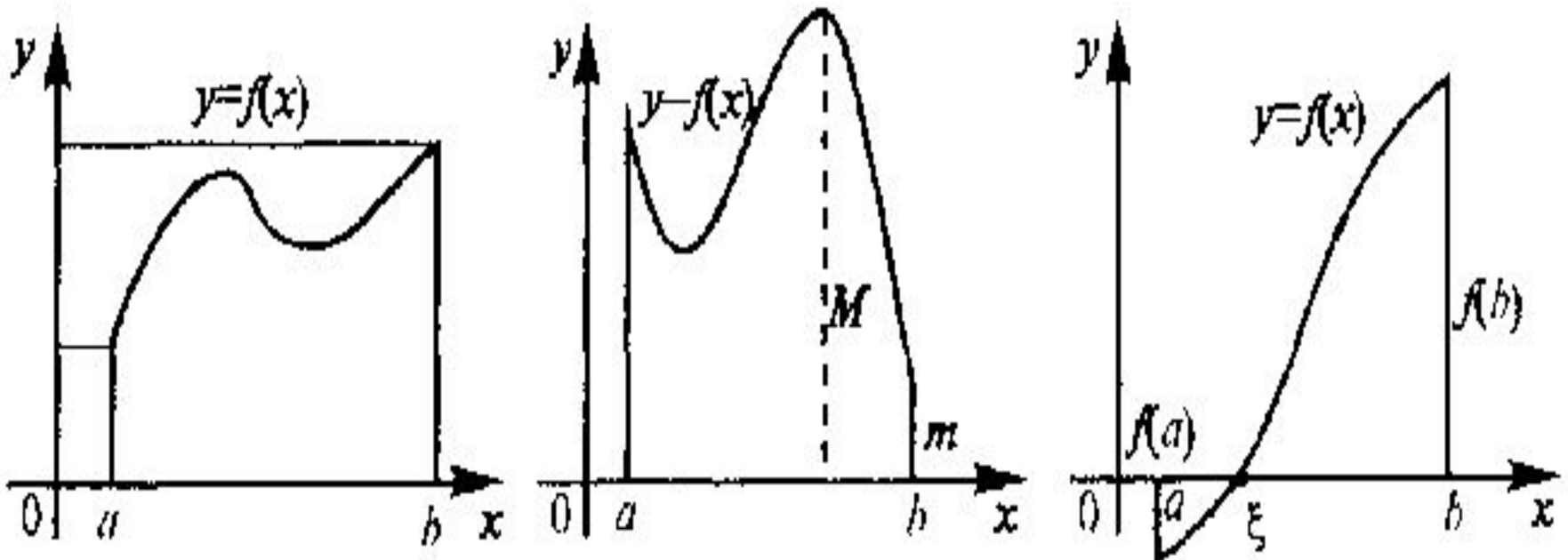
3. Если функция  $y = f(u)$  непрерывна в точке  $u_0$ , а функция  $u = \varphi(x)$  непрерывна в точке  $u_0 = \varphi(x_0)$ , то сложная функция  $y = f[\varphi(x)]$  непрерывна в точке  $x_0$ .

# Непрерывность на отрезке

Если функция  $y=f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a,b]$ , то она ограничена на этом отрезке

Если функция  $y=f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a,b]$ , то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения (теорема Вейерштрасса)

Если функция  $y=f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a,b]$  и значения на концах отрезка  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют противоположные знаки, то найдется такая точка внутри отрезка  $\xi \in (a,b)$ , что  $f(\xi) = 0$  (теорема Больцано-Коши)



# Точки разрыва

Если функция  $f$  определена на полуинтервале  $(a-\delta, a]$  и  $f(a-0)=f(a)$ , то функция  $f$  непрерывна слева в точке  $a$ .

Если функция  $f$  определена на полуинтервале  $[a, a+\delta)$  и  $f(a+0)=f(a)$ , то функция  $f$  непрерывна справа в точке  $a$ .

Точку  $a$  назовем точкой разрыва функции  $f$ , если эта функция либо не определена в точке  $a$ , либо определена, но не является непрерывной.

# Точки разрыва 1 рода

**Определение.** Точка  $a$  – точка разрыва первого рода: существуют конечные  $f(a-0)$  и  $f(a+0)$ .

Замечание.  $a$  – точка разрыва 1 рода функции  $f(x)$ , то  $f(a+0)-f(a-0)$  - скачок функции  $f(x)$  в точке  $a$ .

Если  $f(a+0)=f(a-0)$ , то точка  $a$  - точка устранимого разрыва.

Положим  $f(a)=f(a+0)=f(a-0)=A$ , получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ A, & x = a \end{cases}$$

# Точка разрыва 2 рода

Пусть  $x=a$  – точка разрыва функции  $f$ , не являющаяся точкой разрыва 1 рода. Тогда ее называют точкой разрыва второго рода. В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен

Исследуем функцию  $y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$  на непрерывность.

Решение:

В точке  $x=0$  данная функция не определена.

Для этого находим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \left( \begin{array}{l} x \rightarrow +0 \text{ следовательно, } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, 2^{+\infty} \rightarrow +\infty. \text{ в знаменателе стоит} \\ \text{бесконечно большая величина, значит обратная ей,} \\ \text{бесконечно малая - это вся дробь, откуда предел равен 0} \end{array} \right) = 0$$

Так как в точке  $x=0$  односторонние пределы конечны, то  $x=0$  — точка разрыва первого рода, а так как эти пределы не равны, то разрыв не устраним.