

Односторонние пределы

Число $A1$ называется пределом функции $f(x)$ слева в точке a и обозначают $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $f(a-0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (a - \delta, a) \rightarrow |f(x) - A1| < \varepsilon$$

Число $A2$ называется пределом функции $f(x)$ справа в точке a и обозначают $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ или $f(a+0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (a, a + \delta) \rightarrow |f(x) - A2| < \varepsilon$$

Утверждение. Функция $f(x)$ имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции и выполняется равенство $f(a-0) = f(a+0)$

Непрерывность

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0 , если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$), 2) имеет конечный предел функции при $x \rightarrow x_0$; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0 , если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма $f(x) + \varphi(x)$, произведение $f(x)\varphi(x)$ и частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при условии $\varphi(x_0) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0 .

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0 , в которой $f(x) > 0$.

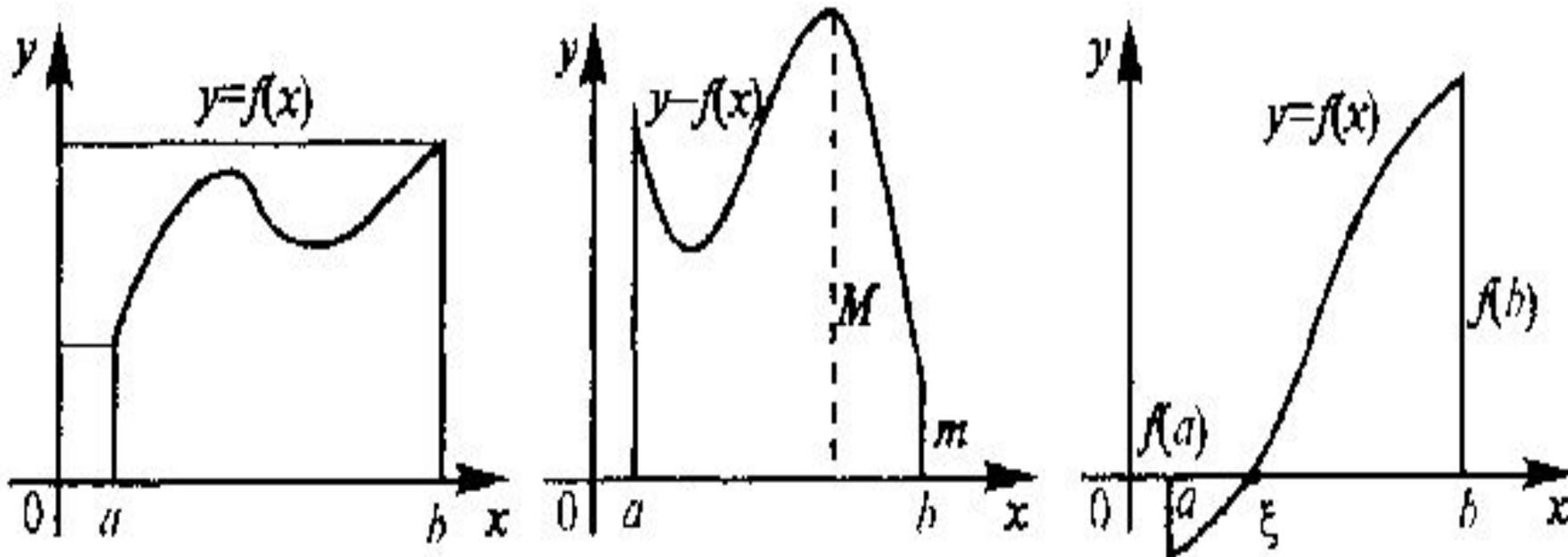
3. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0 , а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Непрерывность на отрезке

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения (теорема Вейерштрасса)

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и значения на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то найдется такая точка внутри отрезка $\xi \in (a,b)$, что $f(\xi) = 0$ (теорема Больцано-Коши)



Точки разрыва

Если функция f определена на полуинтервале $(a-\delta, a]$ и $f(a-0)=f(a)$, то функция f непрерывна слева в точке a .

Если функция f определена на полуинтервале $[a, a+\delta)$ и $f(a+0)=f(a)$, то функция f непрерывна справа в точке a .

Точку a назовем точкой разрыва функции f , если эта функция либо не определена в точке a , либо определена, но не является непрерывной.

Точки разрыва 1 рода

Определение. Точка a – точка разрыва первого рода: существуют конечные $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Замечание. a – точка разрыва 1 рода функции $f(x)$, то $f(a+0)-f(a-0)$ - скачок функции $f(x)$ в точке a .

Если $f(a+0)=f(a-0)$, то точка a - точка устранимого разрыва.

Положим $f(a)=f(a+0)=f(a-0)=A$, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ A, & x = a \end{cases}$$

Точка разрыва 2 рода

Пусть $x=a$ – точка разрыва функции f , не являющаяся точкой разрыва 1 рода. Тогда ее называют точкой разрыва второго рода. В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен

Исследуем функцию $y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ на непрерывность.

Решение:

В точке $x=0$ данная функция не определена.

Для этого находим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \left(\begin{array}{l} x \rightarrow +0 \text{ следовательно, } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, 2^{+\infty} \rightarrow +\infty. \text{ в знаменателе стоит} \\ \text{бесконечно большая величина, значит обратная ей,} \\ \text{бесконечно малая - это вся дробь, откуда предел равен 0} \end{array} \right) = 0$$

Так как в точке $x=0$ односторонние пределы конечны, то $x=0$ — точка разрыва первого рода, а так как эти пределы не равны, то разрыв не устраним.