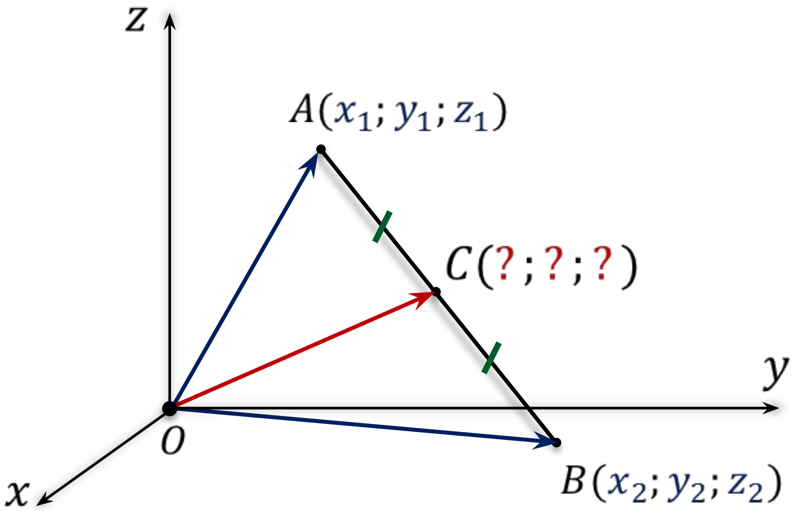
Простейшие задачи в координатах

1. Определение координат середины отрезка



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OB}$ – радиус-вектор точки B

$\overrightarrow{OA}\ \{x_1; y_1; z_1\}$

$\overrightarrow{OB}\ \{x_2; y_2; z_2\}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\ \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\ \left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$$

$$\overrightarrow{OC}\ \left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$$

$$C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Задача 1. Точка M – середина отрезка AB.

			$(-24; 8; 28)$
		$(-8; 4; -19)$	
	$(-1; 2{,}5; -2)$		

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}} \\ \boldsymbol{z = \dfrac{y_1 + y_2}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{0 + (-2)}{2} \\ y = \dfrac{3 + 2}{2} \\ z = \dfrac{-4 + 0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2{,}5 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{14 + \mathrm{x}}{2} \\ -2 = \dfrac{-8 + \mathrm{y}}{2} \\ -7 = \dfrac{5 + z}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = 4 \\ z = -19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 = \dfrac{\mathrm{x} + 0}{2} \\ 4 = \dfrac{\mathrm{y} + 0}{2} \\ 15 = \dfrac{z + 2}{2} \end{cases}$$

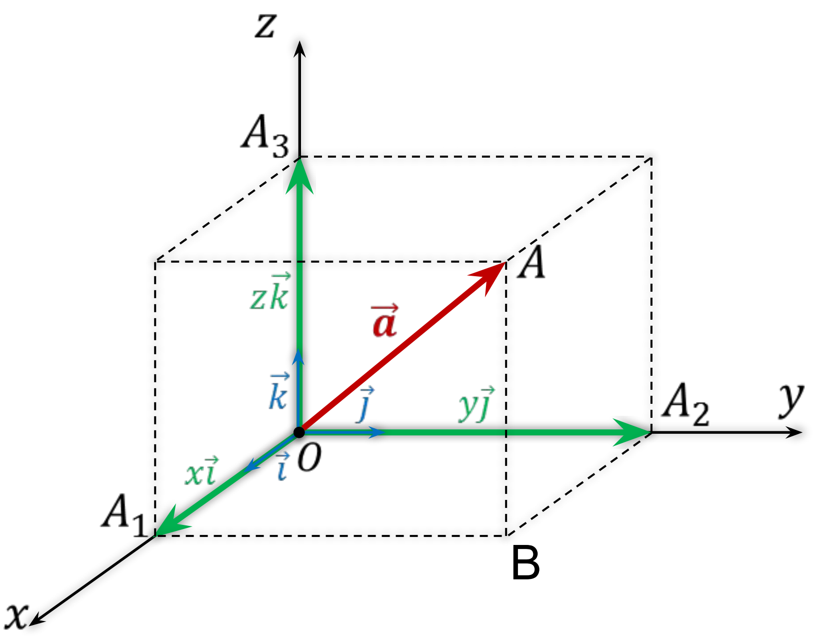
$$\begin{cases} x = -24 \\ y = 8 \\ z = 28 \end{cases}$$

Задача 2. Точка M – середина отрезка AB. Найдите k, m, n.

	а)	б)	в)
			$(7; n; m\ - n)$
		$(-1; 6; -8)$	
	$(k; 4; -2)$		

2. Вычисление длины вектора по его координатам

Длина вектора $\vec{a}\ \{x; y; z\}$ равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.



$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1) $\vec{a}\ \{x; y; z\} \Longrightarrow \quad \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

2) $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i} \qquad \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j} \qquad \overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$

3) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \Longrightarrow \quad |\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}| = OA$$

4) $OA = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{BA}^2} = \sqrt{(OA_1{}^2 + A_1\mathrm{B}^2) + \mathrm{BA}^2}$

$$OA = \sqrt{OA_1{}^2 + OA_2{}^2 + OA_3{}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Задача 3. Вычислить длины векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$; б) $\vec{b}\{2\sqrt{3}; -6; 1\}$;

в) $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; г) $\vec{d} = 2\vec{k}$.

$\vec{a}\{x; y; z\}$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Решение.

а) $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$

$\overrightarrow{AB}\{1-(-1); -2-0; 3-2\}$

$\overrightarrow{AB}\{2; -2; 1\}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+1}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9}$

$|\overrightarrow{AB}| = 3$

б) $\vec{b}\{2\sqrt{3}; -6; 1\}$

$\vec{b} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{12+36+1} = \sqrt{49} = 7$

в) $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \vec{c}\{1; 1; 1\}$

$\vec{c} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

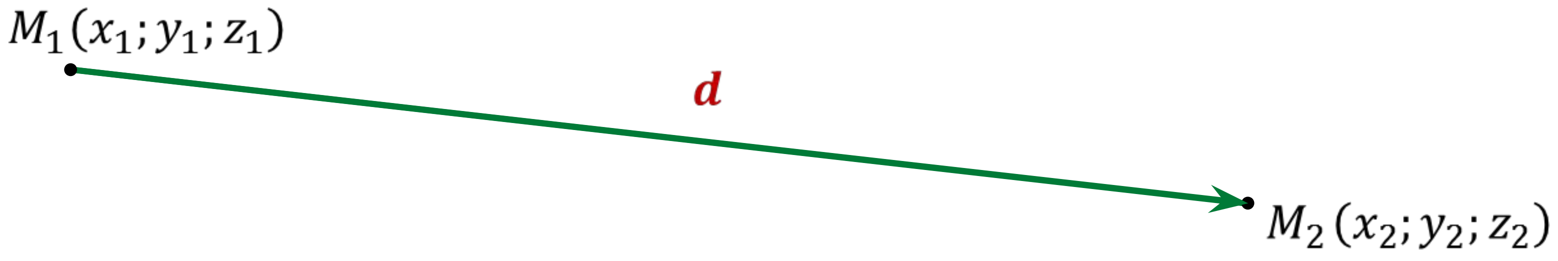
г) $\vec{d} = 2\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \vec{d}\{0; 0; 2\}$

$\vec{d} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

Задача 4. Даны векторы $\vec{a}\{3; -2; 1\}$, $\vec{b}\{-2; 3; 1\}$, $\vec{c}\{-3; 2; 1\}$.

Найдите: а) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$, б) $|\vec{a} + \vec{b}|$, в) $|3\vec{c}|$.

3. Определение расстояния между двумя точками



$$\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = M_1M_2 = d$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Задача 5. По координатам точек A, B и C определить вид ΔABC.

а) $A(3; 7; -4)$, $B(5; -3; 2)$, $C(1; 3; -10)$

Решение. а) $A(3; 7; -4)$, $B(5; -3; 2)$, $C(1; 3; -10)$

$$AB = \sqrt{(5-3)^2+(-3-7)^2+(2-(-4))^2} = \sqrt{2^2+(-10)^2+6^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$

$$BC = \sqrt{(1-5)^2+(3-(-3))^2+(-10-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+6^2+(-12)^2} = \sqrt{196} = 14$$

$$AC = \sqrt{(1-3)^2+(3-7)^2+(-10-(-4))^2} = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-6)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\sqrt{196}^2 = \sqrt{140}^2 + \sqrt{56}^2$$

$$196 = 140 + 56 \quad \Longrightarrow \quad \Delta ABC - \text{прямоугольный, разносторонний}$$

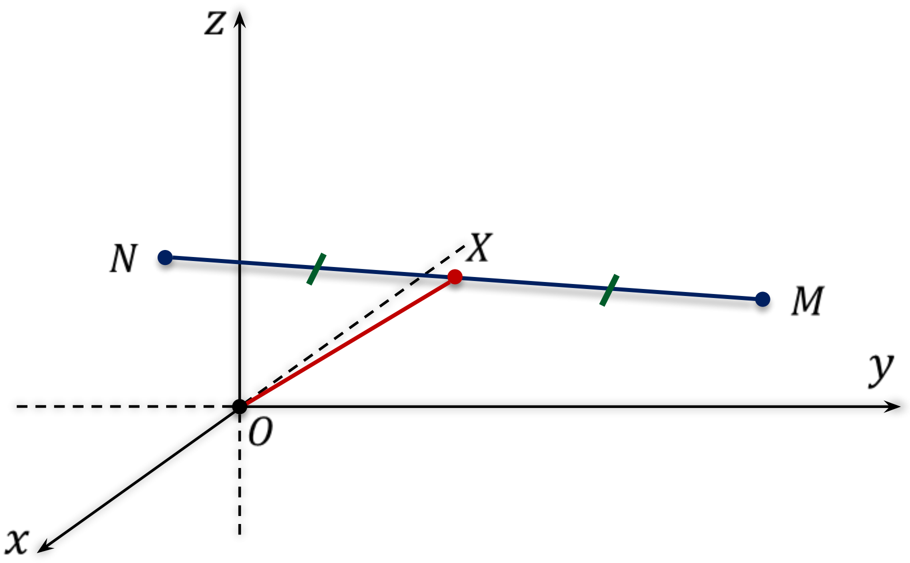
$$196 = 196$$

б) $A(-5; 2; 0)$, $B(-5; 2; -2)$, $C(-4; 3; 0)$;

в) $A(5; -3; -1)$, $B(5; -5; -1)$, $C(4; -3; 0)$.

Задача 6. Найти расстояние от точки начала координат O до середины отрезка MN, если $M(-4;9;0)$ и $N(0;-2;4)$.

Решение.



1) $M(-4;9;0)$, $N(0;-2;4)$

X – середина отрезка MN

$$X\left(\frac{\dots\,.}{2};\frac{\dots\,.}{2};\frac{\dots\,.}{2}\right)$$

$$X(\dots;\ \dots;\ \dots)$$

2) $X(\dots;\dots;\dots)$ $\quad O(0;0;0)$

$$OX=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$OX=\sqrt{\dots}$$

Ответ: ...

Простейшие задачи в координатах