

Математическая статистика
(ср арифметическое, мода, размах,
медиана)

Комбинаторика
(перемещения, размещения и
сочетания с повторениями и без)

Математическая статистика

- Математическая статистика – раздел математики, изучающий *методы сбора и анализа результатов наблюдений массовых случайных явлений* с целью выявления существующих закономерностей.

Среднее арифметическое

Среднее арифметическое нескольких чисел находится как сумма всех этих чисел, разделенная на количество этих чисел.

Найти **среднее арифметическое** чисел 7,1,15,2,4,4

$$(7+1+15+2+4+4):6=33:6=5,5$$

Среднее арифметическое может быть как целым числом, так и десятичной дробью

Определение моды.

Модой ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других.



Медиана

- Медиана с нечётным числом членов – это число, записанное посередине.
- Медиана с чётным числом членов - это среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Медиана ряда.

Составим упорядоченный ряд (*из 9 чисел*):

64, 72, 72, 75, **78**, 82, 85, 91, 93.

78 – медиана данного ряда.

Дан другой упорядоченный ряд (*из 10 чисел*):

64, 72, 72, 75, **78, 82**, 85, 88, 91, 93.

$(78 + 82) : 2 = 80$ – медиана этого ряда.

Размах ряда.

23; 18; 25; 20; 25; 25; 32; 37; 34; 26; 34; 25

Размахом ряда называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

*Наибольший расход времени - 37 мин,
а наименьший – 18 мин.*

Найдём размах ряда:

$$37 - 18 = 19(\text{мин})$$

Домашнее задание Ч1 статистика

Найти среднее арифметическое, размах, моду и медиану ряда чисел:

а) 20,18,32,10,45,15,18,12

б) 2,2;3,8;1,6;4,4;1,5.



Десятичные дроби

Комбинаторика

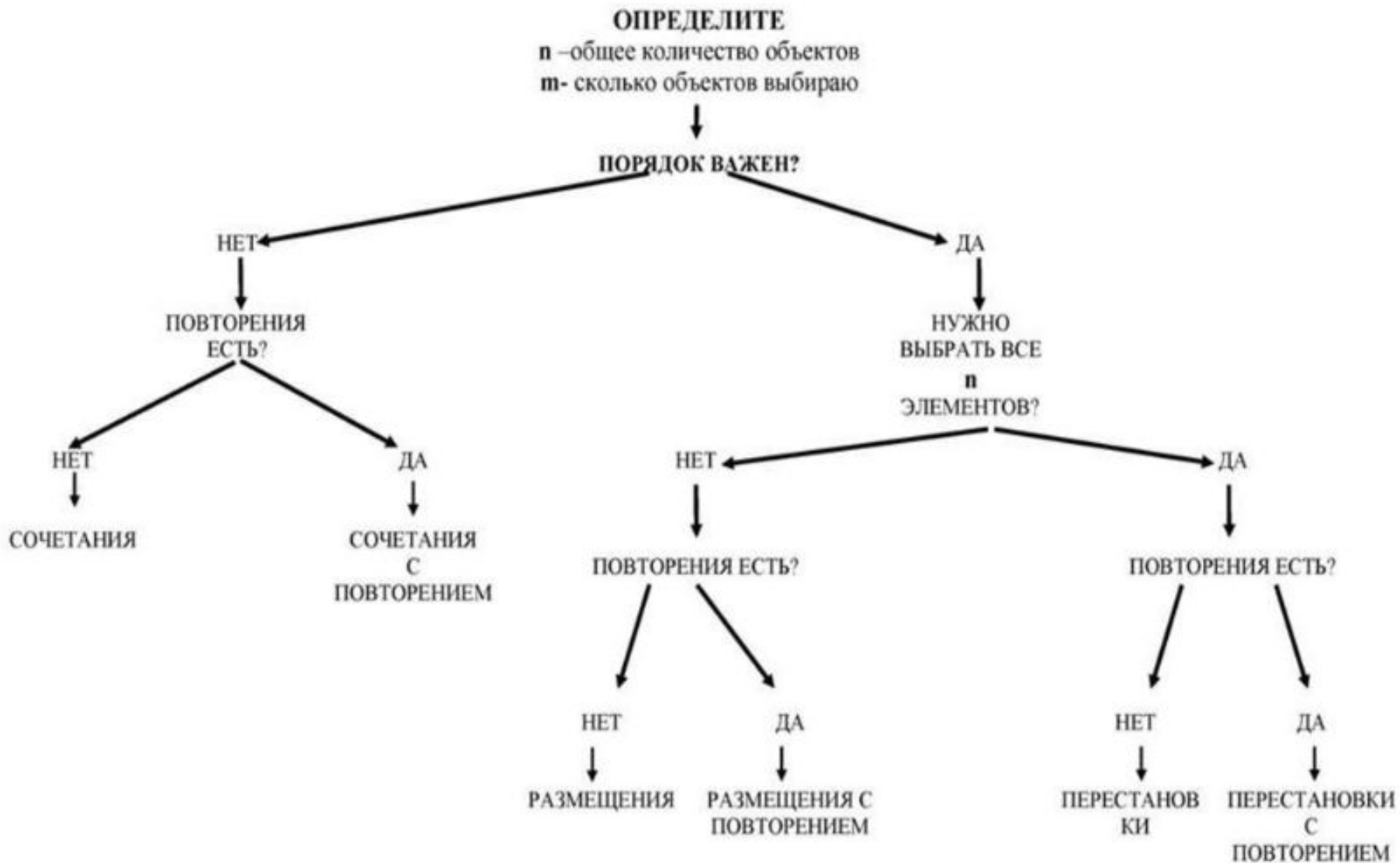
Комбинаторика – раздел математики, изучающий количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Комбинации элементов множества могут быть выполнены путем:

- 1) перестановок;
- 2) размещений;
- 3) сочетаний.

Комбинации могут быть без повторений (в основном) и с повторениями (оговаривается отдельно).

Комбинаторика



Факториал

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

n!

Факториал

Values of factorials

При решении некоторых задач удобно использовать посчитанные значения факториала (например, на перестановку без повторений)

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5\,040$$

$$8! = 40\,320$$

$$9! = 362\,880$$

$$10! = 3\,628\,800$$

$$11! = 39\,916\,800$$

$$12! = 479\,001\,600$$

$$13! = 6\,227\,020\,800$$

$$14! = 87\,178\,291\,200$$

$$15! = 1\,307\,674\,368\,000$$

$$16! = 20\,922\,789\,888\,000$$

$$17! = 355\,687\,428\,096\,000$$

$$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$$

$$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$$

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$$

Степень числа

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

2⁷

← **Показатель степени**
(Сколько раз?)

↑
Основание степени
(Что умножаем?)

Например:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$$



СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

1. Первая степень любого числа равна самому числу:

$$3^1 = 3; 7^1 = 7; a^1 = a$$

2. Вторую степень числа называют «квадратом»:

$$3 * 3 = 9 \quad 3^2 = ?; 7^2 = ?$$

3. Третью степень числа называют «кубом»:

$$2 * 2 * 2 = 8 \quad 2^3 = ?; 4^3 = ?$$



Задание + разбор 1

Запишите произведение $(-7,8) \cdot (-7,8) \cdot (-7,8) \cdot (-7,8) \cdot (-7,8) \times$
 $\times (-7,8)$ в виде степени.

Число, которое повторяется в умножении $(-7,8)$

Считаем, сколько раз повторяется

6

Значит, $(-7,8)^6$

Задание + разбор 2

Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{2}\right)^4$.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5}{2} * \frac{5}{2} * \frac{5}{2} * \frac{5}{2} = \frac{5 * 5 * 5 * 5}{2 * 2 * 2 * 2} = \frac{625}{16} = 39 \frac{1}{16}$$

Домашнее задание ч 2 степень

Запишите произведение $(-6,2) \cdot (-6,2) \cdot (-6,2)$ в виде степени.

Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{2}\right)^5$.

Перестановки без повторений

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и



$$P_n = n!$$

↑
Количество вариантов
перестановок

↑
Количество
предметов

Перестановки без повторений

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и



Количество предметов

$n = 3$ (красная, жёлтая и синяя карточки)

Количество вариантов перестановок

$P = n! = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$ вариантов

Домашнее задание 1.1

Десять молодых людей решили отпраздновать окончание средней школы товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались, и первое блюдо было подано, заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни предлагали разместиться в алфавитном порядке, другие — по возрасту, третьи — по успеваемости, четвёртые — по росту и т. д. Спор затянулся, суп успел остыть, а за стол никто не сел. Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью:

— Молодые друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол, как кому придется, и выслушайте меня.

Все сели как попало. Официант продолжал:

— Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра сядете опять по-новому и т. д., пока не перепробуете всех возможных размещений. Когда же придет черед вновь сесть так, как сидите вы здесь сегодня, тогда — обещаю торжественно — я начну ежедневно угощать вас бесплатно самыми изысканными обедами.

Предложение понравилось. Решено было ежедневно собираться в этом ресторане и перепробовать все способы размещения за столом, чтобы скорее начать пользоваться бесплатными обедами.

Сколько лет понадобится этой компании молодых людей, если они будут приходить каждый день? Считать, что в году 365 дней
Можно пользоваться калькулятором + таблицей факториалов (см выше)



Перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями

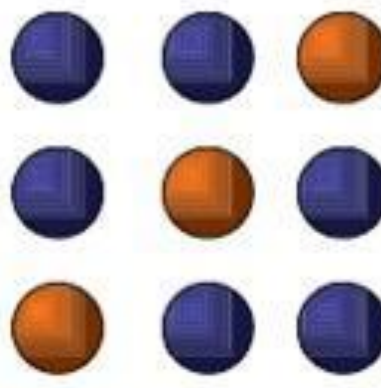


$$n_1 = 2$$



$$n_2 = 1$$

$$n = n_1 + n_2 = 2 + 1 = 3$$



3 различные перестановки

Перестановки с повторениями

Число различных на выборке из n элементов, из которых k одинаковые - число перестановок с k повторениями на множестве из n элементов

$$\overline{P}_n(k) = \frac{n!}{k!}$$

Перестановки с повторениями

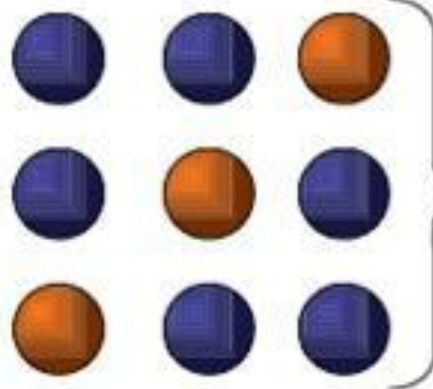


$$n_1=2$$



$$n_2=1$$

$$n=n_1+n_2=2+1=3$$



3 различные перестановки

Всего шариков 3, то есть $n = 3$

Одинаковых шариков (повторений) $k=2$

$$P = \frac{n!}{k!} = \frac{3!}{2!} = \frac{1*2*3}{1*2} = \frac{6}{2} = 3$$

Перестановки с повторениями

Если у нас несколько групп одинаковых предметов (например, два шарика красных и три шарика синих), то вместо $k!$ пишем $k_1!$ (количество красных) * $k_2!$ (количество синих)

$$\frac{n!}{k_1! * k_2!}$$

Перестановки с повторениями

- Сколько различных браслетов можно сделать из пяти одинаковых изумрудов, шести одинаковых рубинов и семи одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?



Перестановки с повторениями

Всего 18 камней

$$n = 18$$

изумрудов 5

$$k_1 = 5$$

рубинов 6

$$k_2 = 6$$

сапфиров 7

$$k_3 = 7$$

$$P = \frac{n!}{k_1! * k_2! * k_3!} = \frac{18!}{5! * 6! * 7!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 * 11 * 12 * 13 * 14 * 15 * 16 * 17 * 18}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7}$$

Перестановки с повторениями

$$\frac{\cancel{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12*13*14*15*16*17*18}}{}$$

$$1*2*3*4*5*1*2*3*4*5*6*\cancel{1*2*3*4*5*6*7}$$

$$\frac{\cancel{8}*9*\cancel{10}*11*12*13*14*15*16*17*18}{}$$

$$\cancel{2}*3*\cancel{4}*5*\cancel{2}*3*4*5*6$$

$$\frac{11*12*13*14*\overset{3}{\cancel{15}}*\overset{4}{\cancel{16}}*17*\overset{3}{\cancel{18}}}{}$$

$$\cancel{4}*5*\cancel{6}$$

$$11 * 12 * 13 * 14 * 3 * 4 * 17 * 3 = 14\,702\,688$$

Домашнее задание 1.2

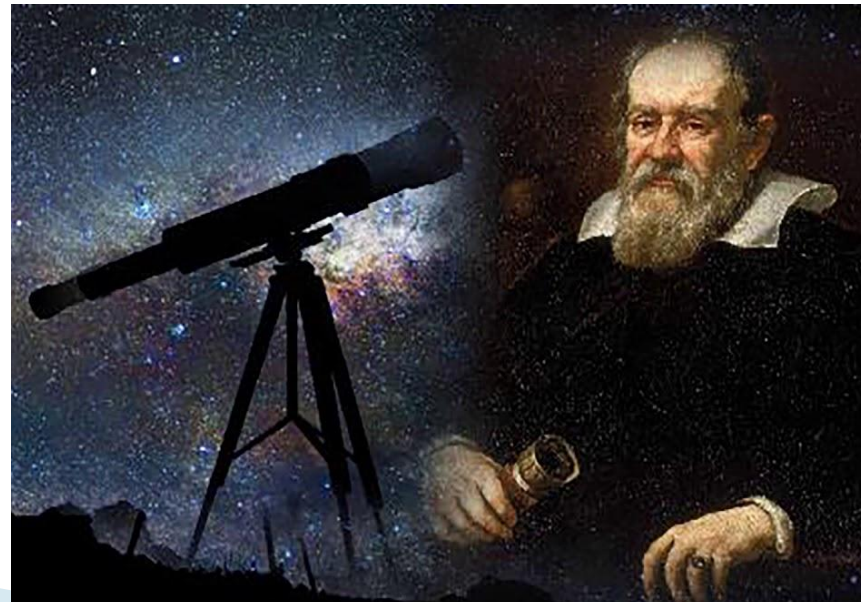
Анаграмма — это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв.

Например, *бьорд* является анаграммой слова *дробь*. Сколько всего анаграмм у слова *колобок*?

N – всего букв
k1 – букв К
k2 – букв О
k3 – букв Л
k4 – букв Б

В XVIII—XIX веке среди естествоиспытателей было принято зашифровывать свои открытия в виде анаграмм, что служило двум нуждам: скрыть гипотезу до её окончательной проверки и утвердить авторство на открытие, когда оно будет подтверждено.

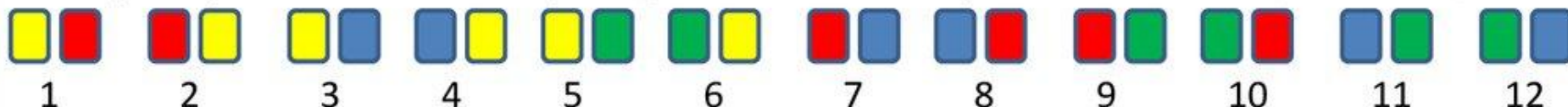
Так, Галилео Галилей зашифровал латинскую фразу «*Altissimum planetam tergeminum observavi*» («Высочайшую планету тройною наблюдал») следующим образом: «*Smaismrmilmepoetaleu tibusnuenugtaviras*», закрепив свою заявку на открытие спутников Сатурна



Размещения без повторений

- Размещения – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, и различающиеся либо порядком расположения элементов, либо составом элементов (либо и тем, и другим)

Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных ($n=4$, $m=2$)



$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

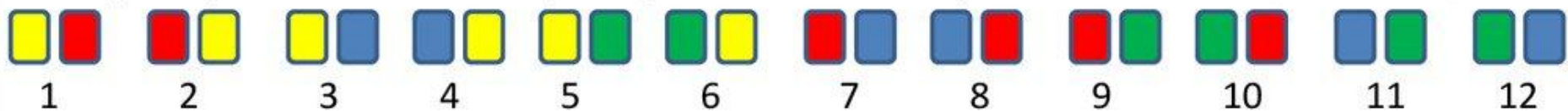
Количество вариантов

Сколько предметов в одной группе

Количество всех предметов

Размещения без повторений

Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных ($n=4$, $m=2$)



Всего карточек 4 (желтая, красная, синяя и зелёная)

$n = 4$

В группе по две карточки

$m = 2$

$$A = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1*2*3*4}{1*2} = 12$$

Размещения без повторений

Задача 3. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Уроки в течение дня не повторяются. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Всего разных дисциплин 11, значит, $n=11$

За день может быть 5 предметов, значит, $m=5$

$$A = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11}{1*2*3*4*5*6}$$

$$\frac{\cancel{1*2*3*4*5*6} * 7 * 8 * 9 * 10 * 11}{\cancel{1*2*3*4*5*6}}$$

$$7*8*9*10*11 = 55\,440$$

Домашнее задание 2.1

Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.

Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

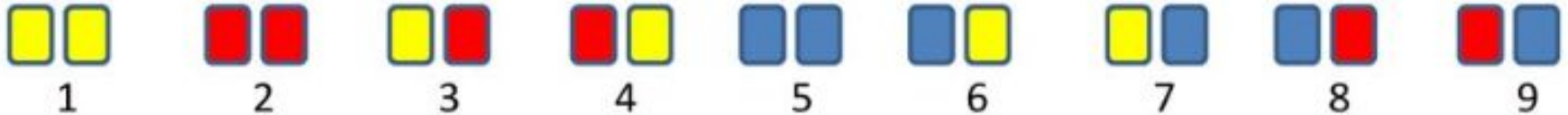
Эти города входят в «Золотое кольцо России» — туристский маршрут, проходящий по древним городам Северо-Восточной Руси, в которых сохранились уникальные памятники истории и культуры России, центрам народных ремёсел.



Размещения с повторениями

- Размещения с повторением – комбинации из n **типов** элементов, взятых по m штук

Пример. Размещения из 3 **типов** карточек по две ($n=3, m=2$)



$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Размещения с повторениями

А 134 АА



- А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х. |

Всего букв 12, значит, $n = 12$

В номере по три буквы, значит, $k = 3$

$$A = 12^3 = 12 * 12 * 12 = 1\ 728$$

Домашнее задание 2.2

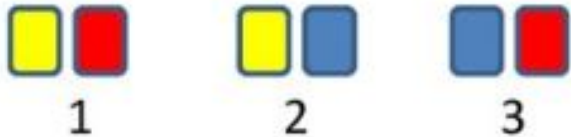
Пример 1.8. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт.

Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Сочетания без повторений

- Сочетания – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, которые различаются между собой хотя бы одним элементом (без учёта порядка элементов!)

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки ($n=3, m=2$)



$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

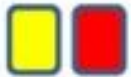
Количество вариантов

Сколько в группе

Всего предметов

Сочетания без повторений

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки



1



2



3

Всего карточек 3 (жёлтая, синяя и красная)

$$n = 3$$

В группе по 2 карточки

$$m = 2$$

$$C = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1*2*3}{1*2*1} = \frac{6}{2} = 3$$

Сочетания без повторов

Имеются 5 различных соков. Сколько разных коктейлей можно получить, если для каждого берутся три сока?



Сочетания без повторений

Имеются 5 различных соков. Сколько разных коктейлей можно получить, если для каждого берутся три сока?

Всего разных соков 5, значит, $n=5$

В каждом коктейле 3 сока, значит, $m=3$

$$C = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2*3*1*2} = 10$$

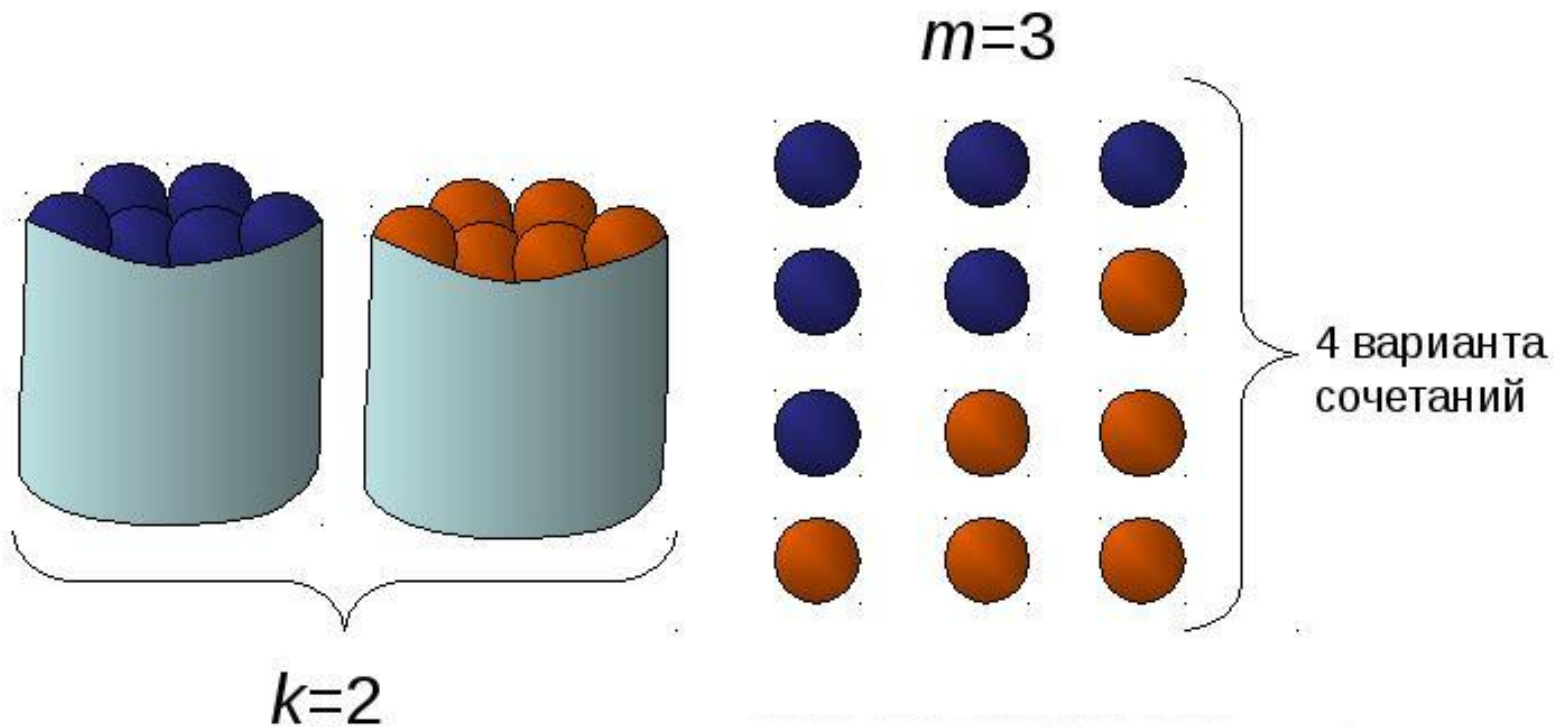
Домашнее задание 3.1

Сколькими способами можно выбрать троих футболистов из 11 для прохождения допинг-контроля?



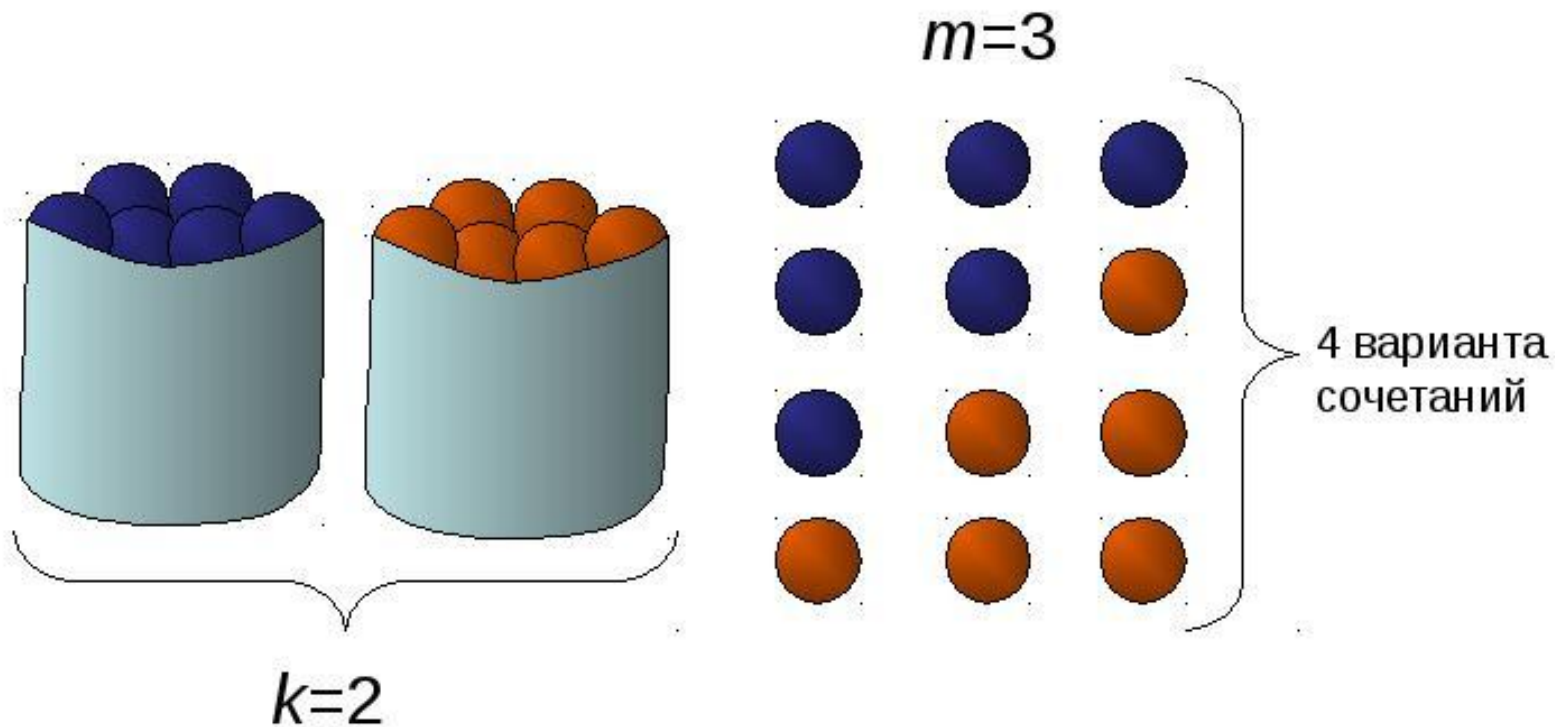
В Древней Греции с проблемой применения допинга боролись специальные комиссии. Хотя судьи в то время могли очень легко определить, принимал ли спортсмен стимулирующее средство перед началом соревнований, так как самым сильнодействующим средством был в то время **чеснок**.

Сочетания с повторениями



$$\overline{C}_k^m = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!}$$

Сочетания с повторениями



$$C = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!} = \frac{(2+3-1)!}{3! \cdot (2-1)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

Сочетания с повторениями

В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?



Сочетания с повторениями

В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

3 вида пирожных, значит, $k = 3$

Надо купить 9 пирожных, значит, в каждой группе по 9, то есть $m=9$

$$C = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!} = \frac{(3+9-1)!}{9! \cdot (3-1)!} = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2} =$$

$$\frac{\cancel{1} * \cancel{2} * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{5} * \cancel{6} * \cancel{7} * \cancel{8} * \cancel{9} * \overset{5}{\cancel{10}} * 11}{\cancel{1} * \cancel{2} * \cancel{3} * \cancel{4} * \cancel{5} * \cancel{6} * \cancel{7} * \cancel{8} * \cancel{9} * 1 * \cancel{2}} = 5 * 11 = 55$$

Домашнее задание 3.2

На почте пять видов открыток к Новому году.
Сколькими способами из них можно выбрать семь
открыток?

