Математическая статистика
(ср арифметическое, мода, размах, медиана)
Комбинаторика
(перемещения, размещения и сочетания с повторениями и без)

Математическая статистика

- Математическая статистика – раздел математики, изучающий *методы сбора и анализа результатов наблюдений массовых случайных явлений* с целью выявления существующих закономерностей.

Среднее арифметическое

Среднее арифметическое нескольких чисел находится как сумма всех этих чисел, разделенная на количество этих чисел.

Найти среднее арифметическое чисел 7,1,15,2,4,4

(7+1+15+2+4+4):6=33:6=5,5

Среднее арифметическое может быть как целым числом, так и десятичной дробью

Определение моды.

Модой ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других.

Медиана

- **Медиана с нечётным числом членов – это** число, записанное посередине.
- **Медиана с чётным числом членов -** это среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Медиана ряда.

Составим упорядоченный ряд (*из 9 чисел*):

64, 72, 72, 75, 78, 82, 85, 91, 93.

78 – медиана данного ряда.

Дан другой упорядоченный ряд (*из 10 чисел*):

64, 72, 72, 75, 78, 82, 85, 88, 91, 93.

(78 + 82) : 2 = 80 – медиана этого ряда.

Размах ряда.

23; 18; 25; 20; 25; 25; 32; 37; 34; 26; 34; 25

Размахом ряда называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Наибольший расход времени - 37 мин,

а наименьший – 18 мин.

Найдём размах ряда:

37 – 18 = 19(мин)

Домашнее задание Ч1 статистика

Найти среднее арифметическое, размах, моду и медиану ряда чисел:

а) 20,18,32,10,45,15,18,12

б) 2,2;3,8;1,6;4,4;1,5.

Десятичные дроби

Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, изучающий количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Комбинации элементов множества могут быть выполнены путем:

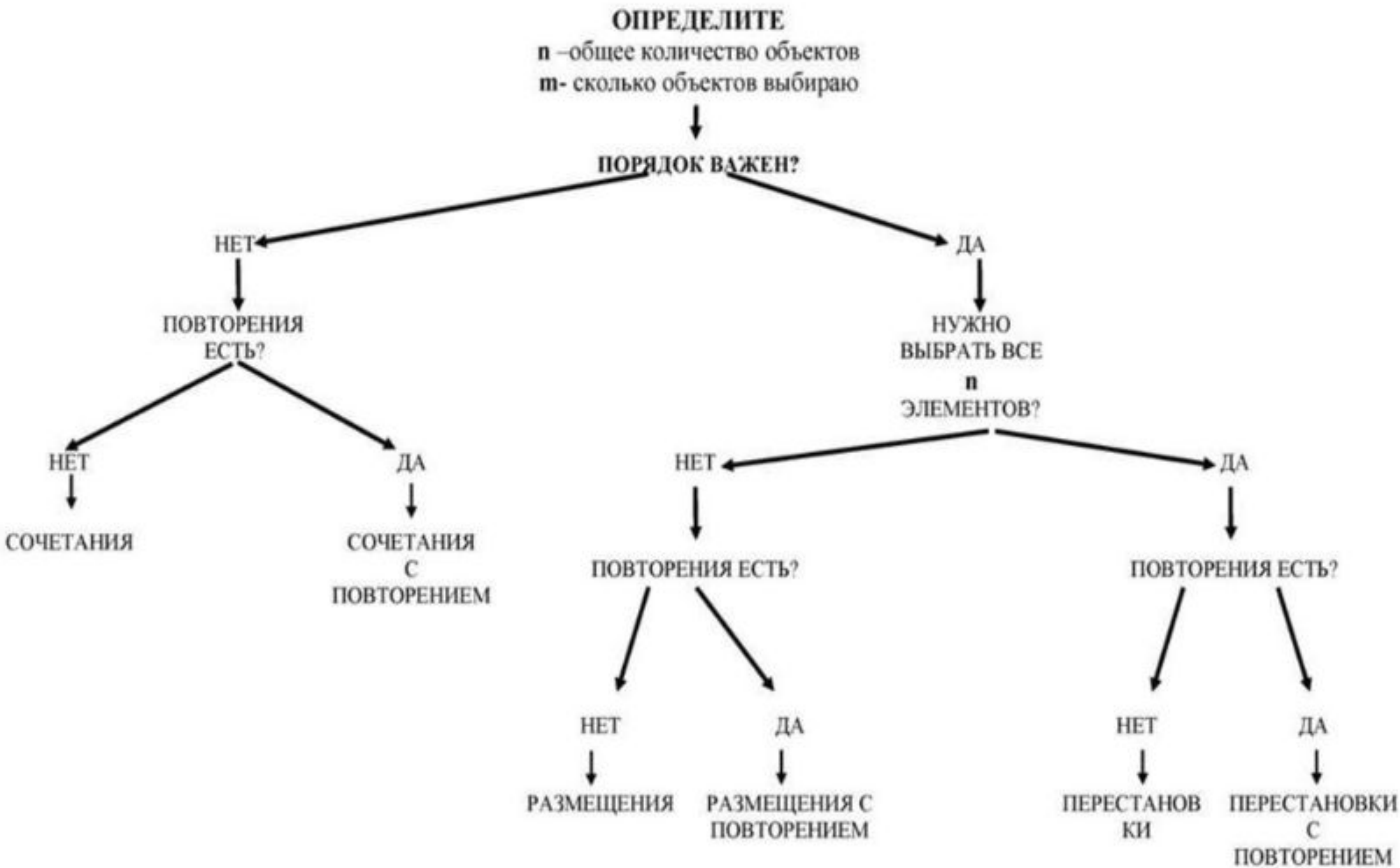
1) перестановок;

2) размещений;

3) сочетаний.

Комбинации могут быть без повторений (в основном) и с повторениями (оговаривается отдельно).

Комбинаторика



Факториал

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$n!$$

Факториал

При решении некоторых задач удобно использовать посчитанные значения факториала (например, на перестановку без повторений)

Values of factorials

0! = 1
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5 040
8! = 40 320
9! = 362 880
10! = 3 628 800
11! = 39 916 800
12! = 479 001 600
13! = 6 227 020 800
14! = 87 178 291 200
15! = 1 307 674 368 000
16! = 20 922 789 888 000
17! = 355 687 428 096 000
18! = 6 402 373 705 728 000
19! = 121 645 100 408 832 000
20! = 2 432 902 008 176 640 000

Степень числа

2 • 2• 2• 2 • 2 • 2 • 2=

Показатель степени
(Сколько раз?)

$$2^7$$

Основание степени
(Что умножаем?)

Например:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$

Свойства степени

1. Первая степень любого числа равна самому числу:

$$3^1 = 3; 7^1 = 7; a^1 = a$$

2. Вторую степень числа называют «квадратом»:

3 * 3 = 9 $$3^2 = ?; 7^2 = ?$$

3. Третью степень числа называют «кубом»:

2 * 2* 2 =8 $$2^3 = ?; 4^3 = ?$$

Задание + разбор 1

Запишите произведение $(-7,8)\cdot(-7,8)\cdot(-7,8)\cdot(-7,8)\cdot(-7,8)\times$
$\times(-7,8)$ в виде степени.

Число, которое повторяется в умножении (–7,8)

Считаем, сколько раз повторяется
6

Значит, $(-7,8)^6$

Задание + разбор 2

Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{2}\right)^4$.

$$\left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{5}{2} * \frac{5}{2} * \frac{5}{2} * \frac{5}{2} = \frac{5 * 5 * 5 * 5}{2 * 2 * 2 * 2} = \frac{625}{16} = 39\ \frac{1}{16}$$

Домашнее задание ч 2 степень

Запишите произведение $(-6,2)\cdot(-6,2)\cdot(-6,2)$ в виде степени.

Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{2}\right)^5$.

Перестановки без повторений

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и синей

$$P_n = n!$$

Количество вариантов перестановок

Количество предметов

Перестановки без повторений

- Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, различающиеся только их порядком

Пример. Перестановки из трёх карточек – жёлтой, красной и синей

Количество предметов

n = 3 (красная, жёлтая и синяя карточки)

Количество вариантов перестановок

P = n! = 3! = 1 * 2 * 3 = 6 вариантов

Домашнее задание 1.1

Десять молодых людей решили отпраздновать окончание средней школы товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались, и первое блюдо было подано, заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни предлагали разместиться в алфавитном порядке, другие — по возрасту, третьи — по успеваемости, четвёртые — по росту и т. д. Спор затянулся, суп успел остыть, а за стол никто не садился. Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью:

— Молодые друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол, как кому придется, и выслушайте меня.

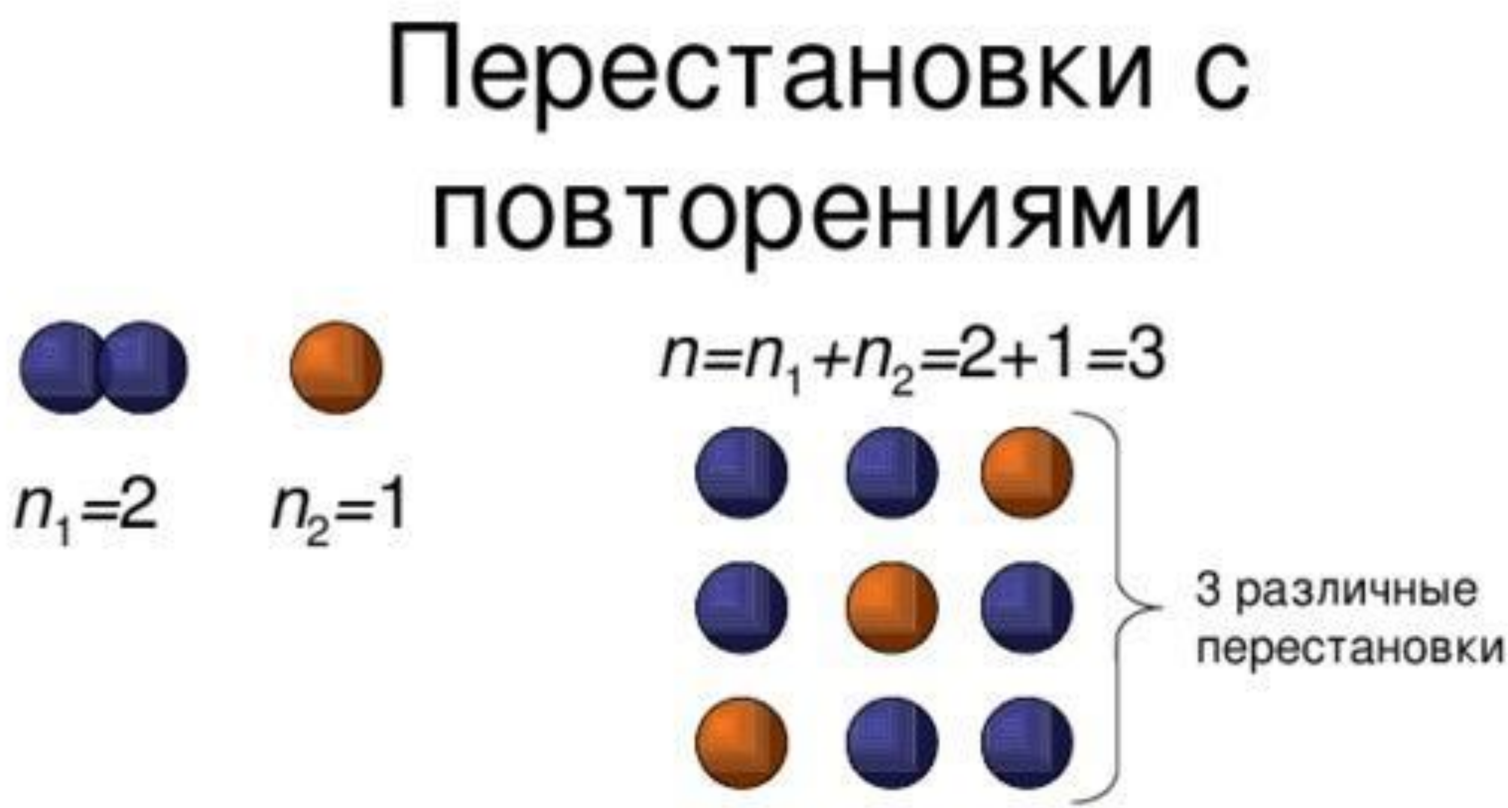
Все сели как попало. Официант продолжал:

— Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра сядете опять по-новому и т. д., пока не перепробуете всех возможных размещений. Когда же придет черед вновь сесть так, как сидите вы здесь сегодня, тогда — обещаю торжественно — я начну ежедневно угощать вас бесплатно самыми изысканными обедами.

Предложение понравилось. Решено было ежедневно собираться в этом ресторане и перепробовать все способы размещения за столом, чтобы скорее начать пользоваться бесплатными обедами.

Сколько лет понадобится этой компании молодых людей, если они будут приходить каждый день? Считать, что в году 365 дней
Можно пользоваться калькулятором + таблицей факториалов (см выше)

Перестановки с повторениями

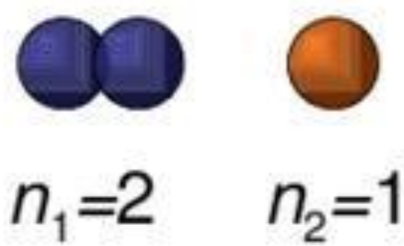


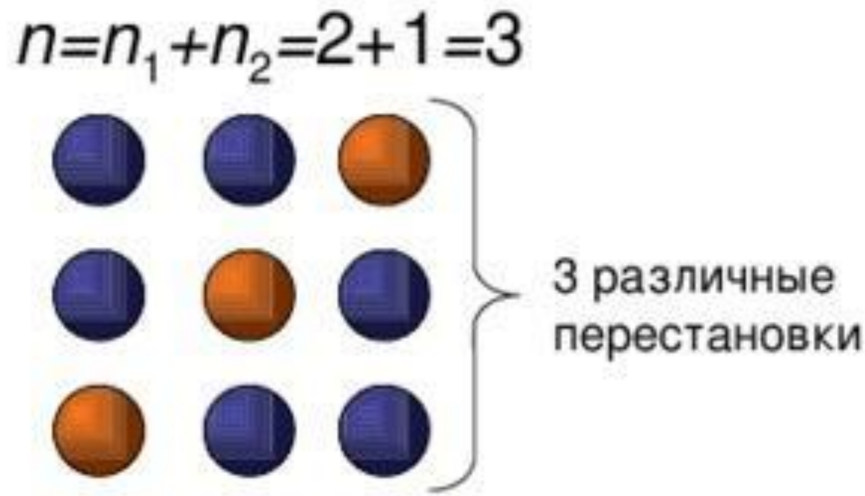
Перестановки с повторениями

Число различных на выборке из n элементов, из которых k одинаковые - **число перестановок с k повторениями на множестве из n элементов**

$$\overline{P_n}(k) = \frac{n!}{k!}$$

Перестановки с повторениями





Всего шариков 3, то есть **n = 3**

Одинаковых шариков (повторений) **k=2**

$$\mathrm{P} = \frac{n!}{k!} = \frac{3!}{2!} = \frac{1*2*3}{1*2} = \frac{6}{2} = 3$$

Перестановки с повторениями

- Если у нас несколько групп одинаковых предметов (например, два шарика красных и три шарика синих),

то вместо k! пишем

k1! (количество красных)*k2! (количество синих)

$$\frac{n!}{k1! * k2!}$$

Перестановки с повторениями

- Сколько различных браслетов можно сделать из пяти одинаковых изумрудов, шести одинаковых рубинов и семи одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?

Перестановки с повторениями

Всего 18 камней

изумрудов 5

рубинов 6

сапфиров 7

n = 18

k1 = 5

k2=6

k3=7

$$P = \frac{n!}{k1!*k2!*k3!} = \frac{18!}{5!*6!*7!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12*13*14*15*16*17*18}{1*2*3*4*5*1*2*3*4*5*6*1*2*3*4*5*6*7}$$

Перестановки с повторениями

$$\frac{\cancel{1\ast2\ast3\ast4\ast5\ast6\ast7}\ast8\ast9\ast10\ast11\ast12\ast13\ast14\ast15\ast16\ast17\ast18}{1\ast2\ast3\ast4\ast5\ast1\ast2\ast3\ast4\ast5\ast6\ast\cancel{1\ast2\ast3\ast4\ast5\ast6\ast7}}$$

$$\frac{\cancel{8}\ast\cancel{9}\ast\cancel{10}\ast11\ast12\ast13\ast14\ast15\ast16\ast17\ast18}{\cancel{2}\ast\cancel{3}\ast\cancel{4}\ast\cancel{5}\ast\cancel{2}\ast\cancel{3}\ast4\ast5\ast6}$$

$$\frac{11\ast12\ast13\ast14\ast\overset{3}{\cancel{15}}\ast\overset{4}{\cancel{16}}\ast17\ast\overset{3}{\cancel{18}}}{\cancel{4}\ast\cancel{5}\ast\cancel{6}}$$

11* 12 * 13* 14 * 3 * 4 * 17 *3 = 14 702 688

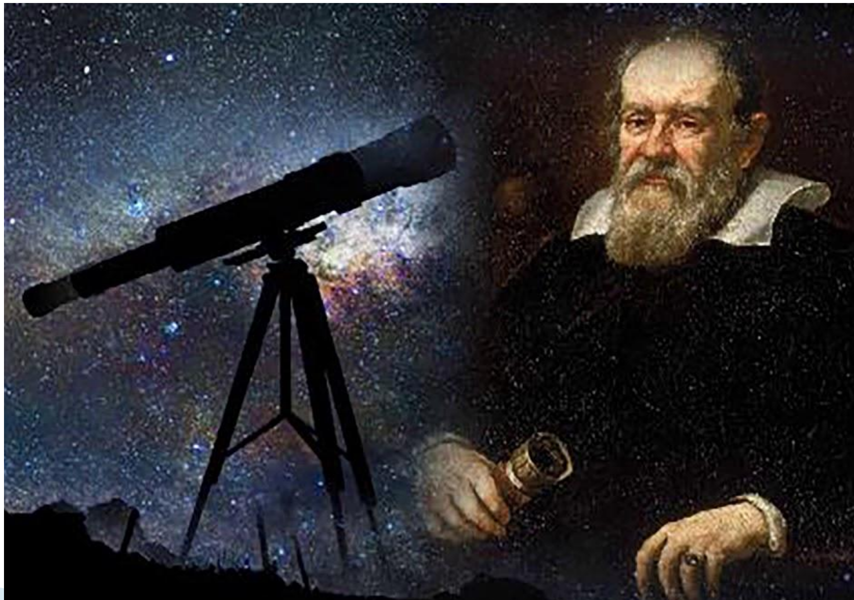
Домашнее задание 1.2

Анаграмма — это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв.

Например, *бьорд* является анаграммой слова *дробь*. Сколько всего анаграмм у слова *колобок*?

N – всего букв
k1 – букв К
k2 – букв О
k3 – букв Л
k4 – букв Б

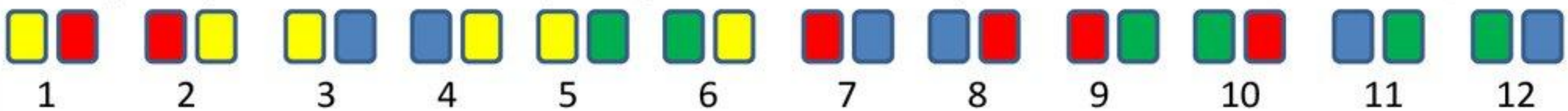
В XVIII—XIX веке среди естествоиспытателей было принято зашифровывать свои открытия в виде анаграмм, что служило двум нуждам: скрыть гипотезу до её окончательной проверки и утвердить авторство на открытие, когда оно будет подтверждено.
Так, Галилео Галилей зашифровал латинскую фразу *«Altissimun planetam tergeminum observavi»* *(«Высочайшую планету тройною наблюдал»)* следующим образом: *«Smaismrmielmepoetaleu mibuvnenugttaviras»*, закрепив свою заявку на открытие спутников Сатурна



Размещения без повторений

- Размещения – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, и различающиеся либо порядком расположения элементов, либо составом элементов (либо и тем, и другим)

Пример. Размещение двух карточек из четырёх возможных (n=4, m=2)



$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сколько предметов в одной группе

Количество вариантов

Количество всех предметов

Размещения без повторений

Всего карточек 4 (желтая, красная, синяя и зелёная) n =4

В группе по две карточки m=2

$$A = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1*2*3*4}{1*2} = 12$$

Размещения без повторений

Задача 3. Расписание одного дня состоит из *5 уроков*. Уроки в течение дня не повторяются. *Определить число вариантов* расписания при выборе из *11 дисциплин*.

Всего разных дисциплин 11, значит, n=11

За день может быть 5 предметов, значит, m=5

$$A = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11}{1*2*3*4*5*6}$$

$$\frac{\cancel{1*2*3*4*5*6}*7*8*9*10*11}{\cancel{1*2*3*4*5*6}}$$

7*8*9*10*11 = 55 440

Домашнее задание 2.1

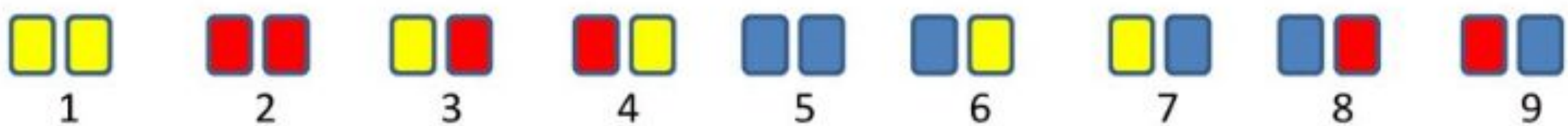
Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Эти города входят в «Золотое кольцо России» — туристский маршрут, проходящий по древним городам Северо-Восточной Руси, в которых сохранились уникальные памятники истории и культуры России, центрам народных ремёсел.

Размещения с повторениями

- Размещения с повторением – комбинации из n **типов** элементов, взятых по m штук

Пример. Размещения из 3 ***типов*** *карточек по две (n=3, m=2)*



$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Размещения с повторениями

- А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х.

Всего букв 12, значит, n =12

В номере по три буквы, значит, k =3

$A = 12^3 = 12*12*12 = 1\ 728$

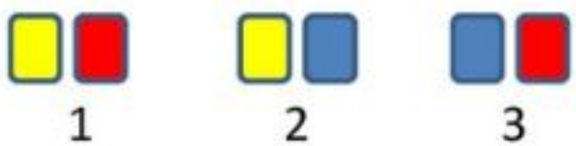
Домашнее задание 2.2

Пример 1.8. Есть по одному билету в театр, в цирк и на концерт.
Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

Сочетания без повторений

- Сочетания – комбинации, состоящие из n возможных элементов, взятых по m штук, которые различаются между собой хотя бы одним элементом (<u>без учёта порядка элементов!</u>)

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки (n=3, m=2)



$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

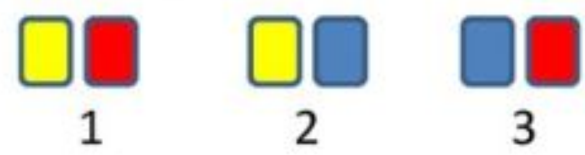
Количество вариантов

Сколько в группе

Всего предметов

Сочетания без повторений

Пример. Сочетания из 3 карточек по 2 карточки



Всего карточек 3 (жёлтая, синяя и красная) $n = 3$

В группе по 2 карточки $m = 2$

$$C = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1*2*3}{1*2*1} = \frac{6}{2} = 3$$

Сочетания без повторений

Имеются 5 различных соков. Сколько разных коктейлей можно получить, если для каждого берутся три сока?

Сочетания без повторений

Имеются 5 различных соков. Сколько разных коктейлей можно получить, если для каждого берутся три сока?

Всего разных соков 5, значит, n=5

В каждом коктейле 3 сока, значит, m=3

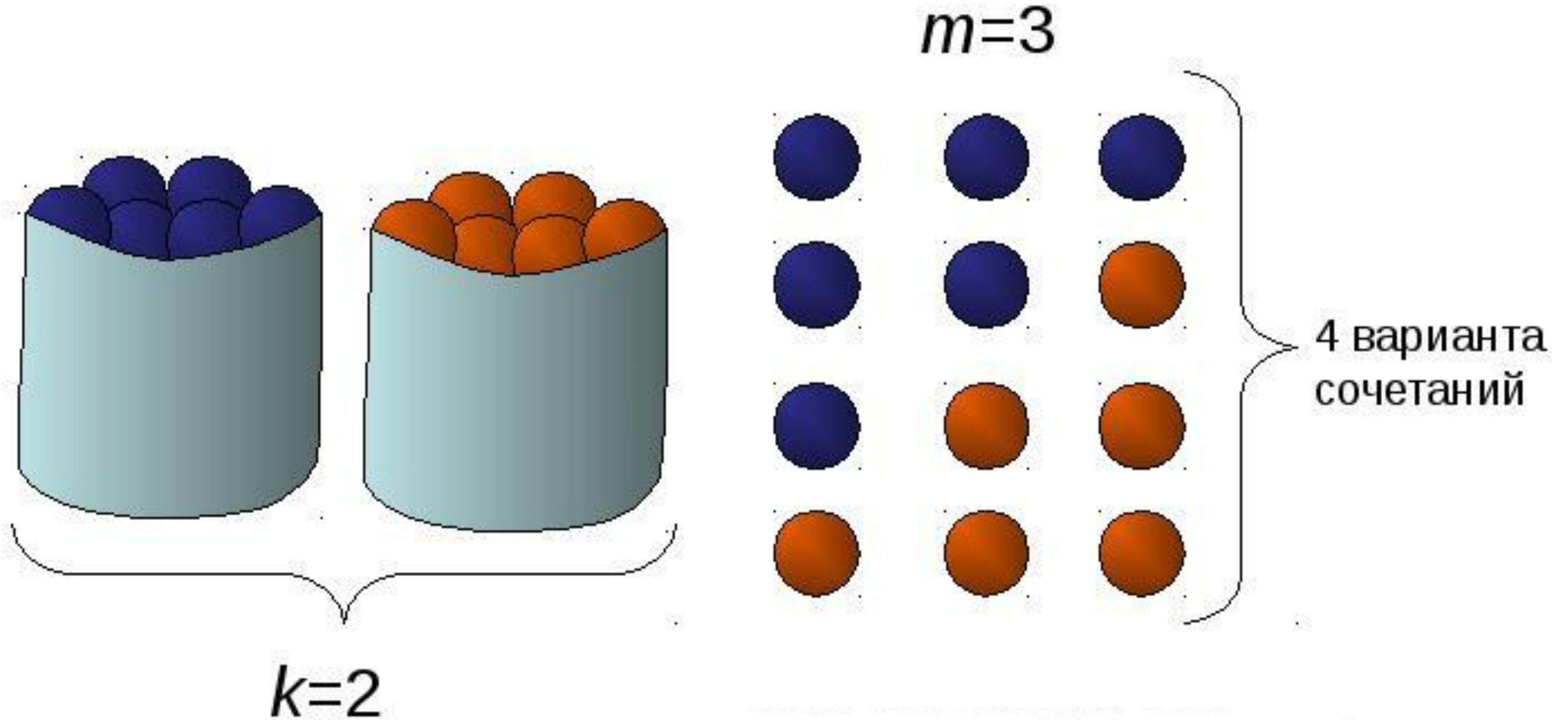
$$C = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2*3*1*2} = 10$$

Домашнее задание 3.1

Сколькими способами можно выбрать троих футболистов из 11 для прохождения допинг-контроля?

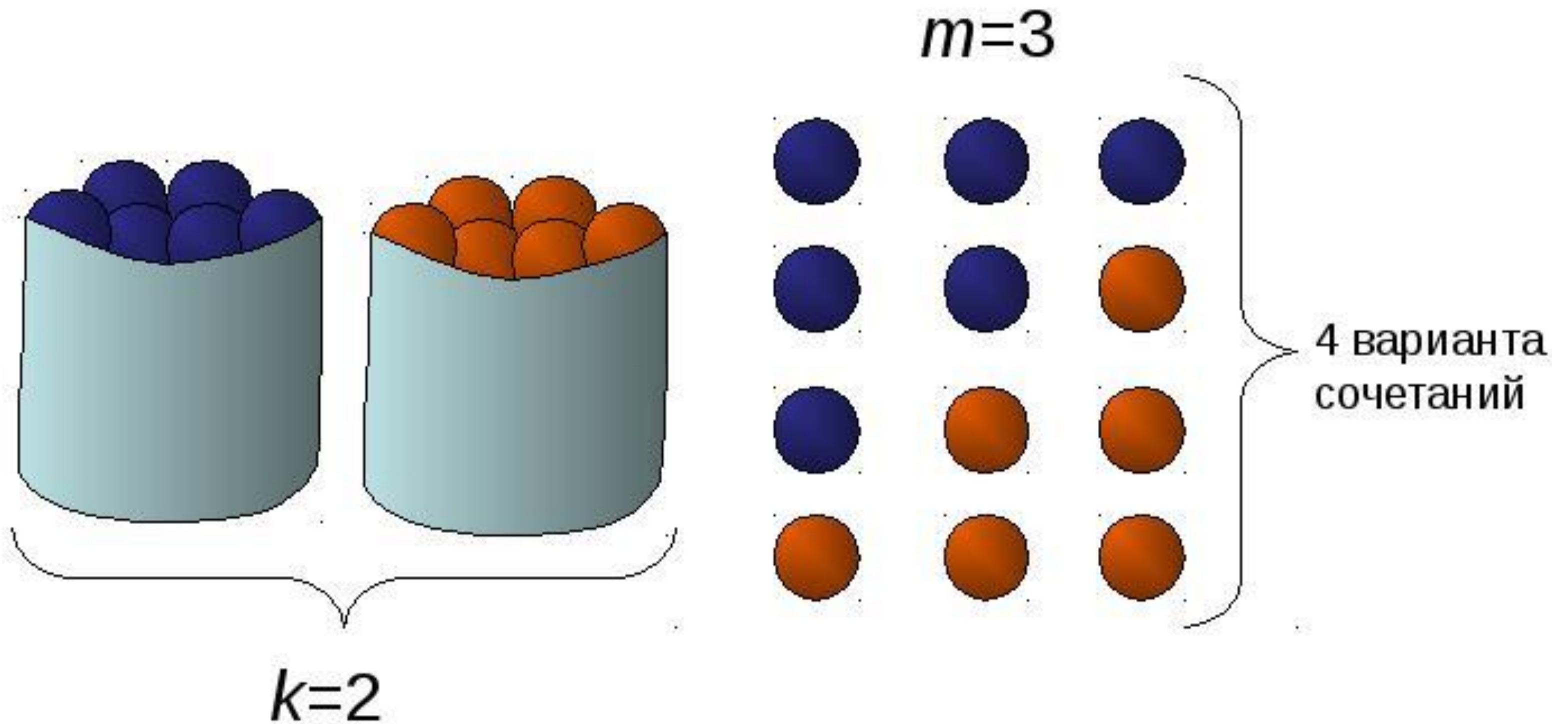
В Древней Греции с проблемой применения допинга боролись специальные комиссии. Хотя судьи в то время могли очень легко определить, принимал ли спортсмен стимулирующее средство перед началом соревнований, так как самым сильнодействующим средством был в то время **чеснок.**

Сочетания с повторениями



$$\overline{C_k^m} = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!}$$

Сочетания с повторениями



$$C = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!} = \frac{(2+3-1)!}{3!*(2-1)!} = \frac{4!}{3!*1!} = \frac{1*2*3*4}{1*2*3} = 4$$

Сочетания с повторениями

В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

Сочетания с повторениями

В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

3 вида пирожных, значит, k =3

Надо купить 9 пирожных, значит, в каждой группе по 9, то есть m=9

$$C = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!} = \frac{(3+9-1)!}{9!*(3-1)!} = \frac{11!}{9!*2!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11}{1*2*3*4*5*6*7*8*9*1*2} =$$

$$\frac{\cancel{1*2*3*4*5*6*7*8*9}*\overset{5}{\cancel{10}}*11}{\cancel{1*2*3*4*5*6*7*8*9}*1*\cancel{2}} = 5*11=55$$

Домашнее задание 3.2

На почте пять видов открыток к Новому году. Сколькими способами из них можно выбрать семь открыток?