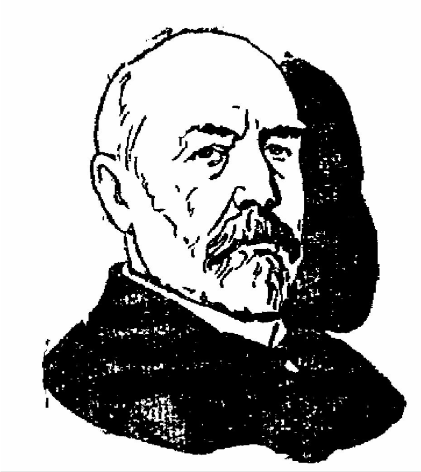
# КОМПЬЮТЕРНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОЖЕСТ В ЭВМ

**ЛЕКЦИЯ 1**

# Историческая справка

- Немецкий ученый, математик, создатель теории множеств
- Родился в Петербурге в 1845г.
- В 1867 г. окончил Берлинский университет
- В 1872-1913 гг. – профессор университета в Галле
- Сформулировал общее понятие мощности множества (1878)
- Развил принципы сравнения мощностей множеств и
- Систематически изложил принципы своего учения
- Созданная Кантором теория множеств, некоторые идеи которой имелись у его предшественников, послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю современную ее структуру.



**Георг Кантор (XIX-XXвв.)**

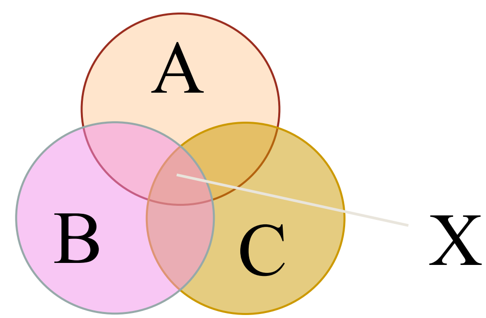
# Объекты изучения: множество, элемент множества, операции над множествами

**Цели**:

1) описать способы хранения информации о принадлежности элемента множеству,
2) описать алгоритмы для вычисления результатов операций над множествами

Один и тот же объект может быть представлен разными способами. Выбор представления зависит от многих факторов: особенностей представляемого объекта, частоты его использования в задаче и т. д. Программисту надо знать много способов и уметь выбрать наиболее подходящий для рассматриваемой задачи.

# Некоторые способы задания множеств

| Способ | Пример |
|---|---|
| Перечислением элементов | $\{a,b,c\}$, $A=\{1,3,5,7\}$ |
| Характеристическим свойством $M=\{\, x \mid P(x)\, \}$ P – характеристическое свойство элементов x | $M=\{x \mid x=2k,\ k\in N\}$ - множество четных натуральных чисел; $M=\{x \mid \sin x=1\}$ - множество решений уравнения $\sin x=1$. |
| Порождающей процедурой (например, операции над множествами) | $X=(A\cup B)\cap C$ |
| Графически при помощи диаграмм Эйлера |   |

# Булеан. Мощность булеана

- **Булеан** – множество всех подмножеств данного множества M
- Обозначение: **B(M)**
- **Пример**: дано множество A={a,b,c}. Найти B(A).

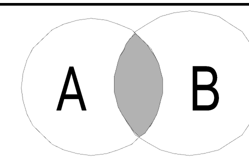
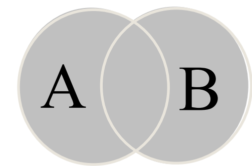
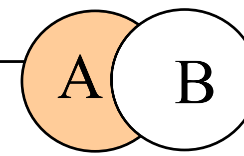
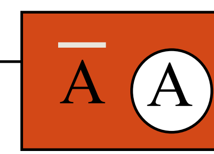
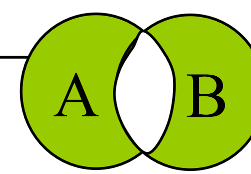
$$B(A)=\{\ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\ \}$$

- **Мощность булеана** определяется по формуле:

$$|B(M)|=2^{|M|}$$

- Пустое множество и само множество являются **несобственными** подмножествами множества M
- Остальные подмножества – **собственные**

# Операции над множествами

| Название операции | Определение | Диаграммы Эйлера |
|---|---|---|
| Пересечение | $A \cap B = \{\, x \mid x \in A$ и $x \in B \,\}$ |  |
| Объединение | $A \cup B = \{\, x \mid x \in A$ или $x \in B \,\}$ |  |
| Разность | $A \setminus B = \{\, x \mid x \in A$ и $x \notin B \,\}$ |  |
| Дополнение | $\overline{A} = U \setminus A = \{\, x \mid x \in U$ и $x \notin A \,\}$ |  |
| Симметрическая разность | $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ |  |

# машинным словом или битовой шкалой

Пусть универсальное множество конечно и число *n* его элементов не превосходит разрядности ЭВМ. Занумеруем элементы универсума, т. е. . Подмножество А универсума представляется кодом С, в котором

где $C[i]=\begin{cases}1, \text{если } u_i \in A,\\ 0, \text{если } u_i \notin A,\end{cases}$ - это *i*-тый разряд кода С. Тогда, код пересечения множеств А и В есть поразрядное логическое произведение $C[i]$ кода множества А и кода множества В. Код объединения множеств А и В есть поразрядная логическая сумма кода множества А и кода множества В. Код дополнения множеств А до универсума есть инверсия кода множества А. в большинстве ЭВМ для этих операций есть соответствующие команды. Таким образом, операции над небольшими множествами выполняются эффективно.

# Представление множества упорядоченными списками

- Если универсум очень велик или бесконечен, а рассматриваемые подмножества не очень велики, то представление с помощью битовых шкал не является эффективным с точки зрения экономии памяти. В этом случае множества представляют списками элементов, часто упорядоченными.
- Эффективная реализация операций над множествами в этом случае основана на общем алгоритме, известном под названием «Алгоритм типа слияния».
- Такой алгоритм параллельно просматривает два множества, представленных упорядоченными списками, причем на каждом шаге продвижение происходит в том множестве, в котором текущий элемент меньше.

# Алгоритм нахождения пересечения слиянием

- Множества будем хранить как массив с нумерацией элементов, начинающейся с единицы.
- Обозначим через $i$ номер текущего рассматриваемого элемента в множестве A, через $j$ – номер текущего рассматриваемого элемента множества B. Будем получать множество P, представляющее собой пересечение множеств A и B. Через $k$ обозначим мощность множества P. Также $k$ будет и номером последнего добавленного элемента в P

# Алгоритм решения

- Положить i = j = 1 и k = 0.
- Если в A и B (одновременно) есть ещё не просмотренные элементы, выполнить:
  - Если A[i] = B[j], то выполнить:
    1. Добавить A[i] в P, то есть k := k + 1 и P[k] := A[i]
    2. Перейти к следующим элементам множеств A, B, то есть i := i + 1 и j := j + 1
  - Если A[i] < B[j], то перейти к следующему элементу множества A, то есть i := i +1
  - В остальных случаях (то есть когда A[i] > B[j]) перейти к следующему элементу множества B, то есть j := j + 1
  - Перейти к пункту 2.
- **Пример.** $A = \{1,3,6,8,9\}$ $B = \{3,4,5,6,7\}$
- 
- Сравниваемые пары: (1,3), (3,3), (6,4), (6,5), (6,6), (8,7)
- P 3 6

# Алгоритм нахождения объединения слиянием

Обозначим через i номер текущего рассматриваемого элемента в множестве A, через j – номер текущего рассматриваемого элемента множества B. Будем получать множество P, представляющее собой объединение множеств A и B. Через k обозначим мощность множества P. Также k будет и номером последнего добавленного элемента в P.

# Алгоритм решения.

Положить $i = j = 1$, $k = 0$.

Если ещё не просмотрены все элементы множеств A, B выполнить:

Если в A ещё есть элементы, и в B есть элементы и $A[i] = B[j]$, то

i. Добавить $A[i]$ в P, то есть $k := k + 1$ и $P[k] := A[i]$
ii. Перейти к следующим элементам в A и B, то есть $i := i + 1$ и $j := j + 1$

Если в B уже все элементы были просмотрены или же $A[i] < B[j]$ (при условии, что в A не все элементы были просмотрены) выполнить:

iii. Добавить $A[i]$ в P, то есть $k := k + 1$ и $P[k] := A[i]$
iv. Перейти к следующему элементу множества A, то есть $i := i + 1$

Во всех остальных случаях (то есть когда в A уже все элементы просмотрены или же если $A[i] > B[j]$) выполнить:

i. Добавить $B[j]$ в P, то есть $k := k + 1$ и $P[k] := B[j]$;
ii. Перейти к следующему элементу множества B, то есть $j := j + 1$

Перейти к пункту 2.

Как видно, на каждом шаге мы добавляем в P минимальный элемент из $A[i]$ и $B[j]$ и переходим к рассмотрению следующего элемента.

**Пример.** $A = \{1,3,6,8,9\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$

Сравниваемые пары: (1,3), (3,3), (6,4), (6,5), (6,6), (8,7)

P 1 3 4 5 6 7 8 9