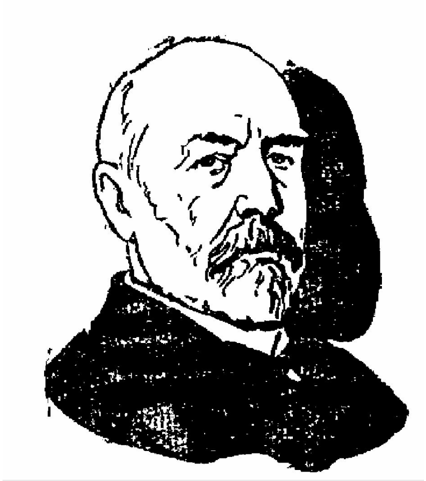
КОМПЬЮТЕРНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОЖЕСТ В ЭВМ

ЛЕКЦИЯ 1

Историческая справка

- **Немецкий ученый, математик, создатель теории множеств**
- **Родился в Петербурге в 1845г.**
- **В 1867 г. окончил Берлинский университет**
- **В 1872-1913 гг. – профессор университета в Галле**
- **Сформулировал общее понятие мощности множества (1878)**
- **Развил принципы сравнения мощностей множеств и**
- **Систематически изложил принципы своего учения**
- **Созданная Кантором теория множеств, некоторые идеи которой имелись у его предшественников, послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю современную ее структуру.**



Георг Кантор (XIX-XXвв.)

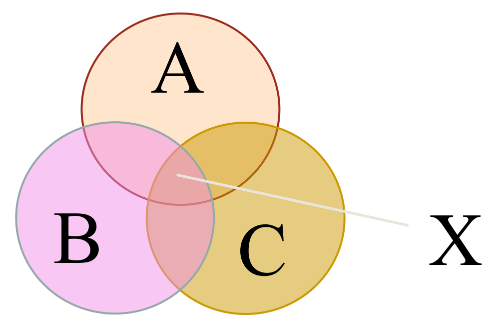
Объекты изучения: множество, элемент множества, операции над множествами

Цели:

1) описать способы хранения информации о принадлежности элемента множеству,
2) описать алгоритмы для вычисления результатов операций над множествами

Один и тот же объект может быть представлен разными способами. Выбор представления зависит от многих факторов: особенностей представляемого объекта, частоты его использования в задаче и т. д. Программисту надо знать много способов и уметь выбрать наиболее подходящий для рассматриваемой задачи.

Некоторые способы задания множеств

Способ	Пример
Перечислением элементов	$\{a,b,c\}$, $A=\{1,3,5,7\}$
Характеристическим свойством $M=\{\, x \mid P(x) \,\}$ P – характеристическое свойство элементов x	$M=\{x \mid x=2k,\ k\in N\}$- множество четных натуральных чисел; $M=\{x \mid \sin x =1\}$- множество решений уравнения $\sin x =1$.
Порождающей процедурой (например, операции над множествами)	$X=(A\cup B)\cap C$
Графически при помощи диаграмм Эйлера	

Булеан. Мощность булеана

- **Булеан** – множество всех подмножеств данного множества M
- Обозначение: **B(M)**
- **Пример**: дано множество A={a,b,c}. Найти B(A).

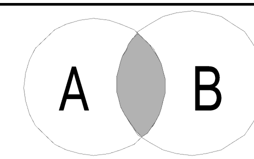
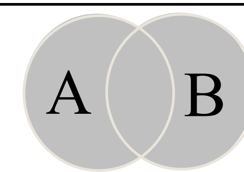
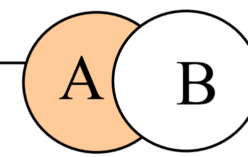
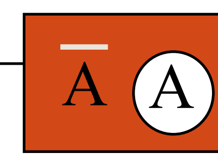
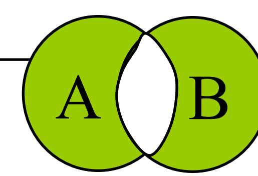
$$B(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

- **Мощность булеана** определяется по формуле:

$$|B(M)|=2^{|M|}$$

- Пустое множество и само множество являются **несобственными** подмножествами множества M
- Остальные подмножества – **собственные**

Операции над множествами

Название операции	Определение	Диаграммы Эйлера
Пересечение	$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}$	
Объединение	$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}$	
Разность	$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$	
Дополнение	$\overline{A} = U \setminus A = \{ x \mid x \in U \text{ и } x \notin A \}$	
Симметрическая разность	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	

машинным словом или битовой шкалой

Пусть универсальное множество конечно и число *n* его элементов не превосходит разрядности ЭВМ. Занумеруем элементы универсума, т. е. . Подмножество А универсума представляется кодом С, в котором

где $C[i] = \begin{cases} 1, \text{если } u_i \in A, \\ 0, \text{если } u_i \notin A, \end{cases}$ - это *i*-тый разряд кода С. Тогда, код пересечения множеств А и В есть поразрядное логическое произведение кода множества А и кода множества В. Код объединения множеств А и В есть поразрядная логическая сумма кода множества А и кода множества В. Код дополнения множеств А до универсума есть инверсия кода множества А. в большинстве ЭВМ для этих операций есть соответствующие команды. Таким образом, операции над небольшими множествами выполняются эффективно.

Представление множества упорядоченными списками

- Если универсум очень велик или бесконечен, а рассматриваемые подмножества не очень велики, то представление с помощью битовых шкал не является эффективным с точки зрения экономии памяти. В этом случае множества представляют списками элементов, часто упорядоченными.
- Эффективная реализация операций над множествами в этом случае основана на общем алгоритме, известном под названием «Алгоритм типа слияния».
- Такой алгоритм параллельно просматривает два множества, представленных упорядоченными списками, причем на каждом шаге продвижение происходит в том множестве, в котором текущий элемент меньше.

Алгоритм нахождения пересечения слиянием

- Множества будем хранить как массив с нумерацией элементов, начинающейся с единицы.
- Обозначим через i номер текущего рассматриваемого элемента в множестве A, через j – номер текущего рассматриваемого элемента множества B. Будем получать множество P, представляющее собой пересечение множеств A и B. Через k обозначим мощность множества P. Также k будет и номером последнего добавленного элемента в P

Алгоритм решения

- Положить i = j = 1 и k = 0.
- Если в A и B (одновременно) есть ещё не просмотренные элементы, выполнить:
  - Если A[i] = B[j], то выполнить:
    1. Добавить A[i] в P, то есть k := k + 1 и P[k] := A[i]
    2. Перейти к следующим элементам множеств A, B, то есть i := i + 1 и j := j + 1
  - Если A[i] < B[j], то перейти к следующему элементу множества A, то есть i := i +1
  - В остальных случаях (то есть когда A[i] > B[j]) перейти к следующему элементу множества B, то есть j := j + 1
  - Перейти к пункту 2.
- **Пример.** $A = \{1,3,6,8,9\}$ $B = \{3,4,5,6,7\}$
-
- Сравниваемые пары: (1,3), (3,3), (6,4), (6,5), (6,6), (8,7)
- P 3 6

Алгоритм нахождения объединения слиянием

Обозначим через i номер текущего рассматриваемого элемента в множестве A, через j – номер текущего рассматриваемого элемента множества B. Будем получать множество P, представляющее собой объединение множеств A и B. Через k обозначим мощность множества P. Также k будет и номером последнего добавленного элемента в P.

Алгоритм решения.

Положить i = j =1, k = 0.

Если ещё не просмотрены все элементы множеств A, B выполнить:

Если в A ещё есть элементы, и в B есть элементы и A[i] = B[j], то

i. Добавить A[i] в P, то есть k := k + 1 и P[k] := A[i]
ii. Перейти к следующим элементам в A и B, то есть i := i + 1 и j := j + 1

Если в B уже все элементы были просмотрены или же A[i] < B[j] (при условии, что в A не все элементы были просмотрены) выполнить:

iii. Добавить A[i] в P, то есть k := k + 1 и P[k] := A[i]
iv. Перейти к следующему элементу множества A, то есть i := i + 1

Во всех остальных случаях (то есть когда в A уже все элементы просмотрены или же если A[i] > B[j]) выполнить:

i. Добавить B[j] в P, то есть k := k + 1 и P[k] := B[j];
ii. Перейти к следующему элементу множества B, то есть j := j + 1

Перейти к пункту 2.

Как видно, на каждом шаге мы добавляем в P минимальный элемент из A[i] и B[j] и переходим к рассмотрению следующего элемента.

Пример. $A = \{1,3,6,8,9\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$

Сравниваемые пары: (1,3), (3,3), (6,4), (6,5), (6,6), (8,7)

P 1 3 4 5 6 7 8 9