Системы счисления

§ 7. Системы счисления
§ 8. Двоичная система счисления
§ 9. Восьмеричная система счисления
§ 10. Шестнадцатеричная система счисления

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018 http://kpolyakov.spb.ru

Системы счисления

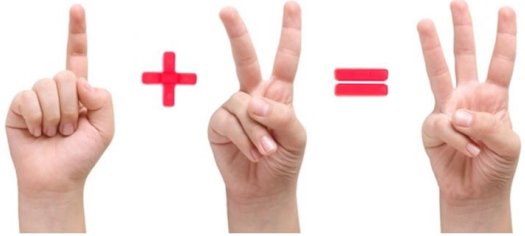
§ 1. Кодирование чисел

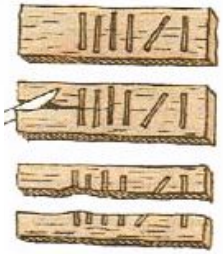
© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018

Что такое система счисления?

Система счисления — это правила записи чисел с помощью специальных знаков — ***цифр***, а также соответствующие правила выполнения операций с этими числами.

Счёт на пальцах:





Унарная (лат. *unus* – один) – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, …)

- только натуральные числа
- запись больших чисел – длинная (1 000 000?)

Непозиционные системы счисления

Непозиционная система счисления — это такая система, в которой значение цифры не зависит от её места (позиции) в записи числа.

- унарная
- египетская десятичная
- римская
- славянская
- и другие…

Египетская десятичная система

черта – 1

хомут – 10

верёвка – 100

лотос – 1000

палец – 10000

лягушка – 100000

человек – 1000000

= 1235

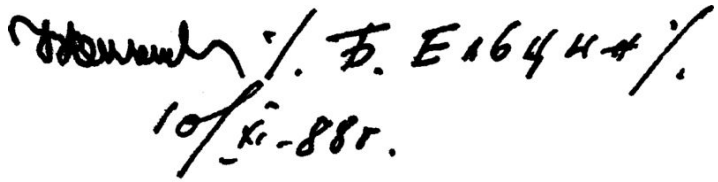
2014 =

Римская система счисления

ГЛАВА V.

Изслѣдованіе истоковъ Желтой рѣки. (прод.).

Свѣдѣнія о тангутахъ кам и голыкъ. — Нашъ обратный путь. — Охота за горными баранами. — Опасная случайность. — Вновь на тибетскомъ плато. — Мѣстность по р. Джагыкъ-голъ. — Развѣдочный



- **I** – 1 (палец)
- **V** – 5 (раскрытая ладонь)
- **X** – 10 (две ладони)
- **L** – 50
- **C** – 100 (*Centum*)
- **D** – 500 (*Demimille*)
- **M** – 1000 (*Mille*)

Спасская башня Московского Кремля

Римская система счисления

Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна**!) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично* непозиционная!)

Примеры:

MDC**X**L**I**V = 1000 + 500 + 100 **– 10** + 50 **– 1** + 5 = 1644

2389 = 2000 + 300 + 80 + 9

M M **CCC** **LXXX** **IX**

2389 = M M C C C L X X X I X

Римская система счисления

MCDLXVII =

MMDCXLIV =

MMMCCLXXII =

CMXXVIII =

Римская система счисления

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления

- только натуральные числа (*дробные*? *отрицательные*?)
- для записи больших чисел нужно вводить новые цифры
- слож

Какое максимальное число можно записать?

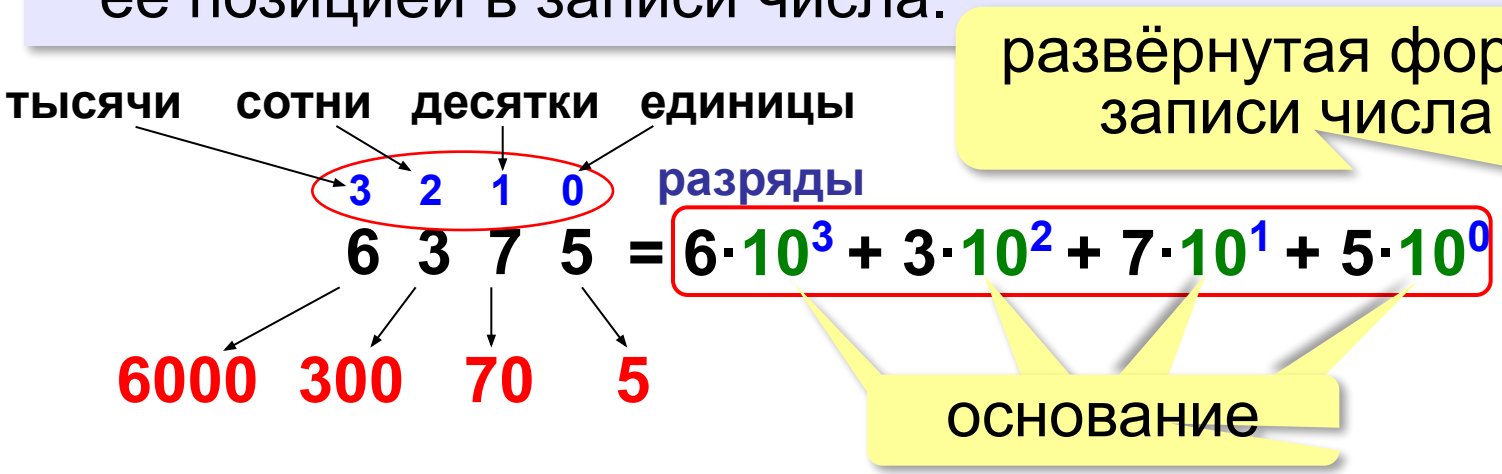
Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)

Часы Суздальского Кремля

Определения

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.



Алфавит системы счисления — это используемый в ней набор цифр.

Основание системы счисления — это количество цифр в алфавите (мощность алфавита).

Разряд — это позиция цифры в записи числа. Разряды в записи целых чисел нумеруются с нуля справа налево.

Другие позиционные системы

- двоичная

$$10110_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 22$$

- восьмеричная

$$145_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 101$$

система счисления

- шестнадцатеричная

$$123_{16} = 1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 291$$

- и другие…

$$123_5 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 38$$

456_7 102_2 365_{12}

578_8 172_9 521_4

$N^0 = 1$

Что неверно?

Позиционные системы счисления

Задача. В некоторой системе счисления число **58** записывается как 46_x. *Определите основание x этой системы счисления.*

Переведём 46_x в десятичную систему:

$$46_x = 4 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0 = 4x + 6$$

$$4x + 6 = 58$$

$$4x = 52 \qquad x = 13$$

Системы счисления

§ 2. Двоичная система счисления

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018

Двоичная система счисления

Основание (количество цифр): **2**

Алфавит: **0, 1**

- нужны только устройства с **двумя состояниями**
- компьютеру проще выполнять **вычисления** (умножение сводится сложению и т.п.)

- **длинная** запись чисел: $1024 = 10000000000_2$
- запись **однородна** (только 0 и 1)

Перевод в десятичную систему

2 → 10

4 3 2 1 0 разряды

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

10 → 2

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

Выделение степеней числа 2:

$$21 = 16 + 5 = 16 + 4 + 1 = 10101_2$$

2^4 2^4 2^2 2^0

$$21 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

1 0 1 0 1

Выделение степеней числа 2

77 **10 → 2**

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
				1	0	0	1	1	0	1

77 = 64 + 8 + 4 + 1

$$77 = 1001101_2$$

Другой способ

4 3 2 1 0

$$10011_2 = 1\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 =$$

$$= (1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0)\cdot2 + 1$$

? Какое число?

делится на 2

остаток от деления на 2

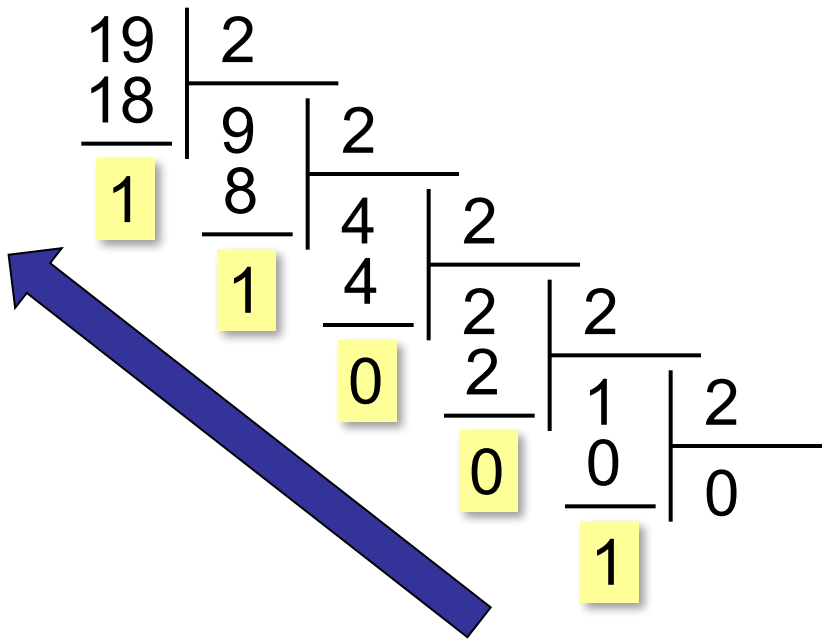
$$1001_2 = 10011_2 : 2$$

деление нацело

! Последняя цифра двоичной записи числа = остатку от его деления на 2!

Другой способ

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

Какое определить, что число чётное?

Сложение в двоичной системе

10

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ 7\,8\,9 \\ +\,5\,6\,7 \\ \hline 1\,3\,5\,6 \end{array}$$

? Когда перенос?

2

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0_2 \\ +\,1\,1\,1\,0\,1\,1_2 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,0\,0\,1_2 \end{array}$$

! Перенос, когда > 1!

$$1 + 1 = 2 = 10_2$$

$$1 + 1 + 1 = 3 = 11_2$$

Сложение в двоичной системе

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\ 11111_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10111_2 \\ +101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ +\ 11011_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111011_2 \\ +\ 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Вычитание в двоичной системе

10

+10 +10

0 9 1

1 0 2 1

– 5 6 7

0 4 5 4

2

+2 +2

0 1 1 0

1 0 0 0 1 0 1$_2$

– 1 1 0 1 1$_2$

0 1 0 1 0 1 0$_2$

Когда берем заём? Чему он равен?

Заём равен 2!

Вычитание в двоичной системе

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ -\ 11111_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11011_2 \\ -110101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110011_2 \\ -\ 10101_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110101_2 \\ -\ 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

§ 3. Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система счисления

Основание: **8**

Алфавит: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**

Что неправильно?

3275_8 6986_8

5482_8 319_8

Из восьмеричной в десятичную

8 → 10

2 1 0 разряды

$$144_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$$
$$= 64 + 32 + 4 = 100$$

Переведите:

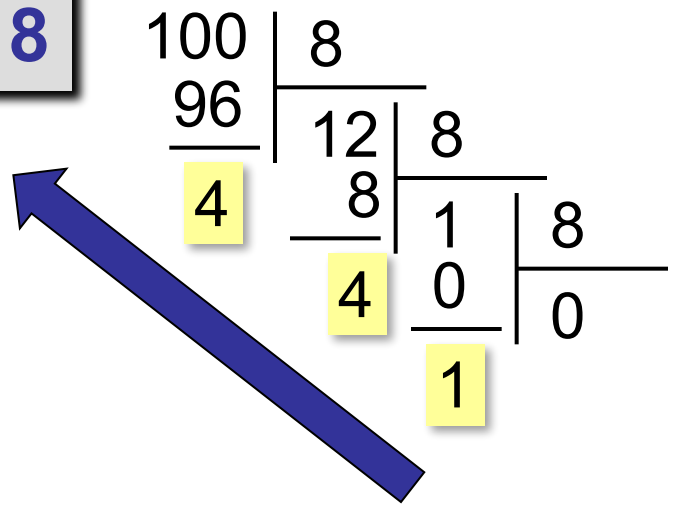
$12_8 =$
$57_8 =$
$64_8 =$
$77_8 =$

? На что делится?

120_8
5700_8

Восьмеричная система счисления

10 → 8



$100 = 144_8$

Переведите:

31=

91=

126 =

172 =

Связь с двоичной системой

$753_8 = 7 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$

$= 7 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^0$

$111_2 \quad 101_2 \quad 011_2$

$8 = 2^3$

$753_8 = (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^6$

$+$

$(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^3$

$+$

$753_8 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 +$

$(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot$

$0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111101011_2$

Каждая цифра отдельно!

Связь с двоичной системой

$$8 = 2^3$$

Каждая восьмеричная цифра может быть записана как **три** двоичных (***триада***)!

$$1625_8 = \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}{}_2$$

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111

Перевод из двоичной в восьмеричную

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$$

1 1 3 5 7

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Связь с двоичной системой

Переведите в двоичную систему:

$375_8 =$

$5246_8 =$

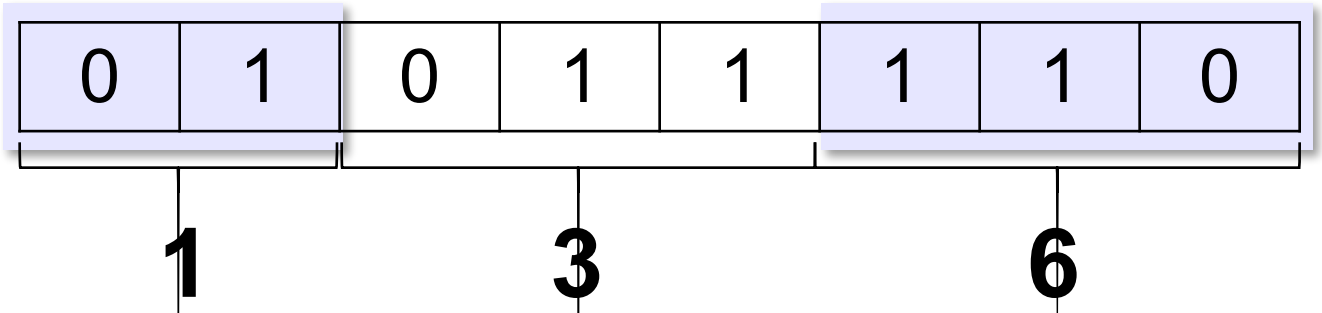
Переведите в восьмеричную систему:

$1010011_2 =$

$10101100_2 =$

Сжатая запись двоичных кодов

PDP-11, ДВК, СМ ЭВМ, БЭСМ, БК



136_8

Запишите в сжатой форме:

1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1

Сложение

сложение

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ \ } \\ 156_8 \\ +\ 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

1 в перенос

1 в перенос

$6 + 2 = 8 = \mathbf{8} + 0$

$5 + 6 + \mathbf{1} = 12 = \mathbf{8} + 4$

$1 + 6 + \mathbf{1} = \mathbf{8} = \mathbf{8} + 0$

1 в перенос

Вычитание

вычитание

заём

$$\begin{array}{r} 456_8 \\ -\ 277_8 \\ \hline 157_8 \end{array}$$

$(6 + 8) - 7 = 7$ заём

$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$

$(4 - 1) - 2 = 1$

Выполните сложение и вычитание

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ +\ 736_8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1156_8 \\ -\ 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ +\ 777_8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 156_8 \\ -\ 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

§ 4. Шестнадцатеричная система счисления

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2018 http://kpolyakov.spb.ru

Шестнадцатеричная система

Основание: **16**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**
10, 11, 12, 13, 14, 15

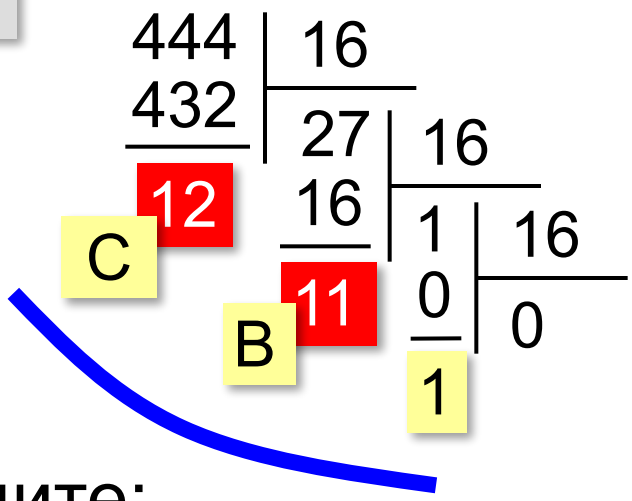
Что неправильно?

$34AF5_{16}$ **$5BG6_{16}$**

$9FF61_{16}$ **$ADH23_{16}$**

Перевод в шестнадцатеричную систему

10 → 16



444 = 1BC$_{16}$

Переведите:

31=

91=

126 =

172 =

Перевод из шестнадцатеричной системы

16 → 10

разряды 2 1 0

$1BC_{16} = 1 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + C$

$12 \cdot 16^0$

Переведите: $= 256 + 176 + 12 = 444$

? На что делится?

$12_{16} =$

$5A_{16} =$

$B9_{16} =$

$AB_{16} =$

120_{16}

5700_{16}

Связь с двоичной системой счисления

$$16 = 2^4$$

Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как **четыре** двоичных (***тетрада***)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1111}_{F_{(15)}}\ \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1010}_{A_{(10)}}{}_{2}$$

0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

8	9	A(10)	B(11)	C(12)	D(13)	E(14)	F(15)
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Перевод из двоичной системы

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

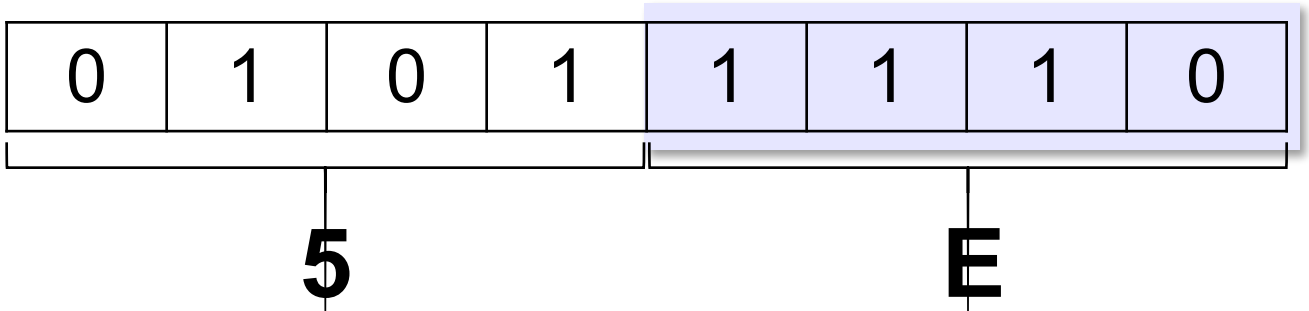
$$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$$

1 2 E F

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

Сжатая запись двоичных кодов

Intel, AMD, ARM



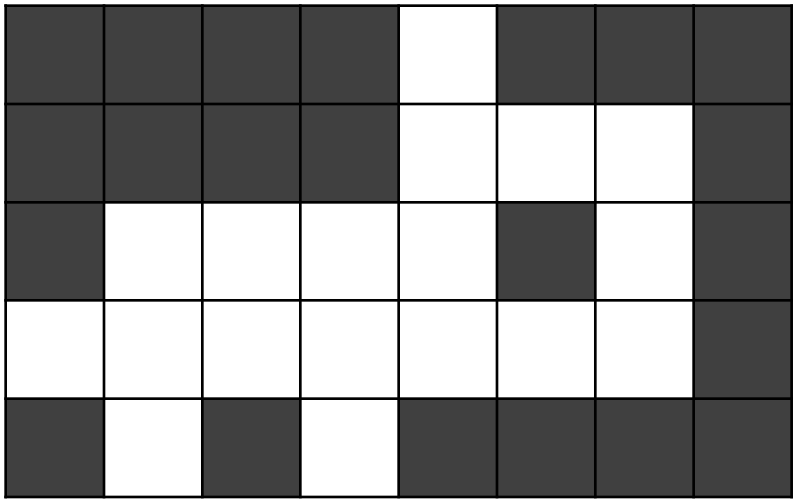
$5E_{16}$

Запишите в сжатой форме:

1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1

Сжатая запись двоичных кодов

Закодируйте рисунок и запишите в сжатой форме:



0	0	0	0	1	0	0	0

Связь с двоичной системой счисления

Переведите в двоичную систему:

$$EA1238_{16} =$$

Переведите в шестнадцатеричную систему :

$$11111010011_{2} =$$

Переведите в восьмеричную систему :

$$2FA_{16} =$$

Переведите в шестнадцатеричную систему :

$$165_{8} =$$

Сложение

сложение

$$\begin{array}{r} A\,5\,B_{16} \\ +\quad C\,7\,E_{16} \\ \hline 1\,6\,D\,9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\quad\;\; 1\quad\;\; \\ 10\;\;5\;\;11 \\ +\;\;12\;\;7\;\;14 \\ \hline 1\;\;6\;\;13\;\;9 \end{array}$$

1 в перенос

11+14=25=**16**+9

5+7+**1**=**13**=D_{16}

1 в перенос

10+12=22=**16**+6

Вычитание

вычитание

$$\begin{array}{r} C\ 5\ B_{16} \\ -\ A\ 7\ E_{16} \\ \hline 1\ D\ D_{16} \end{array}$$

заём

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot}{12}\ \ 5\ \overset{\cdot}{11} \\ -\ 10\ \ 7\ \ 14 \\ \hline 1\ \ 13\ 13 \end{array}$$

заём

$(11+16)-14=13=D_{16}$

$(5-1)+16-7=13=D_{16}$

$(12-1)-10=1$

Арифметические действия

$$\begin{array}{r} CBA_{16} \\ +\ A5 \\ \hline 9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1BA_{16} \\ -\ A59_{16} \\ \hline \end{array}$$

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь
eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. itfoundations.com
2. museum.comp-school.ru
3. иллюстрации художников издательства «Бином»
4. авторские материалы