Кредитные расчеты

D – величина займа;
n – срок кредита;
i – процентная ставка

Сам займ D называют *основным долгом*, наращиваемый добавок – *процентными деньгами*.

1. Погашение займа одним платежом в конце срока.

$$S = D(1+i)^n$$

Пример. Заём величиной 5000 руб. выдан на 5 лет под 12% годовых.
Тогда величина погашающего платежа составит

$$S = 5000 \cdot (1+0{,}12)^5 = 8811{,}71$$

2. Погашение основного долга одним платежом в конце срока.

Проценты за первый год: iD;

проценты за второй год: iD…

Платеж в конце года *n*: $D + iD$.

__Пример.__ Заём величиной 5000 руб. выдан на 5 лет под 12% годовых.

$$R_1 = R_2 = \dots = R_{n-1} = iD = 0{,}12 \cdot 5000 = 600;$$

$$R_n = 5000 + 600 = 5600.$$

3. Погашение основного долга равными годовыми выплатами.

Ежегодная выплата основного долга: D / n

Платеж в конце первого года: $R_1 = \frac{D}{n} + iD$

Платеж в конце второго года: $R_2 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{D}{n} \right)$

Платеж в конце года k: $R_k = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{(k-1)D}{n} \right)$

Платеж в конце года n: $R_n = \frac{D}{n} + i\frac{D}{n}$

Пример. Заём величиной 5000 руб. выдан на 5 лет под 12% годовых.

Номер периода	Остаток долга	Выплата по долгу	Выплата процентов	Срочная уплата
1	5000	1000	600	1600
2	4000	1000	480	1480
3	3000	1000	360	1360
4	2000	1000	240	1240
5	1000	1000	120	1120
Итого:	0	5000	1800	6800

4. Погашение займа равными годовыми выплатами.

$$D = Ra(n,i);$$

$$R = \frac{D}{(1-(1+i)^{-n})/i} = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}.$$

<u>*Пример.*</u> Заём величиной 5000 руб. выдан на 5 лет под 12% годовых.

$$a(n,i) = a(5;12) = 3{,}6048;$$

$$R = 5000\cdot\frac{0{,}12\cdot(1+0{,}12)^5}{(1+0{,}12)^5-1} = \frac{5000}{3{,}6048} = 1387{,}05$$

Погашение займа равными годовыми выплатами.

Номер периода	Остаток долга	Выплата по долгу	Выплата процентов	Срочная уплата
1	5000,00	787,05	600,00	1387,05
2	4212,95	881,49	505,55	1387,05
3	3331,46	987,27	399,77	1387,05
4	2344,18	1105,75	281,30	1387,05
5	1238,44	1238,44	148,61	1387,05
Итого:	0	5000	1935,24	6935,24

Некоторые закономерности:

$$D_1 = D\frac{i}{(1+i)^n - 1};\qquad D_{k+1} = D_k(1+i);$$

$$D_1 = R\frac{1}{(1+i)^n};\qquad D_k = R(1+i)^{-n+k-1};$$

Оплаченная часть долга:

$$O_C = D\frac{(1+i)^C - 1}{(1+i)^n - 1};$$

Остаток долга:

$$L_C = D - O_C = D\frac{(1+i)^n - (1+i)^C}{(1+i)^n - 1}$$

Если заданы расходы по обслуживанию долга (т.е. R), то срок погашения:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{D}{R} i\right)}{\ln(1+i)};$$

(решение существует при $Di/R < 1$)

Пример. Выдан кредит в размере 1000 тыс. руб. под 10% годовых. Для его погашения предполагается выделять сумму порядка 200 тыс. руб. в год. Каков срок погашения кредита?

Решение.

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{1000}{200} \cdot 0{,}1\right)}{\ln(1 + 0{,}1)} = \frac{0{,}693}{0{,}095} = 7{,}27.$$

Если n =7, то R =1000/a(7,10)= 205,406 тыс. руб.

Или при R = 200, n = 7 R_7 = 251,28 тыс. руб.

Общий метод погашения займа.

D – величина займа;

n – срок кредита;

i – процентная ставка

$$R_k = D_k + I_k;$$

$$\sum_{t=1}^{n} R_t (1+i)^{-t} = D;$$

$$I_t = i\left(D - \sum_{k=1}^{t-1} D_k \right); \quad \sum_{t=1}^{n} D_t = D;$$

$$L_k = D(1+i)^k - \sum_{t=1}^{k} R_t (1+i)^{k-t}$$

Заём выдан на 2 года.

Выплаты в конце 1го года: $D_1 + iD$.

Выплаты в конце 2го года: $D_2 = D - D_1$; $I_2 = iD_2$.

$$(D_1 + I_1)(1+i) + (D_2 + I_2) =$$

$$= (D_1 + iD)(1+i) + (D - D_1)(1+i) =$$

$$= (1+i)(D_1 + iD + D - D_1) = D(1+i)^2$$

$D_1, D_2, \ldots, D_n$ – платежи в счет основного долга D;

$I_1, I_2, \ldots, I_n$ – процентные платежи, начисленные на остаток долга.

$$iD_n(1+i)^{n-1} + iD_n(1+i)^{n-2} + \ldots + iD_n + D_n =$$

$$= iD_n\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1\right] + D_n =$$

$$= iD_n \frac{(1+i)^n - 1}{i} + D_n = D_n(1+i)^n.$$

$$\{D_k,\ k = 1, 2, \ldots, n-1\};\ (D - D_n)(1+i)^{n-1}(1+i);$$

$$D_n(1+i)^n + (D - D_n)(1+i)^n = D(1+i)^n$$

Проверим полученное практическими расчетами, для этого пересчитаем стоимость периодических платежей на конец 5го года (D = 5000 руб., n = 5 лет, i = 12% годовых).

Номер периода	Остаток долга	Выплата по долгу	Выплата процентов	Срочная уплата	Приведенные платежи
1	5000	0	600	600	944,11
2	5000	0	600	600	842,96
3	5000	0	600	600	752,64
4	5000	0	600	600	672,00
5	5000	5000	600	5600	5600,00
Итого:	0	5000	3000	8000	8811,71

Номер периода	Остаток долга	Выплата по долгу	Выплата процентов	Срочная уплата	Приведенные платежи
1	5000	1000	600	1600	2517,63
2	4000	1000	480	1480	2079,29
3	3000	1000	360	1360	1705,98
4	2000	1000	240	1240	1388,80
5	1000	1000	120	1120	1120,00
Итого:	0	5000	1800	6800	8811,71

Номер периода	Остаток долга	Выплата по долгу	Выплата процентов	Срочная уплата	Приведенные платежи
1	5000,00	787,05	600,00	1387,05	2182,55
2	4212,95	881,49	505,55	1387,05	1948,70
3	3331,46	987,27	399,77	1387,05	1739,91
4	2344,18	1105,75	281,30	1387,05	1553,49
5	1238,44	1238,44	148,61	1387,05	1387,05
Итого:	0	5000	1935,24	6935,24	8811,71

Потребительский кредит и его погашение

При выдаче потребительского кредита сразу на всю сумму кредита начисляются простые проценты, они прибавляются к величине самого кредита и сумма всех погашающих выплат должна быть равна этой величине. Существует несколько схем погашения потребительского кредита.

Потребительский кредит. Погашение равными выплатами.

Пусть кредит размером D взят на n лет, годовая ставка простых процентов i.

Всего надо набрать выплат на сумму $D(1+ni)$.

Если в год предусмотрено (договором о кредите) m выплат, то одна выплата равна $D(1+ni)/nm$.

Пример. Заём величиной 5000 руб. выдан на 5 лет под 12% годовых.

Решение.

$D(1+ ni) = 5000 \cdot (1+5 \cdot 0{,}12) = 8000$ руб.

Ежегодная выплата составит

$8000/5 = 1600$ руб.

Если предусмотрены ежемесячные выплаты, то величина разового (месячного) платежа составит $8000/(12 \cdot 5) = 133{,}33$ руб.

Какова ставка сложного процента, при которой современная величина выплат по кредиту равна его номинальной величине? Обозначим ее j. Имеем уравнение

$$\left[D(1+ni)/mn\right]\cdot a(mn,\, j/m) = D;$$

$$a(mn,\, j/m) = mn/(1+ni).$$

Для случая ежегодных выплат имеем:

$1600 \cdot a(5, j) = 5000$; $a(5, j) = 5000/1600 = 3{,}125$;

$j = 18\%$

[=СТАВКА(5; -1600; 5000)].

Для случая ежемесячных выплат имеем:

$133{,}33 \cdot a(5 \cdot 12, j_m) = 5000$;

$a(60, j_m) = 5000/133{,}33 = 37{,}5$; $j_m = 1{,}69\%$

[=СТАВКА(60; -133,33; 5000)].

Годовая ставка $j = j_m \cdot 12 = 20{,}31\%$.

Эффективная ставка равна 22,31%.

Потребительский кредит. Правило 78.

Долг *D* выплачивается равными долями, проценты *Dni* – выплатами, уменьшающимися в арифметической прогрессии, последняя выплата равна разности этой прогрессии.

m – число выплат в году;

d – величина последней выплаты;

mnd – величина первой выплаты.

$$d + 2d + \ldots + mnd = \frac{(1+mn)mnd}{2} = Dni$$

N – сумма номеров всех выплат;

$$N = 1 + 2 + \dots + mn = \frac{(1+mn)mn}{2};$$

$$Dni \,/\, N;$$

1я выплата – mn таких частей;

2я выплата – (mn – 1) таких частей;

…

Последний платеж – одна часть.

Пример. Заём величиной 5000 руб. выдан на 5 лет под 12% годовых.

Dni =3000 руб.

N=1+2+3+4+5=15

Долг	5000
Проценты	3000
N	15

Номер периода	Выплата по долгу	Выплата процентов	Срочная уплата
1	1000	1000	2000
2	1000	800	1800
3	1000	600	1600
4	1000	400	1400
5	1000	200	1200
Итого:	5000	3000	8000

Для расчета ставки сложного процента j можно воспользоваться функцией MS Excel ВСД:

=ВСД({-5000:2000:1800:1600:1400:1200})

(j = 20%)

Льготные кредиты

Пусть кредит размером D выдан на n лет по льготной ставке g, меньшей обычной ставки i, и будет погашаться равными выплатами y:

$$y \cdot a(n, g) = D; \quad y = D / a(n, g).$$

А если бы выплаты шли по обычной ставке i, то размер каждой выплаты составлял бы

$$z = D / a(n, i).$$

Разность $z - y = D/a(n, i) - D/a(n, g)$ – это ежегодные потери кредитора,

а современная величина ренты этих потерь по действующей ставке i, т.е.

$(z - y) \cdot a(n, i) = [D/a(n, i) - D/a(n, g)] \cdot a(n, i) =$
$= D\,[1 - a(n, i)/a(n, g)]$ – *абсолютный грант-элемент* (субсидия кредитора заемщику).

$[1 - a(n, i)/a(n, g)]$ – *относительный грант-элемент*.

Наращенная сумма абсолютного грант-элемента (наращенная сумма субсидии) называется *общими потерями кредитора*.

Пример. Пусть $D = 1000$, $n = 8$, $i = 8\%$, $g = 5\%$.

Находим выплаты по обычной ставке:
$z \cdot a(8, 8) = 1000$, $z = 1000/ 5{,}747$; $z = 174$.

Выплаты по льготной ставке:
$y \cdot a(8, 5) = 1000$, $y = 1000/6{,}463$; $y = 155$.

Ежегодные потери кредитора $z - y = 19$.

Относительный грант-элемент:
$1 - 5{,}747/6{,}463 = 0{,}111$.

Абсолютный грант-элемент: $1000 \cdot 0{,}111 = 111$.

Общие потери кредитора: $111 \cdot (1+0{,}08)^8 = 205$

Погашение традиционной ипотечной ссуды

Традиционная ипотечная ссуда погашается равными ежемесячными выплатами, на которые ежемесячно же начисляются проценты.

Пусть ссуда D выдана на срок n лет под годовую ставку сложных процентов i.

Равные ежемесячные выплаты размером y образуют ренту с частотой платежей и начислением процентов 12 раз в году.

Для определения y имеем уравнение

$$y \cdot s(12n, i/12) = D(1 + i/12)^{12n}.$$

Наращенная величина выданной ссуды на конец k-го года: $D(1 + i/12)^{12k}$.

Наращенная величина ренты выплат на конец k-го года: $y \cdot s(12k, i/12)$

Остаток r_k на конец k-го года (остаток, который предстоит выплатить):

$$r_k = D(1 + i/12)^{12k} - y \cdot s(12k, i/12).$$