

Трехмерные и многократные интегралы

E_n - евклидово n -мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$

Введено во 2-м семестре. Определения - естественны.

$\Pi \equiv [a_1, b_1, \dots, a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ -

n -мерный параллелепипед, со сторонами, \parallel -ыми координатным осям.

Опр. $P \subset E_n$. Число $\mu(P)$ - мера, если

1) $\mu(P) \geq 0$; 2) $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) $P = P_1 \cup P_2; P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) P - единичный n -мерный куб $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Трехмерные и многократные интегралы

IE_n - евклидово n -мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in IE_n$

Введено во 2-м семестре. Определения - отсюда.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ -

- n -мерный параллелепипед, со сторонами, n -ыми координатными осями.

Опр. $P \subset IE_n$. Число $\mu(P)$ - мера, если

1) $\mu(P) \geq 0$; 2) $P_1 \sim P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) $P = P_1 \cup P_2; P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) P - единичный n -мерный куб $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Будем строить μ и $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu}$ - мера элемент. фигур)

Π - параллелепипед $\tilde{\mu}(\Pi) \equiv (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$

(\emptyset - тоже параллелепипед, $\tilde{\mu}(\emptyset) \equiv 0$)

Опр. $P \subset IE_n$ назыв. элементарной фигурой, если

$$P = \bigcup_{k=1}^m \Pi_k; (\Pi_i \cap \Pi_j) \cap (\Pi_j \cap \Pi_k) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

При этом $\tilde{\mu}(P) \equiv \sum_{k=1}^m \tilde{\mu}(\Pi_k)$.

Можно установить, что $\tilde{\mu}(P)$ удовлетв. понятию меры.

Трехмерные и многократные интегралы

E_n - евклидово n -мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$

Введено во 2-м семестре. Определения - сформулированы.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ -

n -мерный параллелепипед, со сторонами, n -ыми координатными осями.

Опр. $P \subset E_n$. Число $\mu(P)$ - мера, если

1) $\mu(P) \geq 0$; 2) $P_1 \sim P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) $P = P_1 \cup P_2; P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) P - единичный n -мерный куб $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Будем строить μ и $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu}$ - мера элементарных фигур)

Π - параллелепипед $\tilde{\mu}(\Pi) \equiv (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$

(\emptyset - тоже параллелепипед, $\tilde{\mu}(\emptyset) \equiv 0$)

Опр. $P \subset E_n$ назыв. элементарной фигурой, если

$$P = \bigcup_{k=1}^m \Pi_k : (\Pi_i \cap \Pi_j) \cap (\Pi_j \cap \Pi_i) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

При этом $\tilde{\mu}(P) \equiv \sum_{k=1}^m \tilde{\mu}(\Pi_k)$.

Можно установить, что $\tilde{\mu}(P)$ удовлетв. понятию меры.

Огран. $P \subset E_n$ Q, S - элем. фигуры: $Q \subset P \subset S$

Q - внутр. элем. фигура, S - внеш. элем. фигура

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя мера; $\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$ - верхняя мера

Можно получить, что $\underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \quad \forall \text{огр. } P \subset E_n$

Если $P: \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$, то P назыв. измеримой фигурой и $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

Можно получить, что построена мера, применим для элементарных фигур $P \quad \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$

Т1. Огран. $P \subset E_n$. P -измеримая фигура \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Q, S: Q \subset P \subset S, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$$

Т2. Огран. $P \subset E_n$. P -измер. $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ ($\overline{\mu}(\partial P) = 0$)

Трехмерные и многомерные интегралы

E_n - евклидово n -мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$

Введено во 2-м семестре. Определения - оттуда.

$\Pi \equiv [a_1, b_1, \dots, a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ -

n -мерный прямоугол. параллелепипед, со сторонами, n -ыми координатными осями.

Опр. $P \subset E_n$. Число $\mu(P)$ - мера, если

1) $\mu(P) \geq 0$; 2) $P_1 \sim P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) $P = P_1 \cup P_2$; $P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) P - единичный n -мерный куб $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Будем строить μ и $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu}$ - мера элемент. фигур)

Π - параллелепипед $\tilde{\mu}(\Pi) \equiv (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$

(\emptyset - тоже параллелепипед, $\tilde{\mu}(\emptyset) \equiv 0$)

Опр. $P \subset E_n$ назыв. элементарной фигурой, если

$$P = \bigcup_{k=1}^m \Pi_k : (\Pi_i \cap \Pi_j) \cap (\Pi_j \cap \Pi_k) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

При этом $\tilde{\mu}(P) \equiv \sum_{k=1}^m \tilde{\mu}(\Pi_k)$.

Можно установить, что $\tilde{\mu}(P)$ удовлевл. понятию меры.

Огран. $P \subset E_n$ Q, S - элем. фигурот: $Q \subset P \subset S$

Q - внутр. элем. фигура, S - внутр. элем. фигура

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя мера; $\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$ - верхняя мера

Можно получить, что $\underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \quad \forall \text{огр. } P \subset E_n$

Если P : $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$, то P назыв. измеримой фигурой и $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

Можно получить, что построена мера, применим для элемент. фигурот P $\mu(P) = \tilde{\mu}(P)$

Т1. Огран. $P \subset E_n$. P -измеримая фигура \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$$

Т2. Огран. $P \subset E_n$. P -измер. $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ ($\tilde{\mu}(\partial P) = 0$)

$$\text{diam } P \equiv \sup_{A, B \in P} \rho(A, B)$$

$\Pi = [a_1, b_1, \dots, a_n, b_n]$ Разобьем каждую сторону:

$$a_i = x_i^{(0)} < \dots < x_i^{(k_i-1)} < x_i^{(k_i)} < \dots < x_i^{(p_i)} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta x_i^{(k_i)} = x_i^{(k_i)} - x_i^{(k_i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k_i = 1, 2, \dots, p_i$$

$$\Pi_{k_1 \dots k_n} \equiv \{x_i^{(k_i-1)} \leq x_i \leq x_i^{(k_i)}; \quad k_i = 1, \dots, p_i; \quad i = 1, \dots, n\}$$

$$\mu(\Pi_{k_1 \dots k_n}) = \tilde{\mu}(\Pi_{k_1 \dots k_n}) = \Delta x_1^{(k_1)} \cdot \dots \cdot \Delta x_n^{(k_n)}$$

Разделение $\Gamma \equiv \{\Pi_{k_1 \dots k_n}\}$ $\delta_\Gamma = \max_{k_1, \dots, k_n} \text{diam } \Pi_{k_1 \dots k_n}$

$$K_{k_1 \dots k_n} \in \Pi_{k_1 \dots k_n} \quad \|K = \{K_{k_1 \dots k_n}\}$$

Опр. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена на Π . Тогда интегральной суммой называется

$$\sigma_{\Pi}(f, K) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} f(K_{k_1 \dots k_n}) \cdot \Delta x_1^{(k_1)} \dots \Delta x_n^{(k_n)},$$

а если $f(x)$ ограничена на Π , то

$$s_{\Pi}(f) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} m_{k_1 \dots k_n} \Delta x_1 \dots \Delta x_n - \text{нижняя сумма Дарбу,}$$

$$S_{\Pi}(f) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} M_{k_1 \dots k_n} \Delta x_1 \dots \Delta x_n - \text{верхняя сумма Дарбу,}$$

где $m_{k_1 \dots k_n} = \inf_{K \in \Pi_{k_1 \dots k_n}} f(K)$, $M_{k_1 \dots k_n} = \sup_{K \in \Pi_{k_1 \dots k_n}} f(K)$.

Опр. $f(x)$ называется интегрируемой на Π , если

$$\exists \lim_{\delta_{\Pi} \rightarrow 0} \sigma_{\Pi}(f, K) = I, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Pi, \delta_{\Pi} \leq \delta$$

$$\forall K = \{K_{k_1 \dots k_n}\} \mid \sigma_{\Pi}(f, K) - I < \varepsilon$$

I -н-крайней ин-л $I \equiv \int_{\Pi} f(x) dx \equiv \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$

ТЗ $f(x)$ ин-гр. на $\Pi \Rightarrow f(x)$ ограничена на Π .

Т4 $f(x)$ ин-гр. на $\Pi \Leftrightarrow \lim_{\delta_{\Pi} \rightarrow 0} (S_{\Pi}(f) - s_{\Pi}(f)) = 0$

Опр P -огр. ин-гр. м.во, $f(x)$ опред. на P

Паракомпактно $\Pi \supset P$, $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in P, \\ 0, & x \notin P. \end{cases}$ $f(x)$ назыв.

ин-гр. на P , если $F(x)$ ин-гр. на Π . При этом

$$\int_P f(x) dx \equiv \int_{\Pi} F(x) dx.$$

Можно установить, что $\int_P f(x) dx$ зависит от $\Pi \supset P$

$$\text{---}, \text{---}, \text{---} - \int_P 1 \cdot dx = \mu(P)$$

При $n=2$ получается несколько иное понятие двойного интеграла. Можно установить, что это - то же самое.

Можно установить, что св-ва многократного интегралов - те же самые.

Опр. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена на Π . Тогда интегральной суммой называется

$$\sigma_{\Pi}(f, K) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} f(K_{k_1 \dots k_n}) \cdot \Delta x_1^{(k_1)} \dots \Delta x_n^{(k_n)},$$

а если $f(x)$ ограничена на Π , то

$$s_{\Pi}(f) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} m_{k_1 \dots k_n} \Delta x_1 \dots \Delta x_n - \text{нижняя сумма Дарбу,}$$

$$S_{\Pi}(f) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} M_{k_1 \dots k_n} \Delta x_1 \dots \Delta x_n - \text{верхняя сумма Дарбу,}$$

где $m_{k_1 \dots k_n} = \inf_{K \in \Pi_{k_1 \dots k_n}} f(K)$, $M_{k_1 \dots k_n} = \sup_{K \in \Pi_{k_1 \dots k_n}} f(K)$.

Опр. $f(x)$ называется интегрируемой на Π , если

$$\exists \lim_{\delta_{\Pi} \rightarrow 0} \sigma_{\Pi}(f, K) = I, \text{ т.е. } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0. \forall \Pi, \delta_{\Pi} < \delta$$

$$\forall K = \{K_{k_1 \dots k_n}\} \quad |\sigma_{\Pi}(f, K) - I| < \epsilon$$

I -н-крайний и-л $I \equiv \int_{\Pi} f(x) dx \equiv \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$

T3 $f(x)$ и-л-р. на $\Pi \Rightarrow f(x)$ ограничена на Π .

T4 $f(x)$ и-л-р. на $\Pi \Leftrightarrow \lim_{\delta_{\Pi} \rightarrow 0} (S_{\Pi}(f) - s_{\Pi}(f)) = 0$

Опр. P -образ. и-л-р. м-во, $f(x)$ опред. на P

Парамененный $\Pi \supset P$, $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in P \\ 0, & x \notin P \end{cases}$ $f(x)$ и-л-р.

и-л-р. на P , если $F(x)$ и-л-р. на Π . При этом

$$\int_P f(x) dx \equiv \int_{\Pi} F(x) dx.$$

Можно установить, что $\int_P f(x) dx$ не зависит от $\Pi \supset P$

$$\int_P 1 \cdot dx = \mu(P)$$

При $n=2$ получается несколько иные понятия (двойной интеграла). Можно установить, что это - то же самое.

Можно установить, что св-ва многократные интегралов - те же самые.

T5 (Сведение многократного и-л-а к повторному).

$P_n \subset E_n$, $P_n \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n : \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \psi(x_1, \dots, x_{n-1}), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in P_{n-1} \subset E_{n-1}\}$; $\exists \int \dots \int_{P_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n$,

$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in P_{n-1} \exists I(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$. Тогда

$$\int \dots \int_{P_{n-1}} I(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1} \equiv \int \dots \int_{P_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n = \int_{P_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Задача Дать формулировку этой теоремы для

$n=3$ в переменные x, y, z .

Получить из этой формулы объем цилиндра

$$V \equiv \{(x, y, z) \in E_3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \Omega \subset E_2\} \subset E_3 :$$

$$\mu(V) = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

ТБ (Замена переменных в многократных интегралах).

Огранич. замкн. измеримая область $Q \subset E'_n$ ($t = (t_1, \dots, t_n) \in E'_n$).

Преобразование $x = x(t)$ ($x_i = x_i(t_1, \dots, t_n), i = 1, \dots, n$) $\in C_2$ на Q вз. - одн.

и вз. непр. диффр. $Q \leftrightarrow P \subset E_n$ ($x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$) - огранич. замкн.

измер. область

$$\text{измер. область } J(t_1, \dots, t_n) = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ непр. на P . Тогда $\int_P f(x) dx =$

$$= \int_P \dots \int_P f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_Q \dots \int_Q f(x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_n(t_1, \dots, t_n)) |J(t_1, \dots, t_n)| dt_1 \dots dt_n$$

Задание Дать формулировку этой теоремы для $n = 3$

в координатах x, y, z (вместо x_1, x_2, x_3) и координатах u, v, w (вместо t_1, t_2, t_3)

Частные случаи заметят переходных для $n=3$.

1. Цилиндрические координаты

$$x = r \cos \varphi \quad r \geq 0$$

$$y = r \sin \varphi \quad -\pi < \varphi \leq \pi \text{ (или } 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

$$z = \tilde{z} \quad -\infty < \tilde{z} < +\infty$$

$$J = r - \text{везде}$$

самостоятельно

2. Сферические координаты

$$\text{а) } x = r \cos \varphi \cos \psi \quad r \geq 0$$

$$y = r \sin \varphi \cos \psi \quad -\pi < \varphi \leq \pi \text{ (или } 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

$$z = r \sin \psi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$J = r^2 \cos \psi - \text{везде}$$

самостоятельно

$$\text{б) } x = r \cos \varphi \sin \psi \quad r \geq 0$$

$$y = r \sin \varphi \sin \psi \quad -\pi < \varphi \leq \pi \text{ (или } 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

$$z = r \cos \psi \quad 0 \leq \psi \leq \pi$$

$$J = r^2 \sin \psi - \text{везде}$$

самостоятельно