Тройные и многократные интегралы

$\mathbb{E}_n$ – евклидово n-мерное пр-во. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_n$

Введено во 2-м семестре. Определения – оттуда.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ –

– n-мерный прямоуг. параллелепипед, со сторонами, $\parallel$-ыми

координатным осям.

<u>Опр.</u> $P \subset \mathbb{E}_n$. Число $\mu(P)$ – мера, если

1) $\mu(P) \geq 0$; 2) $P_1 \simeq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) $P = P_1 \cup P_2$; $P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) P – единичный n-мерный куб $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Тройные и многократные интегралы

$\mathbb{E}_n$ – евклидово n-мерное пр-во. $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{E}_n$

Введено во 2-м семестре. Определения – оттуда.

$\Pi\equiv[a_1,b_1;\dots;a_n,b_n]\equiv\{a_i\le x_i\le b_i,\ i=1,2,\dots,n\}$ –

– n-мерный прямоуг. параллелепипед, со сторонами, ||-ыми координатным осям.

<u>Опр.</u> $P\subset\mathbb{E}_n$. Число $\mu(P)$ – мера, если

1) $\mu(P)\ge 0$; 2) $P_1\simeq P_2\Rightarrow\mu(P_1)=\mu(P_2)$

3). $P=P_1\cup P_2$: $P_1\cap P_2=\varnothing\Rightarrow\mu(P)=\mu(P_1)+\mu(P_2)$

4) P – единичный n-мерный куб $\Rightarrow\mu(P)=1$

Будем строить μ и $\tilde\mu$ ($\tilde\mu$ – мера элемент. фигуры)

Π – параллелепипед $\tilde\mu(\Pi)\equiv(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$

($\varnothing$ – тоже параллелепипед, $\tilde\mu(\varnothing)\equiv 0$)

<u>Опр.</u> $P\subset\mathbb{E}_n$ называется элементарной фигурой, если

$$P=\bigcup_{k=1}^{m}\Pi_k:(\Pi_i\setminus\partial\Pi_i)\cap(\Pi_j\setminus\partial\Pi_j)=\varnothing\quad(i\ne j)$$

При этом $\tilde\mu(P)\equiv\sum\limits_{k=1}^{m}\tilde\mu(\Pi_k)$.

Можно установить, что $\tilde\mu(P)$ удовлетв. понятию меры.

Тройные и многократные интегралы

$\mathbb{E}_n$ — евклидово n-мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$

Введено во 2-м семестре. Определения — оттуда.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ — n-мерный прямоуг. параллелепипед, со сторонами, $\parallel$-ными координатным осям.

<u>Опр.</u> $P \subset \mathbb{E}_n$. Число $\mu(P)$ — мера, если

1) $\mu(P) \ge 0$; 2) $P_1 \simeq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) P — единичный n-мерный куб $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Будем строить μ и $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu}$ — мера элемент. фигуры)

Π — параллелепипед $\quad \tilde{\mu}(\Pi) \equiv (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$

($\varnothing$ — тоже параллелепипед, $\tilde{\mu}(\varnothing) \equiv 0$)

<u>Опр.</u> $P \subset \mathbb{E}_n$ назыв. элементарной фигурой, если

$$P = \bigcup_{k=1}^{m} \Pi_k : (\Pi_i \setminus \partial\Pi_i) \cap (\Pi_j \setminus \partial\Pi_j) = \varnothing \quad (i \ne j)$$

При этом $\tilde{\mu}(P) \equiv \sum\limits_{k=1}^{m} \tilde{\mu}(\Pi_k)$.

Можно установить, что $\tilde{\mu}(P)$ удовлетв. понятию меры.

Огран. $P \subset \mathbb{E}_n$ $\ Q, S$ — элем. фигуры: $Q \subset P \subset S$

Q — впис. элем. фигура, S — опис. элем. фигура

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ — нижняя мера; $\overline{\mu}(P) \equiv \inf\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$ — верхняя мера

Можно получить, что $\underline{\mu}(P) \le \overline{\mu}(P)$ $\forall$ огр. $P \subset \mathbb{E}_n$

Если P: $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$, то P назыв. измеримой фигурой и $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

Можно получить, что построена мера, причём для элемент. фигуры P $\ \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$

<u>Т1.</u> Огран. $P \subset \mathbb{E}_n$. P — измеримая фигура $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists Q, S : Q \subset P \subset S,\ 0 \le \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$

<u>Т2.</u> Огран. $P \subset \mathbb{E}_n$. P — измер. $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ $(\overline{\mu}(\partial P) = 0)$

Тройные и многократные интегралы

$\mathbb{E}_n$ – евклидово n-мерное пр-во. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_n$

Введено во 2-м семестре. Определения – оттуда.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \le x_i \le b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ – n-мерный прямоуг. параллелепипед, со сторонами, ||-ыми координатным осям.

Опр. $P \subset \mathbb{E}_n$. Число $\mu(P)$ – мера, если

1) $\mu(P) \ge 0$; 2) $P_1 \simeq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3) $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4) P – единичный n-мерный куб $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Будем строить μ и $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu}$ – мера элемент. фигуры)

Π – параллелепипед $\quad \tilde{\mu}(\Pi) \equiv (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$

($\varnothing$ – тоже параллелепипед, $\tilde{\mu}(\varnothing) \equiv 0$)

Опр. $P \subset \mathbb{E}_n$ назыв. элементарной фигурой, если

$$P = \bigcup_{k=1}^{m} \Pi_k : (\Pi_i \setminus \partial \Pi_i) \cap (\Pi_j \setminus \partial \Pi_j) = \varnothing \quad (i \ne j)$$

При этом $\tilde{\mu}(P) \equiv \sum_{k=1}^{m} \tilde{\mu}(\Pi_k)$.

Можно установить, что $\tilde{\mu}(P)$ удовлетв. понятию меры.

Огран. $P \subset \mathbb{E}_n$ Q, S – элем. фигуры: $Q \subset P \subset S$

Q – внис. элем. фигура, S – опис. элем. фигура

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ – нижняя мера; $\overline{\mu}(P) \equiv \inf\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$ – верхняя мера

Можно получить, что $\underline{\mu}(P) \le \overline{\mu}(P)$ $\forall$огр. $P \subset \mathbb{E}_n$

Если P: $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$, то P назыв. измеримой фигурой и $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

Можно получить, что построена мера, причём для элемент. фигуры P $\mu(P) = \tilde{\mu}(P)$

T1. Огран. $P \subset \mathbb{E}_n$. P-измеримая фигура $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists Q, S : Q \subset P \subset S, \; 0 \le \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$

T2. Огран. $P \subset \mathbb{E}_n$. P-измер. $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ $(\overline{\mu}(\partial P) = 0)$

$$\operatorname{diam} P \equiv \sup_{A, B \in P} \rho(A, B)$$

$\Pi = [a_1, b_1; \ldots; a_i, b_i; \ldots; a_n, b_n]$ Разобьём каждую сторону:

$$a_i = x_i^{(0)} < \ldots < x^{(k_i - 1)} < x_i^{(k_i)} < \ldots < x_i^{(p_i)} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Delta x_i^{(k_i)} = x_i^{(k_i)} - x_i^{(k_i - 1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; k_i = 1, 2, \ldots, p_i$$

$$\Pi_{k_1 \ldots k_n} \equiv \{x_i^{(k_i - 1)} \le x_i \le x_i^{(k_i)}; k_i = 1, \ldots, p_i; i = 1, \ldots, n\}$$

$$\mu(\Pi_{k_1 \ldots k_n}) = \tilde{\mu}(\Pi_{k_1 \ldots k_n}) = \Delta x_1^{(k_1)} \cdot \ldots \cdot \Delta x_n^{(k_n)}$$

Разбиение $T \equiv \{\Pi_{k_1, \ldots k_n}\}$ $\quad \delta_T = \max\limits_{k_1, \ldots, k_n} \operatorname{diam} \Pi_{k_1 \ldots k_n}$

$K_{k_1 \ldots k_n} \in \Pi_{k_1 \ldots k_n}$ $\quad \mathbb{K} = \{K_{k_1 \ldots k_n}\}$

Опр. $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ определена на Π. Тогда интегральной суммой называется

$$\sigma_T(f,\mathbb{K})\equiv\sum_{k_1=1}^{p_1}\ldots\sum_{k_n=1}^{p_n} f(K_{k_1\ldots k_n})\cdot\Delta x_1^{(k_1)}\ldots\Delta x_n^{(k_n)},$$

а если $f(x)$ ограничена на Π, то

$$s_T(f)\equiv\sum_{k_1=1}^{p_1}\ldots\sum_{k_n=1}^{p_n} m_{k_1\ldots k_n}\,\Delta x_1\ldots\Delta x_n \text{ – нижняя сумма Дарбу},$$

$$S_T(f)\equiv\sum_{k_1=1}^{p_1}\ldots\sum_{k_n=1}^{p_n} M_{k_1\ldots k_n}\,\Delta x_1\ldots\Delta x_n \text{ – верхняя сумма Дарбу},$$

где $m_{k_1\ldots k_n}=\inf\limits_{K\in\Pi_{k_1\ldots k_n}} f(K)$, $M_{k_1\ldots k_n}=\sup\limits_{K\in\Pi_{k_1\ldots k_n}} f(K)$.

Опр. $f(x)$ называется интегрируемой на Π, если

$\exists\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T(f,\mathbb{K})=I$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T,\ \delta_T<\delta$

$\forall\mathbb{K}=\{K_{k_1\ldots k_n}\}\quad|\sigma_T(f,\mathbb{K})-I|<\varepsilon$

I – n-кратный инт-л $\quad I\equiv\int\limits_{\Pi} f(x)\,dx\equiv\int\limits_{\Pi}\ldots\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$

Т3 $f(x)$ интегр. на $\Pi\Rightarrow f(x)$ ограничена на Π.

Т4 $f(x)$ интегр. на $\Pi\Leftrightarrow\lim\limits_{\delta_T\to 0}(S_T(f)-s_T(f))=0$

Опр P – огран. измер. мн-во, $f(x)$ опред. на P

Параллелепипед $\Pi\supset P$, $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in P,\\ 0, & x\notin P.\end{cases}$ $f(x)$ назыв. интегр. на P, если $F(x)$ интегрир. на Π. При этом

$$\int\limits_P f(x)\,dx\equiv\int\limits_\Pi F(x)\,dx.$$

Можно установить, что $\int\limits_P f(x)\,dx$ не зависит от $\Pi\supset P$

—, —, — $\int\limits_P 1\cdot dx=\mu(P)$

При $n=2$ получается несколько иное понятие двойного интеграла. Можно установить, что это – то же самое.

Можно установить, что св-ва многократных интегралов – те же самые.

Опр. $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ определена на Π. Тогда интегральной суммой называется

$$\sigma_\pi(f,\mathbb{K})\equiv\sum_{k_1=1}^{p_1}\dots\sum_{k_n=1}^{p_n} f(K_{k_1\dots k_n})\cdot\Delta x_1^{(k_1)}\dots\Delta x_n^{(k_n)},$$

а если $f(x)$ ограничена на Π, то

$$s_\pi(f)\equiv\sum_{k_1=1}^{p_1}\dots\sum_{k_n=1}^{p_n} m_{k_1\dots k_n}\,\Delta x_1\dots\Delta x_n$$ – нижняя сумма Дарбу,

$$S_\pi(f)\equiv\sum_{k_1=1}^{p_1}\dots\sum_{k_n=1}^{p_n} M_{k_1\dots k_n}\,\Delta x_1\dots\Delta x_n$$ – верхняя сумма Дарбу,

где $m_{k_1\dots k_n}=\inf\limits_{K\in\Pi_{k_1\dots k_n}} f(K)$, $M_{k_1\dots k_n}=\sup\limits_{K\in\Pi_{k_1\dots k_n}} f(K)$.

Опр. $f(x)$ называется интегрируемой на Π, если

$\exists\lim\limits_{\delta_\pi\to0}\sigma_\pi(f,\mathbb{K})=I$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall T,\ \delta_\pi<\delta$

$\forall\mathbb{K}=\{K_{k_1\dots k_n}\}\ |\sigma_\pi(f,\mathbb{K})-I|<\varepsilon$

I – n-кратный инт-л $I\equiv\int\limits_\Pi f(x)dx\equiv\int\limits_\Pi\dots\int f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$

Т3 $f(x)$ интегр. на $\Pi\Rightarrow f(x)$ ограничена на Π.

Т4 $f(x)$ интегр. на $\Pi\Leftrightarrow\lim\limits_{\delta_\pi\to0}(S_\pi(f)-s_\pi(f))=0$

Опр P-огран. измер. мн-во, $f(x)$ опред. на P

Параллелепипед $\Pi\supset P$, $F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in P\\ 0, & x\notin P\end{cases}$ $f(x)$ назыв. интегр. на P, если $F(x)$ интегрир. на Π. При этом

$$\int\limits_P f(x)dx\equiv\int\limits_\Pi F(x)dx.$$

Можно установить, что $\int\limits_P f(x)dx$ не зависит от $\Pi\supset P$

—— , —— , —— , – $\int\limits_P 1\cdot dx=\mu(P)$

При $n=2$ получается несколько иное понятие двойного интеграла. Можно установить, что это – то же самое.

Можно установить, что св-ва многократных интегралов – те же самые.

Т5 (Сведение многократного инт-ла к повторному).

$P_n\subset\mathbb{E}_n$, $P_n\equiv\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{E}_n:\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\le x_n\le\psi(x_1,\dots,x_{n-1})$,

$(x_1,\dots,x_{n-1})\in P_{n-1}\subset\mathbb{E}_{n-1}\}$; $\exists\int\limits_{P_n}\dots\int f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)dx_1\dots dx_{n-1}dx_n$;

$\forall(x_1,\dots,x_{n-1})\in P_{n-1}\ \exists I(x_1,\dots,x_{n-1})=\int\limits_{\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)dx_n$. Тогда

$$\exists\int\limits_{P_{n-1}}\dots\int I(x_1,\dots,x_{n-1})dx_1\dots dx_{n-1}\equiv\int\limits_{P_{n-1}}\dots\int dx_1\dots dx_{n-1}\int\limits_{\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)dx_n=$$
$$=\int\limits_{P_n}\dots\int f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)dx_1\dots dx_{n-1}dx_n.$$

Задание Дать формулировку этой теоремы для $n=3$ в переменных x,y,z.

Получить из этой формулы объём цилиндроида

$$V\equiv\{(x,y,z)\in\mathbb{E}_3:\ 0\le z\le f(x,y),\ (x,y)\in\Omega\subset\mathbb{E}_2\}\subset\mathbb{E}_3:$$

$$\mu(V)=\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dxdy$$

Т6 (Замена переменных в многократных интегралах).

Огран. замкн. измеримая област $Q \subset \mathbb{E}'_n$ $(t=(t_1,\dots,t_n)\in \mathbb{E}'_n)$.

Отображение $x=x(t)$ $(x_i=x_i(t_1,\dots,t_n), i=1,\dots,n) \in C_2$ на Q вз.-одн. и вз. непр. дифф. $Q \leftrightarrow P \subset \mathbb{E}_n (x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{E}_n)$ - огран., замкн. измер. област $J(t_1,\dots,t_n)=\dfrac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(t_1,\dots,t_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$.

$f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ непр. на P. Тогда $\int\limits_P f(x)\,dx =$

$$= \int\limits_P \dots \int f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \int\limits_Q \dots \int f(x_1(t_1,\dots,t_n),\dots,x_n(t_1,\dots,t_n))\,|J(t_1,\dots,t_n)|\,dt_1\dots dt_n$$

<u>Задание</u> Дать формулировку этой теоремы для $n=3$ в координатах x,y,z (вместо x_1,x_2,x_3) и координатах u,v,w (вместо t_1,t_2,t_3)

Частные случаи замены переменных для $n=3$.

1. Цилиндрические координаты

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & r &\geq 0 \\ y &= r\sin\varphi & -\pi &< \varphi \leq \pi \ (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi) \\ z &= \tilde{z} & -\infty &< \tilde{z} < +\infty \end{aligned}$$

$J = r$ – вывести самостоятельно

2. Сферические координаты

а) $$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\psi & r &\geq 0 \\ y &= r\sin\varphi\cos\psi & -\pi &< \varphi \leq \pi \ (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi) \\ z &= r\sin\psi & -\tfrac{\pi}{2} &\leq \psi \leq \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$J = r^2\cos\psi$ – вывести самостоятельно

б) $$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\psi & r &\geq 0 \\ y &= r\sin\varphi\sin\psi & -\pi &< \varphi \leq \pi \ (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi) \\ z &= r\cos\psi & 0 &\leq \psi \leq \pi \end{aligned}$$

$J = r^2\sin\psi$ – вывести самостоятельно