

Тройные и многократные интегралы

\mathbb{E}_n - евклидово n -мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$

Введено в 2-и смысла. Определения - отдельно.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, n\}$ -

- n -мерный пр-во ур. параллелепипеда со сторонами, i -ыми координатными осьм.

Опс. $P \subset \mathbb{E}_n$. Число $\mu(P)$ - мера, если

$$1) \mu(P) \geq 0; 2) P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$$

$$3) P = P_1 \cup P_2: P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$4) P - единичный n -мерный куб \Rightarrow \mu(P) = 1$$

Тройные и многократные интегралы

\mathbb{E}_n - евклидово n -мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$

Введено во 2-и смыслах. Определение - оттуда.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, n\} -$

- n -мерный прямоуг. параллелепипед, со сторонами, ||-ыми координатными осьми.

Опс. $P \subset \mathbb{E}_n$. Число $\mu(P)$ - мера, если

$$1) \mu(P) \geq 0; 2) P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$$

$$3) P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$4) P - единичной n -мерности куб \Rightarrow \mu(P) = 1$$

Будем ставить μ и $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu}$ - мера элемен. фигур)

$$\Pi - параллелепипед \quad \tilde{\mu}(\Pi) \equiv (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

(\emptyset - тоже параллелепипед, $\tilde{\mu}(\emptyset) \equiv 0$)

Опс. $P \subset \mathbb{E}_n$ назов. элемен.арий фиgурой, если

$$P = \bigcup_{k=1}^m \Pi_k : (\Pi_i \setminus \partial \Pi_i) \cap (\Pi_j \setminus \partial \Pi_j) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\text{При этом } \tilde{\mu}(P) \equiv \sum_{k=1}^m \tilde{\mu}(\Pi_k).$$

Можно установить, что $\tilde{\mu}(P)$ удовлб. понятию меры.

Тройные и многократные интегралы

\mathbb{E}_n - евклидово n -мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$

Введено во 2-м семестре. Определение - в туда.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, n\}$ -

- n -мерный правильн. параллелепипед со сторонами, ||-ами координатных осей.

Опс. $P \subset \mathbb{E}_n$. Число $\mu(P)$ - мера, если

$$1) \mu(P) \geq 0; 2) P_1 \cup P_2 \Rightarrow \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$3) P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$4) P - единичный n -мерной куб \(\Rightarrow \mu(P) = 1$$

Будем ставить μ и $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu}$ - мера элем. фигур)

Π - параллелепипед $\tilde{\mu}(\Pi) \equiv (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$

(\emptyset - тоже параллелепипед, $\tilde{\mu}(\emptyset) \equiv 0$)

Опс. $P \subset \mathbb{E}_n$ назыв. элем. фигурой, если

$$P = \bigcup_{k=1}^m \Pi_k : (\Pi_i \setminus \partial \Pi_i) \cap (\Pi_j \setminus \partial \Pi_j) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

При этом $\tilde{\mu}(P) \equiv \sum_{k=1}^m \tilde{\mu}(\Pi_k)$.

Можно установить, что $\tilde{\mu}(P)$ удовл. понятию меры.

Опс. $P \subset \mathbb{E}_n$ Q, S - элем. фигуры: $Q \subset P \subset S$

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя мера;

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$ - верхняя мера

Можно получить, что $\underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \quad \forall \text{опс. } P \subset \mathbb{E}_n$

Если P : $\mu(P) = \overline{\mu}(P)$, то P назыв. измеримой фигурой и $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

Можно получить, что построена мера, приём для элемент. фигур P $\mu(P) = \tilde{\mu}(P)$

T1. Опс. $P \subset \mathbb{E}_n$. P -измеримая фигура \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Q, S: Q \subset P \subset S, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$$

T2. Опс. $P \subset \mathbb{E}_n$. P -измер. $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ ($\overline{\mu}(\partial P) = 0$)

Тройные и многократные интегралы

\mathbb{E}_n - единство n -мерное пр-во. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$

Введено в 2-м смысле. Определение - откуда.

$\Pi \equiv [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n] \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, n\}$ -

- n -мерный прямогр. параллелепипед со сторонами, ||-ыми коэффициентами осей.

Опн. $P \subset \mathbb{E}_n$. Число $\mu(P)$ - мера, если

- 1) $\mu(P) \geq 0$;
- 2) $P_1 \asymp P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
- 3) $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

- 4) P - единичной n -мерной куб $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Будем строить μ и $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu}$ - мера элем. фигуры)

Π - параллелепипед $\tilde{\mu}(\Pi) \equiv (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$

(\emptyset -онце параллелепипед, $\tilde{\mu}(\emptyset) \equiv 0$)

Опн. $P \subset \mathbb{E}_n$ изолв. элем. фигура, если

$$P = \bigcup_{k=1}^m \Pi_k : (\Pi_i \cap \partial \Pi_j) \cap (\Pi_j \cap \partial \Pi_i) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

При этом $\tilde{\mu}(P) \equiv \sum_{k=1}^m \tilde{\mu}(\Pi_k)$.

Можно установить, что $\tilde{\mu}(P)$ удовлст. понятию меры.

Опн. $P \subset \mathbb{E}_n$ Q, S - элем. фигуры: $Q \subset PCS$

$\mathcal{M}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя мера; $\bar{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$ - верхняя мера

Можно получить, что $\mathcal{M}(P) \leq \bar{\mu}(P)$ Для $P \subset \mathbb{E}_n$

Если $P: \mathcal{M}(P) = \bar{\mu}(P)$, то P назыв. измеримой фигурай и $\mu(P) \equiv \mathcal{M}(P) = \bar{\mu}(P)$

Можно получить, что построена мера, приём элем. фигуры $P: \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$

Т1. Опн. $P \subset \mathbb{E}_n$. P -измеримая фигура \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Q, S: Q \subset PCS, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$$

Т2. Опн. $P \subset \mathbb{E}_n$. P -измер. $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ ($\bar{\mu}(\partial P) = 0$)

$$\text{diam } P \equiv \sup_{A, B \in P} \rho(A, B)$$

$\Pi = [a_1, b_1; \dots; a_n, b_n]$ Рассмотрим каждую сторону:

$$a_i = x_i^{(0)} < \dots < x_i^{(k_i-1)} < x_i^{(k_i)} < \dots < x_i^{(p_i)} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta x_i^{(k_i)} = x_i^{(k_i)} - x_i^{(k_i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; k_i = 1, 2, \dots, p_i$$

$$\Pi_{k_1 \dots k_n} \equiv \{x_i^{(k_i)} \leq x_i \leq x_i^{(k_i)}; k_i = 1, \dots, p_i; i = 1, \dots, n\}$$

$$\mu(\Pi_{k_1 \dots k_n}) = \tilde{\mu}(\Pi_{k_1 \dots k_n}) = \Delta x_1^{(k_1)} \cdot \dots \cdot \Delta x_n^{(k_n)}$$

Разбиение $T \equiv \{\Pi_{k_1 \dots k_n}\}$ $\delta_T = \max_{k_1, \dots, k_n} \text{diam } \Pi_{k_1 \dots k_n}$

$$K_{k_1 \dots k_n} \in \Pi_{k_1 \dots k_n} \quad |K| = \{K_{k_1 \dots k_n}\}$$

Оп. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ определена на Π . Тогда интегральной суммой называется

$$\Omega_\Pi(f, \mathbb{K}) = \sum_{k_1=1}^{P_1} \dots \sum_{k_n=1}^{P_n} f(K_{k_1 \dots k_n}) \cdot \Delta x_1^{(k_1)} \dots \Delta x_n^{(k_n)},$$

а если $f(x)$ ограничена на Π , то

$$S_\Pi(f) = \sum_{k_1=1}^{P_1} \dots \sum_{k_n=1}^{P_n} m_{k_1 \dots k_n} \Delta x_1 \dots \Delta x_n - \text{нижняя сумма Дарбю},$$

$$S_\Pi^*(f) = \sum_{k_1=1}^{P_1} \dots \sum_{k_n=1}^{P_n} M_{k_1 \dots k_n} \Delta x_1 \dots \Delta x_n - \text{верхняя сумма Дарбю},$$

где $m_{k_1 \dots k_n} = \inf_{K \in \Pi_{k_1 \dots k_n}} f(K)$, $M_{k_1 \dots k_n} = \sup_{K \in \Pi_{k_1 \dots k_n}} f(K)$.

Оп. $f(x)$ называется интегрируемой по I7, если

$$\exists \lim_{\delta_\Pi \rightarrow 0} \Omega_\Pi(f, \mathbb{K}) = I, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0. \forall \Pi, \delta_\Pi < \delta$$

$$\forall \mathbb{K} = \{K_{k_1 \dots k_n}\} \mid \Omega_\Pi(f, \mathbb{K}) - I \mid < \varepsilon$$

I - n-кратной ик-л $I \equiv \int_I f(x) dx \equiv \int_{\Pi} \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$

T3 $f(x)$ интегр. на $\Pi \Rightarrow f(x)$ ограничена на Π .

T4 $f(x)$ интегр. на $\Pi \Leftrightarrow \lim_{\delta_\Pi \rightarrow 0} (S_\Pi(f) - s_\Pi(f)) = 0$

Оп. Р-огранич. изн-бо, $f(x)$ опред. на Р

Понятие $\Pi \supset P$, $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in P, \\ 0, & x \notin P. \end{cases}$ $f(x)$ назыв.

интегр. на Р, если $F(x)$ интегр. на Π . При этом $\int_P f(x) dx \equiv \int_{\Pi} F(x) dx$.

Можно установить, что $\int_P f(x) dx$ не зависит от $\Pi \supset P$

$$\int_{\Pi} 1 \cdot dx = \mu(P)$$

При $n=2$ получается несколько иное понятие двойки интеграла. Можно установить, что это и то же самое. Можно установить, что в в-ва многократные интегралы - те же самое.

Оп. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ определено на Π . Тогда интегральной суммой называется

$$\sigma_{\Pi}(f, \mathcal{K}) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} f(K_{k_1 \dots k_n}) \cdot \Delta x_1^{(k_1)} \dots \Delta x_n^{(k_n)},$$

а если $f(x)$ ограничен на Π , то

$S_T(f) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} m_{k_1 \dots k_n} \Delta x_1 \dots \Delta x_n$ - ищется сумма Дарбиги,

$S_T(f) \equiv \sum_{k_1=1}^{p_1} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} M_{k_1 \dots k_n} \Delta x_1 \dots \Delta x_n$ - первая сумма Ради,

$$\text{def } m_{k_1 \dots k_n} = \inf_{K \in \Pi_{k_1 \dots k_n}} f(K), \quad M_{k_1 \dots k_n} = \sup_{K \in \Pi_{k_1 \dots k_n}} f(K).$$

Оп. $f(x)$ наводить вибратори на 17, тому

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_T(f, K) = I, \text{ i.e. } \exists \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \forall T, S \subset$$

$$\forall K = \{K_{k_1, \dots, k_n}\} |O_T(f, K) - I| < \varepsilon$$

I - n-крайний интеграл $I \equiv \int f(x) dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx$

ТЗ $f(x)$ ннрср. на $\Pi \Rightarrow f(x)$ ограничено на Π .

T4 $f(x)$ uix. erp. na $\Pi \Leftrightarrow \lim_{\delta\pi \rightarrow 0} (S_\pi(f) - s_\pi(f)) = 0$

Ons P -erpan. uix. erp. nu. bo., $f(x)$ erp. na P

Параллелепипед $P \supset P$, $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in P, \\ 0, & x \notin P. \end{cases}$ $f(x)$ нейтр.

интерв. на P , если $F'(x)$ монотонен на Π . При этом

$$\int f(x)dx \equiv \int F(x)dx'$$

Можно установить, что $\int f(x)dx$ не зависит от ПДР

$$\int_P 1 \cdot dx = \mu(P)$$

При $n = 2$ получается несколько иное понятие глобального изображения. Можно установить, что это - же самое.

Можно установить, что съ-ва многократные ито-
гровые — те же самое.

T5 (Сведение многократного ит-ва к повторению).

$$P_n \subset E_n, P_n \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n : \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \psi(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in P_{n-1} \subset \mathbb{E}_{n-1}; \exists f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n;$$

$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in P_{n-1}, \exists I(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\varphi(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$. Тогда

$$\int_{P_{n-1}} S \dots S I(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1} = \int_{P_{n-1}} S dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{\{x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\}} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n.$$

Задание Дать геометрическую задачу Георгиевской меры

$n=3$ & независимые x, y, z .

Получают из этой формулы общий закон распределения

$$V \equiv \{(x,y,z) \in E_3 : 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in \Omega \cap E_2\} \subset E_3$$

$$\mu(V) = \iint_D f(x,y) dx dy$$

T'6 (Зависимость переменных в многократных интегралах).

Огранич. замкн. измеримая область $Q \subset E'_n$ ($t = (t_1, \dots, t_n) \in E'_n$).

Ограничение $x = x(t)$ ($x_i = x_i(t_1, \dots, t_n), i=1, \dots, n$) $\in C_\alpha$ на Q bz.-одн.

и bz. непр. избрз. $Q \leftrightarrow P \subset E_n$ ($x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$) - ограничн.

избрз. облст. $J(t_1, \dots, t_n) = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)}$ = $\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$.

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ непр. на P . Тогда $\int_P f(x) dx =$

$$= \int_P \dots \int_P f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_Q \dots \int_Q f(x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_n(t_1, \dots, t_n)) |J(t_1, \dots, t_n)| dt_1 \dots dt_n$$

Задание Дать формулировку этой теоремы для $n=3$

в координатах x, y, z (бывоо x_1, x_2, x_3) и координатах u, v, w (бывоо t_1, t_2, t_3)

Частные случаи замены переменных при $n=3$.

1. Чилиндрические координаты

$$x = r \cos \varphi \quad r \geq 0$$

$$y = r \sin \varphi \quad -\pi < \varphi \leq \pi \quad (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

$$z = \tilde{z} \quad -\infty < \tilde{z} < +\infty$$

$J = r$ - бобоеву

самоочастично

2. Сферические координаты

a) $x = r \cos \varphi \cos \psi \quad r \geq 0$

$$y = r \sin \varphi \cos \psi \quad -\pi < \varphi \leq \pi \quad (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi) \quad J = r^2 \cos \psi - \text{бобоеву}$$

$$z = r \sin \psi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

самоочастично

б) $x = r \cos \varphi \sin \psi \quad r \geq 0$

$$y = r \sin \varphi \sin \psi \quad -\pi < \varphi \leq \pi \quad (\text{или } 0 \leq \varphi < 2\pi) \quad J = r^2 \sin \psi - \text{бобоеву}$$

$$z = r \cos \psi \quad 0 \leq \psi \leq \pi$$

самоочастично