Экономическая задача на ЕГЭ по математике

№19. 1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125000 рублей?

Решение:

Пусть сумма кредита – S, а годовой процент составляет – *a*%. В последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент ***b* = 1 + 0,01*a*.**

***b* = 1 + 0,01·1 =1,01;**

1000000 ·1,01 = 1010000; 1010000 – 125000 = 885000.

885000 ·1,01 = 893850; 893850 – 125000 = 768850 и т.д.

Составим таблицу выплат:

Месяцы	Долг банку , руб.	Остаток после выплаты (транша), руб.
0	1000000	-
1	1010000	885000
2	893850	768850
3	776538,5	651538,5
4	658053,885	533053,885
5	538384,424	413384,424
6	417518,268	292518,268
7	295443,45	170443,45
8	172147,885	47147,885
9	47619,364	0

Значит Павел Витальевич может взять кредит на 9 месяцев.

Ответ. 9

И.В.Ященко. ЕГЭ 2015 МАТЕМАТИКА типовые экзаменационные варианты.
(**23 вариант**)

№19. 31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая:31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определенное количество процентов), затем Валерий переводит очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 660000 рублей, во второй – 484000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Решение:

Пусть сумма кредита – S (100000 руб), а годовой процент составляет – *a*%, первая выплата X (660000 руб), а вторая – У (484000 руб). Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $\boldsymbol{b = 1 + 0{,}01a}$.

После первой выплаты сумма долга составит $\mathbf{S_1 = S\cdot b - X}$.

После первой выплаты сумма долга составит $\mathbf{S_2 = S_1\cdot b - У = (S\cdot b - X)\cdot b - У = S\cdot b^2 - b\cdot X - У}$.

Так как Валерий выплатил кредит за два транша (двумя выплатами),то $\mathbf{S\cdot b^2 - b\cdot X - У = 0}$.

$\mathbf{1000000b^2 - 660000b - 484000 = 0}$.

$\mathbf{b = 1{,}1;}$ $\quad b = -0{,}44$ (не удовл. усл.)

$\mathbf{1{,}1 = 1 + 0{,}01}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ = **10%.**

Ответ. 10

19. Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл в банке счёт, на который он ежегодно кладёт 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счёте. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и он открыл в другом банке счёт, на который ежегодно кладёт по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. Через сколько лет после открытия первого вклада суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

Решение. Через *n* лет на первом счёте будет сумма

$$1000+1000\cdot 1,2+\ldots+1000\cdot 1,2^n=1000(1+1,2+\ldots+1,2^n)=$$

$$S_n=\frac{b1\cdot(q^n-1)}{q-1}$$

$$=1000\cdot\frac{1,2^n-1}{1,2-1}=5000(1,2^n-1)\text{ руб.}$$

В это же время на втором счёте будет сумма

$$2200+2200\cdot 1,44+\ldots+2200\cdot 1,44^{n-6}=2200\cdot\frac{1,44^{n-6}-1}{1,44-1}=5000(1,44^{n-6}-1)\text{ руб.}$$

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1,2^n-1)=5000(1,44^{n-6}-1)\Leftrightarrow 1,2^n=1,44^{n-6}\Leftrightarrow 1,2^n=1,2^{2(n-6)}\Leftrightarrow n=12.$$

Таким образом, суммы на счетах сравняются через 12 лет после открытия первого вклада.

Задача 1

19. Первоначально годовой фонд заработной платы столовой составлял 1 500 000 рублей. После увеличения числа клиентов, штатное расписание было увеличено на 9 человек, а фонд заработной платы возрос до 5 250 000 рублей, средняя годовая заработная плата (относительно всех сотрудников) стала больше на 100 000 рублей. Какова стала средняя заработная плата (относительно всех сотрудников) после увеличения годового фонда?

Решение

Пусть изначально работали n человек.

Средняя зарплата была $\dfrac{1\,500\,000}{n}$ рублей,

а стала $\dfrac{5\,250\,000}{n+9}$ рублей.

$$\frac{5\,250\,000}{n+9} - \frac{1\,500\,000}{n} = 100\,000$$

$$\frac{105}{n+9} - \frac{30}{n} = 2$$

$$105n - 30(n+9) = 2n(n+9)$$
$$2n^2 - 57n + 270 = 0$$
$$n_{1,2} = \frac{57 \pm \sqrt{1089}}{4} = \frac{57 \pm 33}{4}$$
$$n_1 = 6$$
$$n_2 = 22{,}5$$

$$\frac{5\,250\,000}{6+9} = 350\,000\ (\text{рублей})$$

Ответ: 350 000 рублей

Задача 2

19. Владелец магазина купил оптом некоторое количество мониторов и продал их в течение марта в розницу, получив прибыль 40 000 рублей. На все вырученные деньги он опять купил мониторы по той же оптовой цене и продал по той же розничной цене, что была в марте, получив на 48 000 рублей больше, чем потратил. Сколько денег он потратил на первую покупку?

Решение.

Обозначения:

n мониторов (изначально)

закупочная цена — x рублей (за штуку)

цена продажи — y рублей (за штуку)

$\boxed{nx - ?}$

Обозначения:

n мониторов (изначально)

закупочная цена — x рублей (за штуку)

цена продажи — y рублей (за штуку)

Первая прибыль: $n(y - x) = 40\,000$

Второй раз:

$\dfrac{ny}{x}$ мониторов

$\dfrac{ny}{x}(y - x) = 48\,000$ — прибыль

$$\begin{cases} n(y-x) = 40\,000 \\ \dfrac{ny}{x}(y-x) = 48\,000 \end{cases}$$

Делим второе уравнение на первое

$$\frac{y}{x} = 1{,}2$$

$$y = 1{,}2x$$

$$n(1{,}2x - x) = 40\,000$$

$$0{,}2nx = 40\,000$$

$$nx = 200\,000$$

Ответ: 200 000 рублей

Проценты

Процент — это $\frac{1}{100}$ часть.

Если величина B равна $x\%$ от A, то

$$B = \frac{x}{100}A.$$

Если величина C увеличилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)C.$$

Если величина C уменьшилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)C.$$

Задача 3

Пример 1. Пирожок с мясом стоит на 50% дороже пирожка с джемом. На сколько процентов пирожок с джемом дешевле пирожка с мясом? Ответ округлите до целого числа процентов.

Решение. Пусть пирожок с джемом стоит x, тогда пирожок с мясом стоит $1{,}5x$. Ясно, что $\dfrac{x}{1{,}5x} = \dfrac{2}{3}$. То есть цена пирожка с джемом меньше цены пирожка с мясом на $\dfrac{1}{3}$ от цены пирожка с мясом, то есть на $0{,}3333\ldots = 33{,}33\ldots\% \approx 33\%$.

Ответ: 33%

Задача 4

19. Холдинг «Вертолёты и Мир » планирует выпустить в первом квартале 20% годового плана, во втором — увеличить производство в 1,5 раза, в четвёртом выпустить 102 вертолёта. В третьем квартале, во время отпусков, как показывает статистика, выпускается половина от среднего арифметического количества выпускаемых вертолётов во втором и четвёртом кварталах. Какое количество вертолётов планируется выпустить холдингом в третьем квартале?

Решение.

19. Пусть x вертолётов планируется выпустить за год. Тогда в первом квартале выпустят $0{,}2x$ вертолётов, во втором квартале $0{,}3x$, в третьем $\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}3x + 102}{2}$. Составим и решим уравнение

$$0{,}2x + 0{,}3x + \frac{0{,}3x + 102}{4} + 102 = x;$$

$$x = 300;$$

$\frac{300 \cdot 0{,}3 + 102}{4} = 48$ вертолётов планируется выпустить в третьем квартале.

Ответ: 48.

Задача 5

19. Прибыль предприятия к концу года составила 9 408 000 рублей. Совет акционеров постановил распределить эту прибыль следующим образом: A рублей направить в фонд развития предприятия, 30% от A использовать для выплаты дивидендов акционерам, а 10% от A использовать на выплаты премий сотрудникам. Кроме того, было решено дополнительно выпустить акции для продажи на бирже ценных бумаг на сумму, равную половине суммы выплаченных дивидендов, в количестве 150 обыкновенных и 100 привилегированных (в 1,5 раза более дорогих) акций. Определите стоимость одной привилегированной акции.

Решение.

A — сумма (в рублях), направленная в фонд развития предприятия.

Тогда $0{,}3A$ — на выплату дивидендов. $0{,}1A$ — на премии сотрудников.

$A + 0{,}3A + 0{,}1A = 9\,408\,000.$

$A = 6\,720\,000$

$0{,}5 \cdot 0{,}3A = 1\,008\,000$ —

суммарная стоимость акций

Пусть t — цена обыкновенной акции (в рублях).

Тогда $1{,}5t$ — цена привилегированной

акции (в рублях).

$150t + 100 \cdot 1{,}5t = 1\,008\,000$

$t = 3\,360$

$1{,}5t = 1{,}5 \cdot 3\,360 = 5\,040$

Ответ: 5 040 рублей

Задача 6

19. 30 декабря 2014 года Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита — 30 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивают долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей?

Решение.

Предположим, что первые месяцы Сергей Михайлович будет выплачивать ровно по $360\,000$ рублей.

После первого месяца:

$1{,}02 \cdot 800\,000 = 816\,000$ рублей,

$816\,000 - 360\,000 = 456\,000$ рублей.

После второго месяца:

$1{,}02 \cdot 456\,000 = 465\,120$ рублей,

$465\,120 - 360\,000 = 105\,120$ рублей.

После третьего месяца:

$1{,}02 \cdot 105\,120 = 107\,222{,}4$ рублей,

$107\,222{,}4 - 107\,222{,}4 = 0$.

Ответ: 3

Задача 7

19. Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть искомый ежегодный платёж — x рублей.

Долг в конце первого года:
$1{,}3 \cdot 15960000 - x = (20748000 - x)$ рублей.

В конце второго:
$(1{,}3 \cdot (20\,748\,000 - x) - x) = 26\,972\,400 - 2{,}3x$ рублей.

В конце третьего:
$1{,}3(26\,972\,400 - 2{,}3x) - x = 35\,064\,120 - 3{,}99x$ рублей.

$35\,064\,120 - 3{,}99x = 0$
$x = 8\,788\,000$

Ответ: 8 788 000 рублей

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для ежегодного платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
С помощью верных рассуждений получено уравнение, из которого может быть найдено значение ежегодного платежа, но коэффициенты уравнение неверные из-за ошибки в вычислениях	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задача 8

19. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил ещё 4 млн. рублей, в результате чего его доля в общем деле возросла на 0,06. А когда он добавил ещё 4 млн. рублей, его доля возросла ещё на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,03?

Решение.

Изначально: суммарный вклад — y млн. р.,

x млн. р. — первого вкладчика. Его доля — $\dfrac{x}{y}$.

После того, как первый добавил 4 млн. р. суммарно вклад: $(y+4)$ млн. р., $(x+4)$ — первого вкладчика.

Его доля: $\dfrac{x+4}{y+4}$

$$\frac{x+4}{y+4} - \frac{x}{y} = 0{,}06$$

- $4(y-x) = 0{,}06y(y+4).$

Затем $\dfrac{x+8}{y+8} - \dfrac{x+4}{y+4} = 0{,}02,$

- $4(y-x) = 0{,}02(y+4)(y+8)$

$0{,}06y(y+4) = 0{,}02(y+4)(y+8)$

$6y = 2(y+8)$

$y = 4$

$4(y-x)=0{,}06y(y+4)$
$4(4-x)=0{,}06\cdot 4\cdot(4+4)$
$x=3{,}52$
Если добавит ещё k млн. р.,

то $\dfrac{x+8+k}{y+8+k}$ — его доля.

$$\frac{x+8+k}{y+8+k}-\frac{x+8}{y+8}=0{,}03;$$

$$\frac{11{,}52+k}{12+k}-\frac{11{,}52}{12}=0{,}03$$

$$\frac{11{,}52+k}{12+k}-0{,}96=0{,}03;$$

$11{,}52+k=0{,}99(12+k)$
$11{,}52+k=11{,}88+0{,}99k$
$k=36.$
Ответ: 36 000 000 рублей

Задача 9

19. В автомастерской за лето починили 40 автомобилей трёх типов: легковые, грузовые и микроавтобусы. Легковых починили больше, чем микроавтобусов. Грузовых автомобилей починили в 12 раз больше, чем легковых. Сколько микроавтобусов починили за лето в автомастерской?

Решение. Допустим, за лето в автомастерской починили L легковых автомобилей, G грузовиков и M микроавтобусов. По смыслу задачи L, G, M — целые числа, причём $L > 0, G > 0$ и $M > 0$.

Согласно условию, $G = 12L$; $L > M$; $G + L + M = 40$. Но тогда $12L + L + M = 40$ и, следовательно, $13L < 40$, откуда $L \leqslant 3$.

При $L = 1$ из формулы $13L + M = 40$ получим $M = 27$ и неравенство $L > M$ не выполняется.

При $L = 2$ из формулы $13L + M = 40$ получим $M = 14$ и неравенство $L > M$ не выполняется.

При $L = 3$ из формулы $13L + M = 40$ получим $M = 1$ и неравенство $L > M$ выполняется.

Таким образом, за лето был отремонтирован 1 микроавтобус.

Ответ: 1

Задача 10

19 Производительность первого цеха завода не более 730 произведённых телевизоров в сутки.

Производительность второго цеха завода до реконструкции составляла 75% от производительности первого цеха. После реконструкции второй цех увеличил производительность на 20% и стал выпускать более 640 телевизоров в сутки.

Найдите, сколько телевизоров в сутки выпускает второй цех после реконструкции, если оба цеха выпускают в сутки целое число телевизоров.

Решение.

Пусть первый цех в сутки выпускает x телевизоров, тогда до реконструкции второй цех выпускал $0{,}75x$ телевизоров, при этом $x \in N$ и $0{,}75x \in N$. Получим из этого, что $\dfrac{75x}{100} = \dfrac{3x}{4} \in N$, значит x кратно 4.

После реконструкции второй цех стал выпускать $0{,}75x \cdot 1{,}2 = 0{,}9x$ часов, при этом $0{,}9x = \dfrac{9x}{10} \in N$, значит x кратно 10.

Таким образом, x кратно 20.

По условию, $x \leqslant 730$ и $0{,}9x > 640$ или $x > 711$.

Число, кратное 20 и $711 < x \leqslant 730$, это число 720.

Второй цех после реконструкции стал выпускать $720 \cdot 0{,}9 = 648$ телевизоров в сутки.

Ответ: 648.

Задача 11

19. Для перевозки большого числа бочек по 160 кг и 210 кг выделены трёхтонные машины. Можно ли загрузить такими бочками машину полностью? Если можно,то укажите все варианты того, сколько ящиков каждого вида при этом можно взять.

Решение.

1-ый способ

160-килограммовых бочек — k,
210-килограммовых — через n.
$k,\ n \geqslant 0$ — целые числа.

$160k + 210n = 3000$

$16k + 21n = 300.$

$21n \leqslant 300$

$n \leqslant 14\frac{2}{7}$

$n \leqslant 14$

Перебирая все целые значения n от 0 до 14,

отберём те, для которых $k = \dfrac{300 - 21n}{16}$

тоже является целым числом.

Получим единственное $n = 12$,

при котором $k = 3$.

(но перебор надо обязательно приводить)

2-ой способ

$\ldots\ldots\ldots$

$n \leqslant 14$

$21n = 300 - 16k = 4(75 - 4k)$

откуда $21n$ должно делиться

на 4 и не должно делиться на 8

(так $75 - 4k$ — нечётное число).

Значит, либо $n = 4$, либо $n = 12$.

$$k = \frac{300 - 21n}{16}$$

При $n = 4$ получим $k = \dfrac{27}{2}$ —
не является целым.
При $n = 12$ получим $k = 3$ —
является целым.
Значит, $n = 12$, $k = 3$
Ответ: Да, 12 по 210 кг и 3 по 160 кг.