Механика деформируемого твердого тела

https://vk.com/mehss

Литература

1. *Садовский Б.Н., Прядко И.Н. Кинематика. Конспекты лекций.*
2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо, 1999.*
3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2–х ч. М.: Наука, 1965.*

(см. http://vk.com/t_meh)

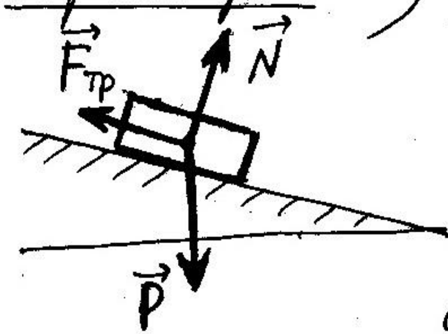
§ 8. Силы, действующие на точки материальной системы.

Рассмотрим систему матер. точек $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$.
На точки Σ_A действуют силы двух видов:
внешние и внутренние.

<u>Внутренние силы</u> — силы, с которыми точки Σ_A действуют друг на друга (силы взаимодействия между точками системы Σ_A).

<u>Внешние силы</u> — силы, с которыми действуют на точки Σ_A посторонние точки (не входящие в Σ_A).

<u>Примеры.</u> 1) <u>Кирпич</u>, лежащий на наклонной шероховатой плоскости.



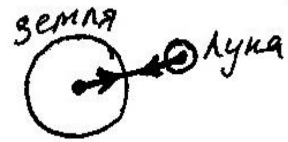
Кирпич = система мат. точек (молекул).

Внутренние силы системы "кирпич" — силы взаимодействия м/у молекулами кирпича.

Внешние силы — сила тяжести $\vec{P}$ (действует со стороны земли), сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

2) <u>Система "Земля + Луна".</u>

Внутренние силы системы — силы притяжения между этими небесными телами и силы взаимодействия м/у молекулами, образующими эти тела.

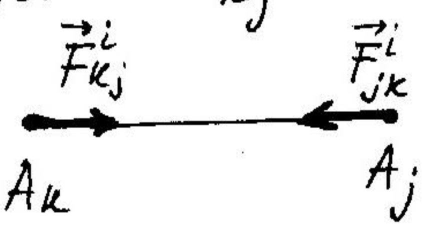


Силы притяжения со стороны Солнца и др. планет являются внешними.

<u>Th</u> Сумма всех внутренних сил системы матер. точек равна нулю.

<u>Док-во.</u>

Пусть $\vec{F}^{\,i}_{kj}$ — сила, с которой т. A_j действует на т. A_k;



В силу $\underline{III}$ закона Ньютона: $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$.

Тогда
$$\sum_{1\le k,j\le n} \vec{F}^{\,i}_{kj} = \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{12} + \vec{F}^{\,i}_{21}\right)}_{\vec{0}} + \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{13} + \vec{F}^{\,i}_{31}\right)}_{\vec{0}} + \ldots + \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{1n} + \vec{F}^{\,i}_{n1}\right)}_{\vec{0}} + \ldots = \vec{0}.$$ ■

Замечание Из внутренних сил системы можно составить кососимметрическую векторную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{F}^i_{12} & \vec{F}^i_{13} & \dots & \vec{F}^i_{1n} \\ \vec{F}^i_{21} & \vec{0} & \vec{F}^i_{23} & \dots & \vec{F}^i_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{F}^i_{n1} & \vec{F}^i_{n2} & \vec{F}^i_{n3} & \dots & \vec{0} \end{pmatrix}$$

(здесь мы полагаем: $\vec{F}^i_{kk} = \vec{0}$).

§ 9. Импульс системы материальных точек

Пусть $\Sigma_A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — система мат. точек,

$S = \{O, E_1, E_2, E_3\}$ — инерциальная ДСО,

m_k — масса A_k, $r_k = r_{OA_k} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ — арифметический радиус-вектор т. A_k.

Тогда $v = \dot{r}_k = \begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{pmatrix}$ — скорость т. A_k,

а вектор $p_k = m_k v_k$ наз-ся *импульсом т. A_k*.

Вектор $p = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k$ называется *импульсом системы Σ_A*.

Рассмотрим <u>скорость изменения импульса $p(t)$</u>:

$$\dot{p}(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{v}_k(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{r}_k(t) \ominus$$

По $\underline{\text{II}}$ закону Ньютона $m_k \ddot{r}_k$ есть сумма всех сил, действ-х на т. A_k, т.е. $m_k \ddot{r}_k = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i}}_{\text{сумма всех внутр-х сил, д-х на } A_k} + F_k^e$, где F_k^e — сумма всех внешних сил, действ-х на A_k.

$$\ominus \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i}\right)}_{\substack{\text{сумма всех внутр. сил системы } \Sigma_A \\ = \vec{0} \text{ (см. §6)}}} + \sum_{k=1}^{n} F_k^e = \sum_{k=1}^{n} F_k^e$$ — сумма всех внешних сил систем.

Итак, мы доказали следующую теорему.

<u>**Th**</u> Скорость изменения импульса системы мат. точек равна сумме всех внешних сил, д-х на точки данной системы.

__Следствие__. Если сумма всех внешних системы мат. точек равна нулю, то импульс данной системы сохраняет постоянное значение.

(это следствие называется __законом сохранения импульса__ системы мат. точек).

§ 10. Кинетический момент системы материальных точек

Рассм-м $\{A_1, \ldots, A_n\}$ — систему мат. точек относит. инерц. ДСО $S = \{O, E_1, E_2, E_3\}$; $m_1, \ldots, m_n$ — массы т-к;

$r_k = r_{OA_k}$ — рад.-вектор. т. A_k в S.

Опр. Кинетическим мом-том (моментом импульса, мом-м кол-ва движения) т. A относит. начала к-т O наз-ся вектор $M = r \times m v$, где $v = \dot{r}$ — скор. т. A.

Кинетич. моментом сист. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ относ. т. O наз-ся вектор $M = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k$, где $M_k = r_k \times m_k v_k$ — кин. мом-т т. A_k относ. O.

Рассм-м скорость изменения кин. мом. $M(t)$:

$$\dot{M}(t) = \sum \dot{M}_k = \sum \underbrace{\dot{r}_k \times m_k v_k}_{= 0} + \sum r_k \times m_k \dot{v}_k =$$

(т.к. $\dot{r}_k = v_k$)

Рассм-м <u>скорость изменения</u> кин. мом. $M(t)$:

$$\dot M(t) = \sum \dot M_k = \sum \underbrace{\dot r_k \times m_k v_k}_{=0} + \sum r_k \times m_k \dot v_k =$$

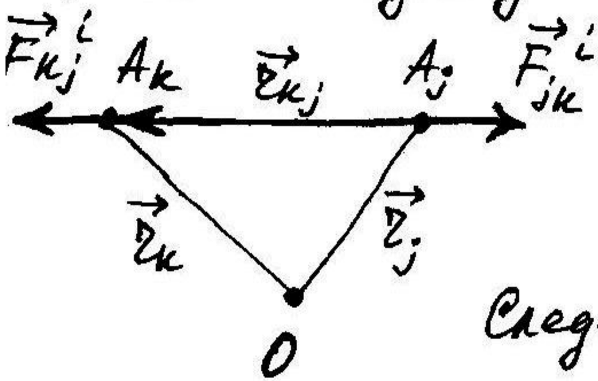
(т.к. $\dot r_k = v_k$)

$$= \sum r_k \times m_k \ddot r_k = \sum_{k=1}^{n} r_k \times \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i} + F_k^{e}}_{\text{сумма всех сил, д-х на т. } A_k}\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_k \times \Big(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i}\Big) + \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} r_k \times F_{kj}^{i}\Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e} =$$

Рассм-м сумму $r_k \times F_{kj}^{i} + r_j \times \overset{-F_{kj}^{i}}{\overset{\|}{F_{jk}^{i}}} = r_k \times F_{kj}^{i} - r_j \times F_{kj}^{i} =$



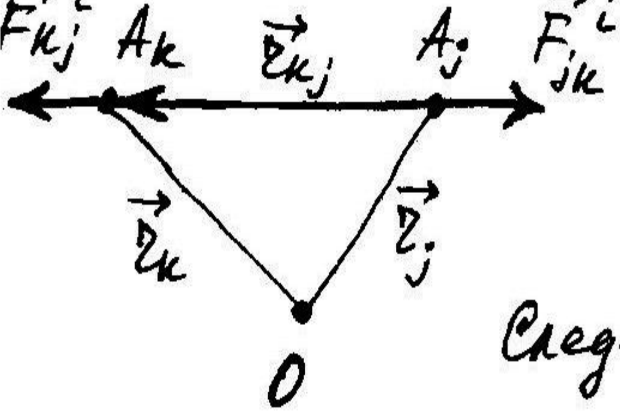
$$= \big(\underbrace{r_k - r_j}_{r_{kj}}\big) \times F_{kj}^{i} = \underbrace{r_{kj} \times F_{kj}^{i}}_{\text{колл-е}} = 0$$

След-но, $\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} r_k \times F_{kj}^{i}\Big) = 0.$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_k \times \Big(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i}\Big) + \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} r_k \times F_{kj}^{i}\Big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e} =$$

Рассм-м сумму $r_k \times F_{kj}^{i} + r_j \times \overset{-F_{kj}^{i}}{\overset{\parallel}{F_{jk}^{i}}} = r_k \times F_{kj}^{i} - r_j \times F_{kj}^{i} =$



$$= \underbrace{(r_k - r_j)}_{r_{kj}} \times F_{kj}^{i} = \underbrace{r_{kj} \times F_{kj}^{i}}_{\text{колл-е}} = 0$$

След-но, $\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} r_k \times F_{kj}^{i}\Big) = 0.$

$= \sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^{e}$. — сумма моментов внеш. сил относ. т. O.

<u>Th</u> Скорость изменения кинет. мом. системы равна сумме моментов внеш. сил системы (относ. т. O).

Следствие (закон сохранения кинетического момента)

Если сумма моментов всех внешних сил системы равна нулю, то кинетический момент системы сохраняет постоянное значение.

Пример. Система планет $\Sigma = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ движется вокруг звезды O; каждая планета P_k рассм-ся как матер. точка. Силы взаимодействия м/у планетами (силы притяжения) — это внутренние силы системы. Внешние силы системы — это силы притяжения, действующие на планеты со стороны центра O.

$\vec{F}_k^e$ (внеш. сила, действ-я на P_k) — центральная сила; $\vec{F}_k^e \parallel \vec{r}_k = \overrightarrow{OP_k} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ момент силы $\vec{F}_k^e$ относительно центра O

$$r_k \times F_k^e = 0.$$

След-но, $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k \times F_k^e = 0 \Rightarrow \dot{M}(t) = 0 \Rightarrow \underline{M(t) = const}$.

Кинетический момент системы Σ сохр-ет постоянное знач-е.

§ 11. Осевые кинетические моменты системы материальных точек

Рассмотрим систему матер. точек $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$, m_k — масса т. A_k, $r_k = r_{OA_k} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ — координатный вектор т. A_k относит. инерц-й ДСО S, $v_k = \dot{r}_k$.

Тогда $M = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k \times m_k v_k$ — кинетический момент системы Σ_A; M — элемент $\mathbb{R}^3$ (зависящий от времени t), т.е. $M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$. Координаты M_x, M_y, M_z называются <u>осевыми кинетическими моментами системы Σ_A</u>.

Выразим M_z через цилиндрич-е коорд-ты.

1) Сначала рассмотрим M_z для <u>одной</u> т. $A(x, y, z)$:

$M = M_A = r \times m v$, где $r = r_{OA}$, $v = \dot{r}$;

$M_z = \langle M, e_z \rangle$, где $e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

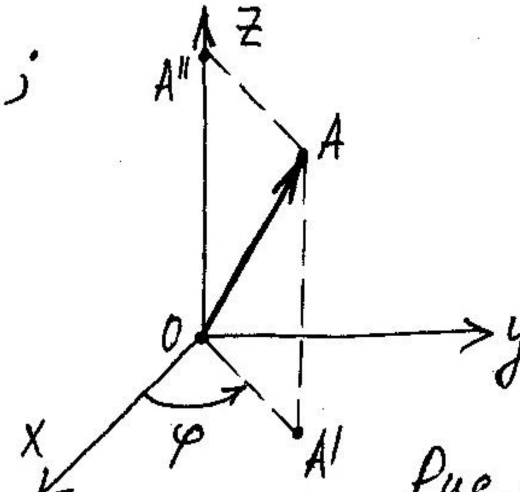


Рис. 1

Цилиндрич. коорд-ты: (ρ, φ, z), $\rho = |OA'|$,

$\varphi = (\widehat{Ox, OA'})_H$, A' – проекция A на Oxy;

$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\varphi = \varphi(t)$ – зависит от времени t; $r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''} =$

$= \rho \cdot e_\rho + z \cdot e_z$

Тогда (см. рис. 1 и 2).

$v = \dot{r} = \dot{\rho} e_\rho + \rho \cdot \dot{e}_\rho + \dot{z} \overset{\text{const}}{e_z} =$

$= \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot e_\varphi + \dot{z} e_z$;

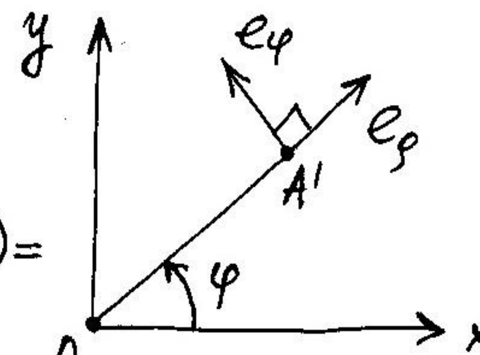
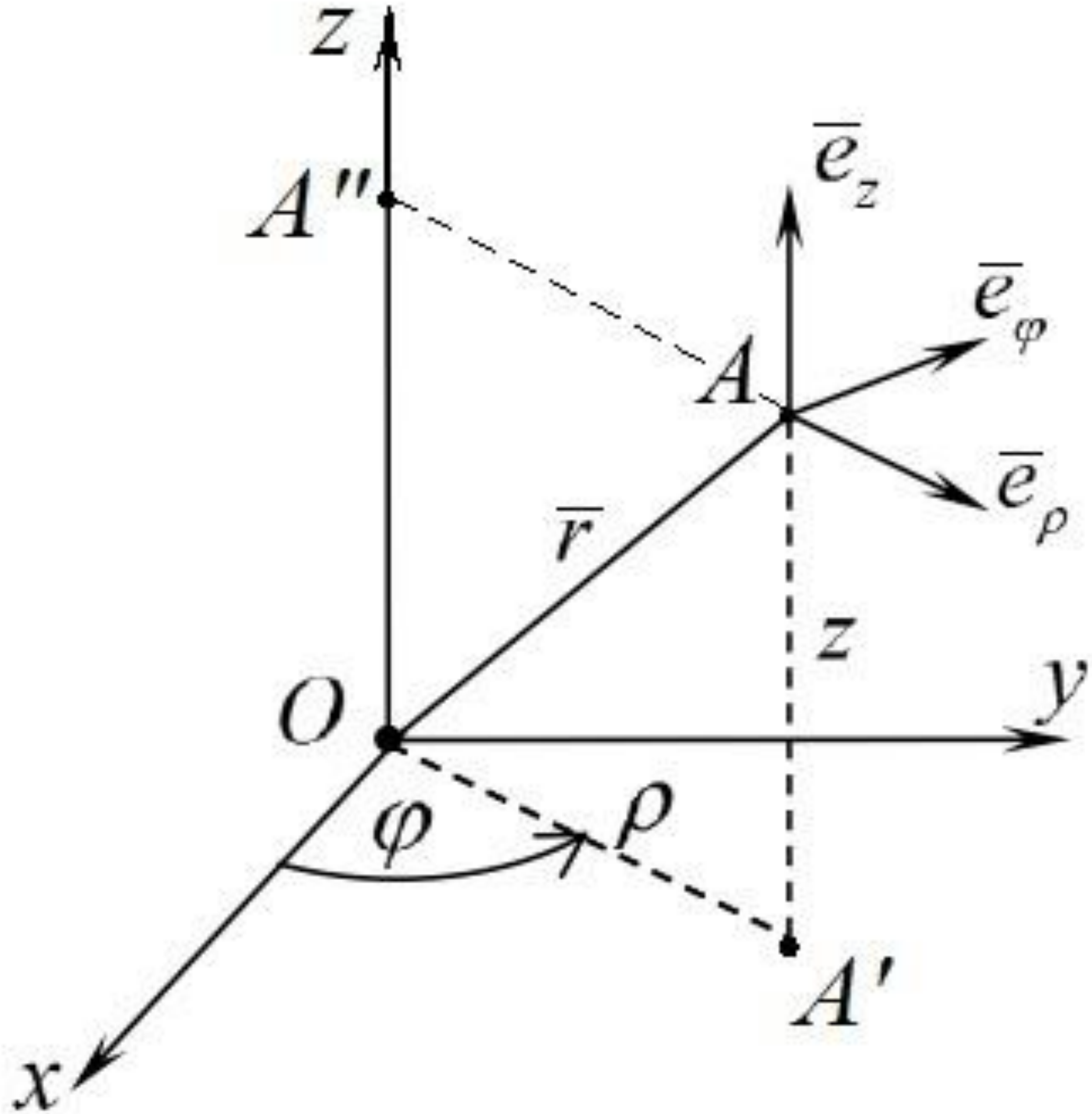
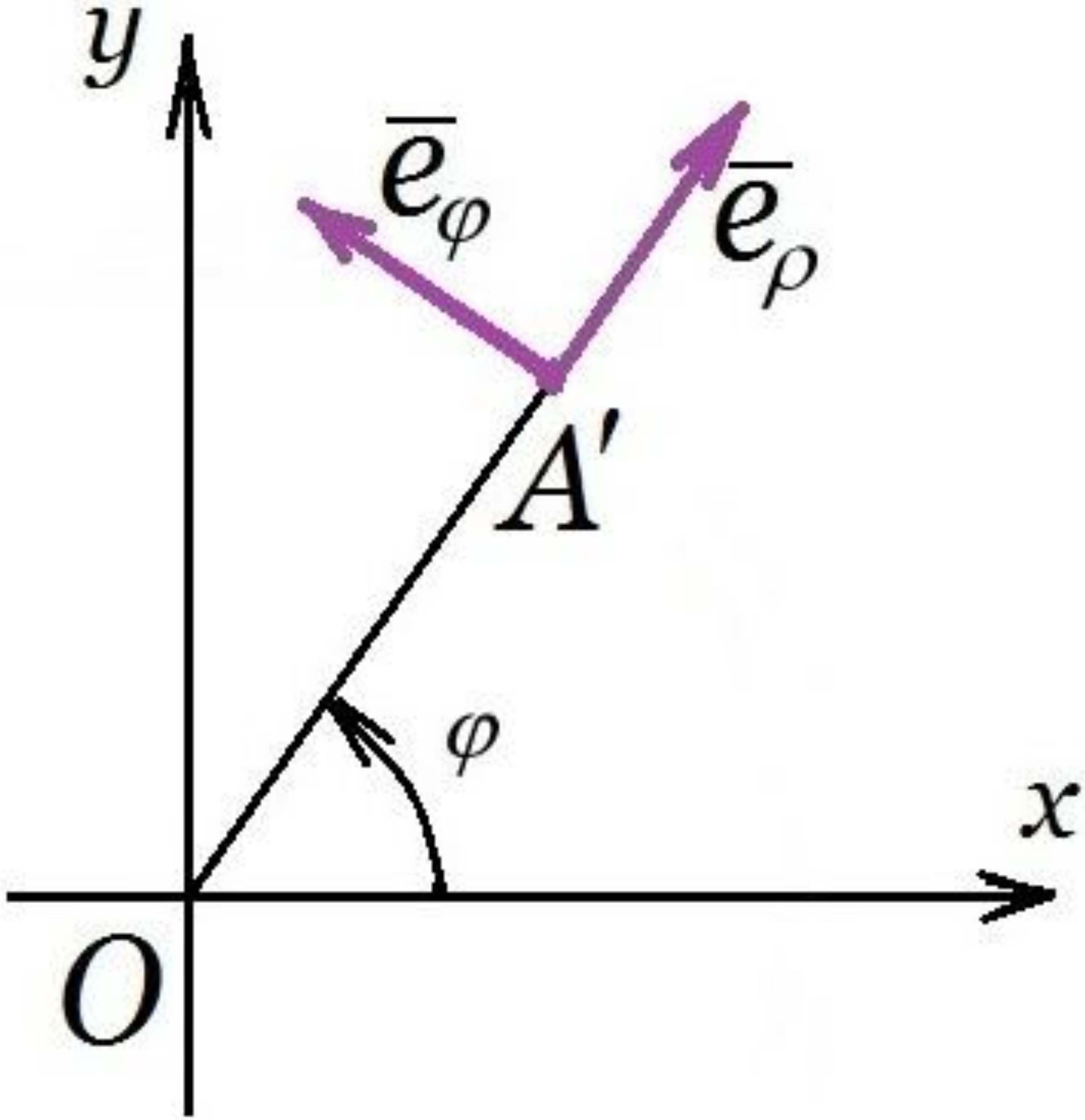


Рис. 2

$r \times v = (\rho \cdot e_\rho + z \cdot e_z) \times (\dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot e_\varphi + \dot{z} \cdot e_z) =$

$= \rho^2 \dot{\varphi} \cdot e_z - \rho \dot{z} \cdot e_\varphi + \dot{\rho} z \cdot e_\varphi - z \rho \dot{\varphi} \cdot e_\rho$


z
A''
$\bar{e}_z$
$\bar{e}_\varphi$
A
$\bar{e}_\rho$
$\bar{r}$
z
y
O
φ
ρ
A'
x



y
$\bar{e}_\varphi$
$\bar{e}_\rho$
A'
φ
x
O

Тогда (см. рис. 1 и 2).

$$v = \dot r = \dot\rho\, e_\rho + \rho\cdot\dot e_\rho + \dot z\, \overset{\text{const}}{\overset{\|}{e_z}} =$$

$$= \dot\rho\, e_\rho + \rho\dot\varphi\cdot e_\varphi + \dot z\, e_z\, ;$$

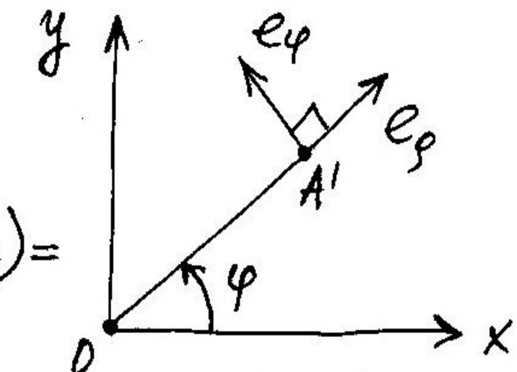


Рис. 2

$$r\times v = (\rho\cdot e_\rho + z\cdot e_z)\times(\dot\rho\, e_\rho + \rho\dot\varphi\cdot e_\varphi + \dot z\cdot e_z) =$$

$$= \rho^2\dot\varphi\cdot e_z - \rho\dot z\cdot e_\varphi + \dot\rho z\cdot e_\varphi - z\rho\dot\varphi\cdot e_\rho$$

(с учетом того, что $e_\rho\times e_\rho = 0$, $e_\rho\times e_\varphi = e_z$, $e_\rho\times e_z = -e_\varphi$, $e_\varphi\times e_z = e_\rho$). След-но, $M_z = \langle M, e_z\rangle = m\langle r\times v, e_z\rangle =$

$$= m\rho^2\dot\varphi\,\langle e_z, e_z\rangle = m\rho^2\dot\varphi$$ (т.к. $e_\rho\perp e_z$, $e_\varphi\perp e_z$).

Итак, получили: $\boxed{M_z = m\rho^2\dot\varphi}$ (1)

2) Рассмотрим M_z для системы точек Σ_A:

$$\boxed{M_z = \sum_{k=1}^{n} (M_k)_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2 \dot{\varphi}_k} \quad (2)$$

$\rho_k = |OA_k'|$

A_k' – проекция A_k на Oxy

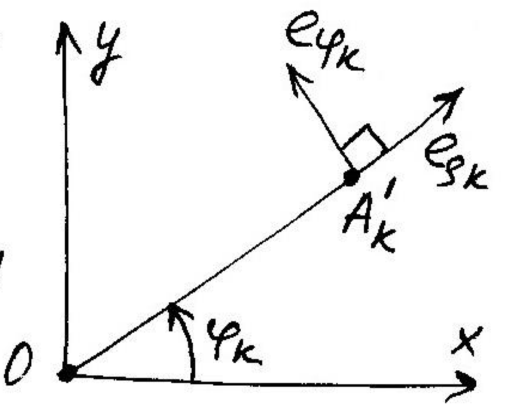


Рис. 3

3) Рассмотрим скорость изменения момента M_z:

$$\dot{M}_z(t) = \frac{d}{dt} \langle M(t), \underset{\text{const}}{\underset{\parallel}{e_z}} \rangle = \langle \dot{M}(t), e_z \rangle =$$

$$= \langle \underbrace{\sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^e}_{\text{сумма моментов всех внешних сил системы } \Sigma_A \text{ (th)}}, e_z \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \underset{a}{r_k} \times \underset{b}{F_k^e}, \underset{c}{e_z} \rangle =$$

(не изменяется при циклической перест-ке)

Смешанное произвед-е: $\langle a \times b, c \rangle = (a, b, c) = (c, a, b) =$

$= \langle c \times a, b \rangle.$

3) Рассмотрим скорость изменения момента M_z:

$$\dot M_z(t) = \frac{d}{dt}\langle M(t), \underset{\text{const}}{e_z}\rangle = \langle \dot M(t), e_z\rangle =$$

$$= \langle \underbrace{\sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^e}_{\substack{\text{сумма моментов всех} \\ \text{внешних сил системы } \Sigma_A \ (\underline{\underline{th}})}}, e_z\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \underset{a}{r_k} \times \underset{b}{F_k^e}, \underset{c}{e_z}\rangle =$$

(не изменяется при циклической перест-ке)

Смешанное произвед-е: $\langle a \times b, c\rangle = (a, b, c) = (c, a, b) =$

$= \langle c \times a, b\rangle$.

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \underset{c}{e_z} \times \underset{a}{r_k}, \underset{b}{F_k^e}\rangle = \underline{\sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e\rangle}$$

$$\left(e_z \times r_k = e_z \times (\rho_k e_{\rho_k} + z_k e_z) = \rho_k (e_z \times e_{\rho_k}) = \rho_k \cdot e_{\varphi_k}\right)$$

Итак, мы получили след-ю формулу:

$$\boxed{\dot M_z = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e\rangle} \quad (3)$$

Итак, мы получили след-ю формулу:

$$\boxed{\dot{M}_z = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle} \quad (3)$$

Заметим, что вектор $\mu_k = r_k \times F_k^e$ – момент силы F_k^e относительно центра O (начала координат);

$$\mu_k = \begin{pmatrix} (\mu_k)_x \\ (\mu_k)_y \\ (\mu_k)_z \end{pmatrix}, \quad (\mu_k)_z = \langle \mu_k, e_z \rangle = \langle r_k \times F_k^e, e_z \rangle -$$

момент силы F_k^e относительно оси Oz.

Мы доказали след-ю теорему.

<u>Теорема</u>. Скорость изменения осевого кинетического момента M_z равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно оси Oz.