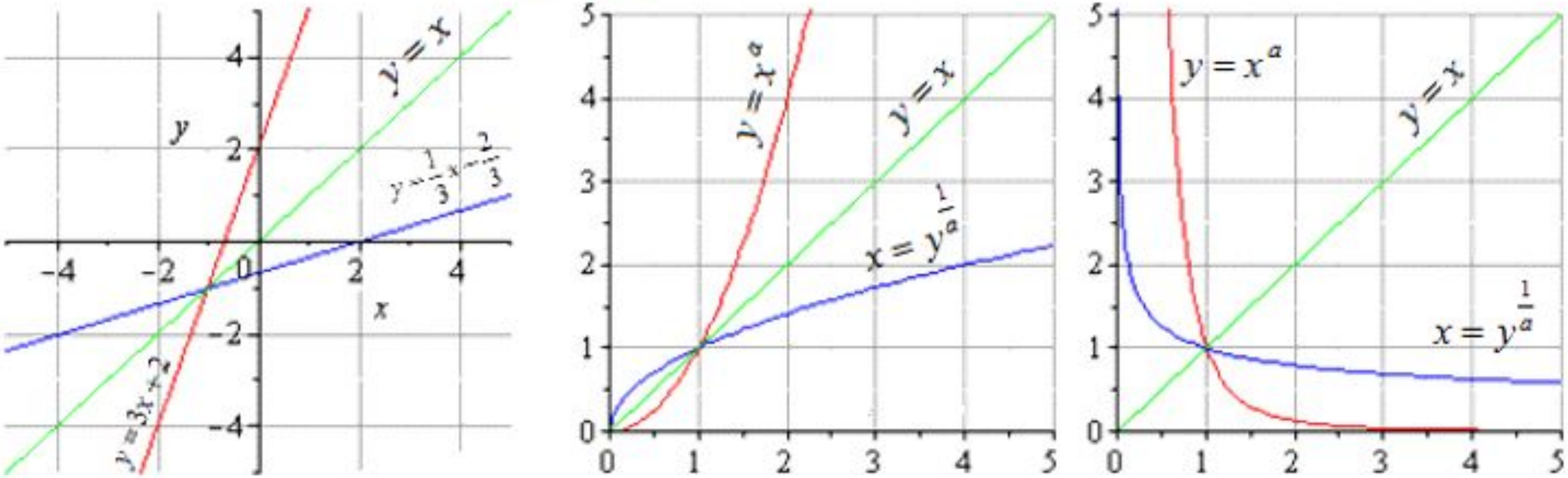
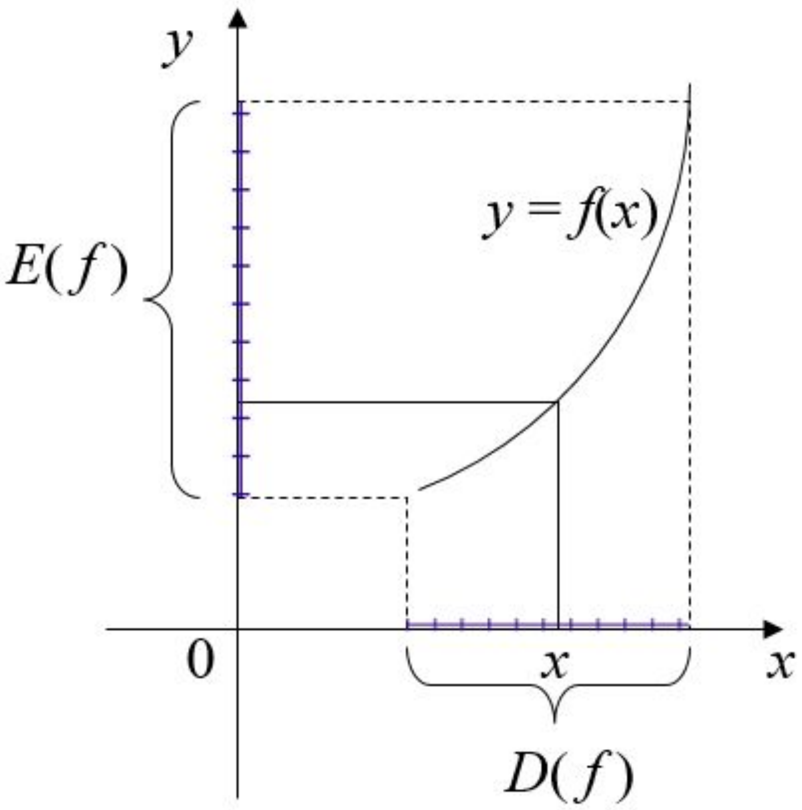
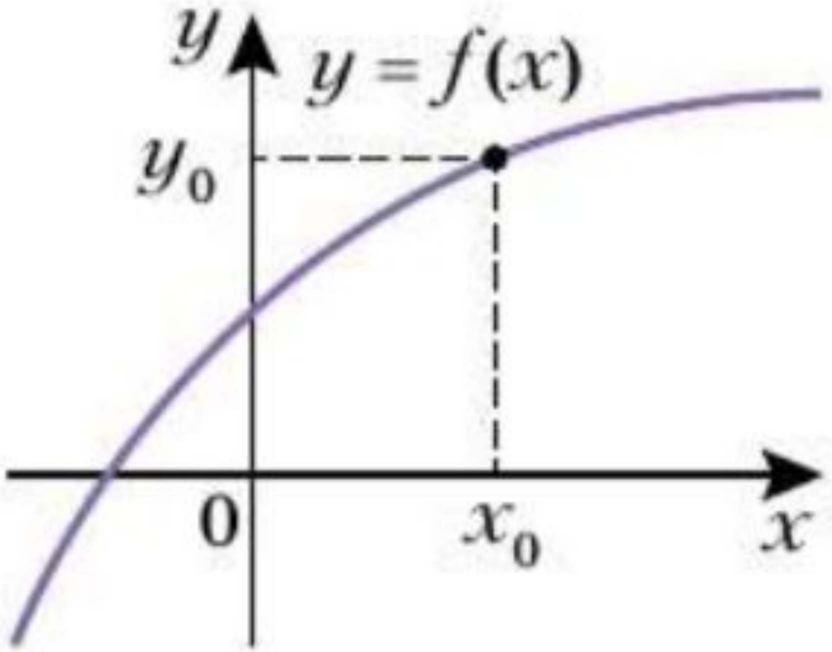
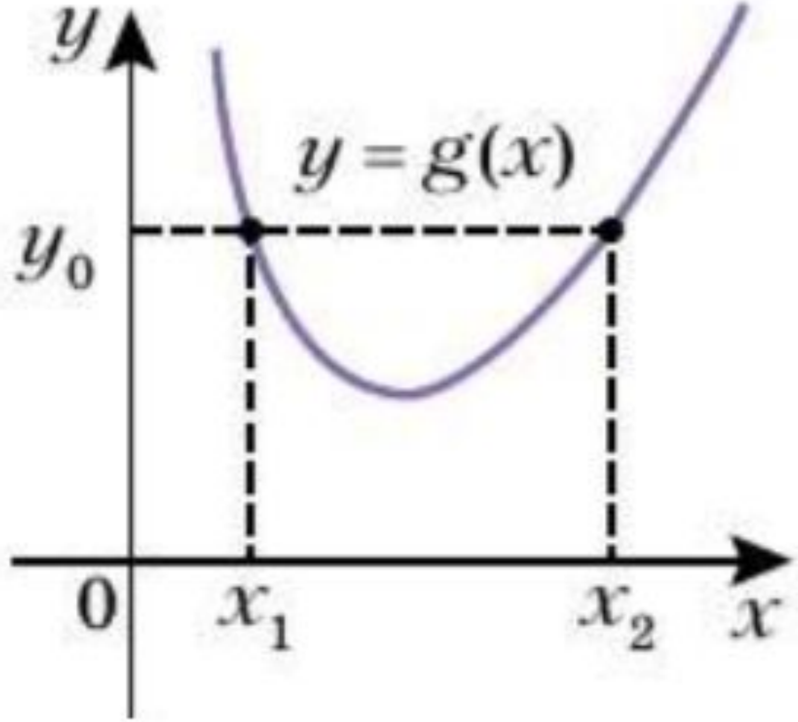
«Взаимно обратные функции»





Если каждому значению x из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определённому правилу f число y, то, говорят, что на этом множестве определена функция.

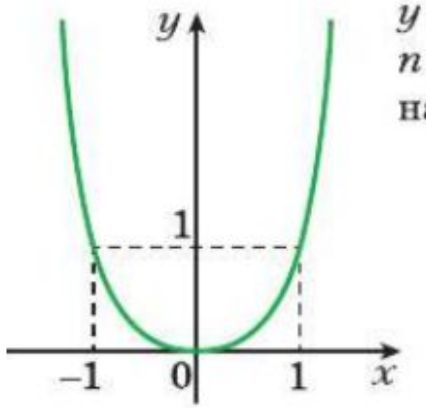




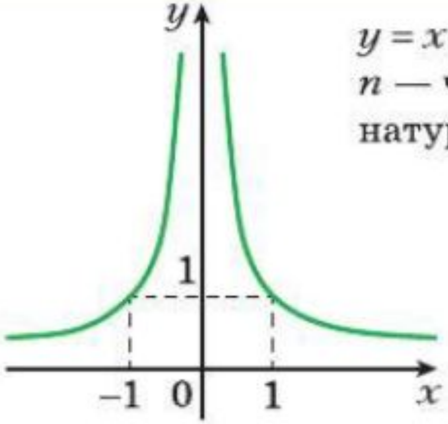
Определение

Функцию $y = f(x)$ называют обратимой, если для любого $y_0 \in E(f)$ существует единственное $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$.

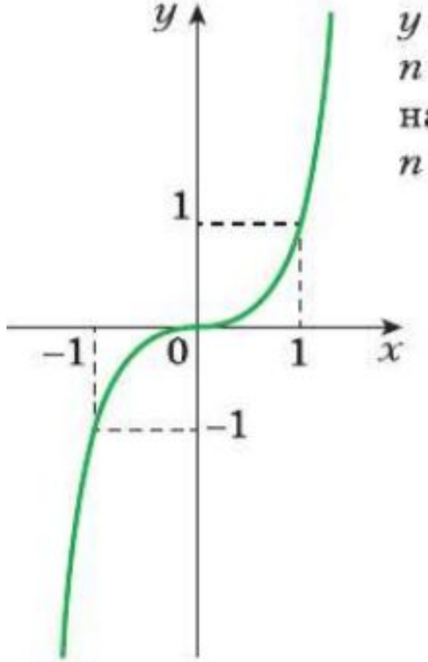
Какие функции являются обратимыми?



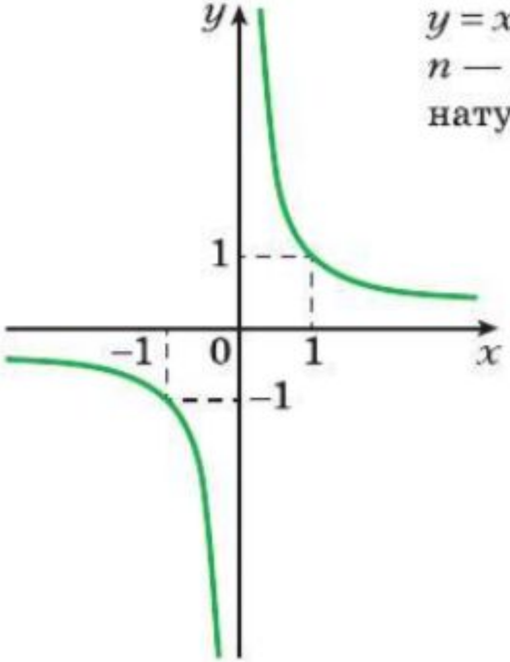
$y = x^n$,
n — чётное натуральное число



$y = x^{-n}$,
n — чётное натуральное число



$y = x^n$,
n — нечётное натуральное число
$n > 1$



$y = x^{-n}$,
n — нечётное натуральное число

Теорема

Если функция является возрастающей (убывающей), то она обратима.

Доказательство

Предположим, что существует возрастающая функция f, не являющаяся обратимой. Тогда найдётся $y_0 \in E(f)$, для которого существуют x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) такие, что $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Вместе с тем функция f — возрастающая, и из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Получили противоречие.

Аналогично рассматривают случай, когда функция f является убывающей. ■

!!! Обратная теорема неверна, т.е. не любая обратимая функция является возрастающей (убывающей)

Практический приём нахождения формулы функции, обратной к функции y=f(x)

Алгоритм

1. **Выяснить, будет ли функция $y = f(x)$ обратимой на всей области определения:** для этого достаточно выяснить, имеет ли уравнение $y = f(x)$ единственный корень относительно переменной x.
   Если нет, то попытаться выделить промежуток, где существует обратная функция (например, это может быть промежуток, где функция $y = f(x)$ возрастает или убывает).
2. **Из равенства $y = f(x)$ выразить x через y.**
3. **В полученной формуле ввести традиционные обозначения: аргумент обозначить через x, а функцию — через y.**

Пример

Найдите функцию, обратную к функции $y = 2x + 4$.

▶ Из равенства $y = 2x + 4$ можно однозначно выразить x через y:

$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$

Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x.

Обозначим в полученной формуле аргумент через x, а функцию — через y.

Получаем функцию $y = \frac{1}{2}x - 2$, обратную к функции $y = 2x + 4$. ◁

Найдите функцию, обратную к функции $y=\frac{1}{x-1}$.

Решение

▶ Область определения: $x \neq 1$. Тогда из равенства $y=\frac{1}{x-1}$ имеем

$$xy - y = 1,\ xy = y + 1,\ x=\frac{y+1}{y}.$$

Обозначим аргумент через x, а функцию — через y и получим функцию $y=\frac{x+1}{x}$, обратную к заданной. ◁

Комментарий

На всей области определения ($x \neq 1$) заданная функция обратима, поскольку из уравнения $y=\frac{1}{x-1}$ можно однозначно выразить x через y ($y \neq 0$ в области значений заданной функции). Полученная формула $x=\frac{y+1}{y}$ задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x. Изменяя обозначения на традиционные, получаем окончательный результат.

Определение

Функции f и g называют взаимно обратными, если:

1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;

2) для любого $x_0 \in D(f)$ из равенства $f(x_0) = y_0$ следует, что $g(y_0) = x_0$, то есть $g(f(x_0)) = x_0$.

Также говорят, что функция g является **обратной к функции** f, а функция f — **обратной** к функции g.

Пример Докажите, что функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = \dfrac{x+1}{2}$ являются взаимно обратными.

Решение. Имеем: $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Пусть $f(x_0) = y_0$, то есть $y_0 = 2x_0 - 1$. Докажем, что $g(y_0) = x_0$.

Имеем: $g(y_0) = \dfrac{y_0+1}{2} = \dfrac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$. ■

Если функция f не является обратимой, то не существует функции, обратной к ней. Любая обратимая функция имеет обратную.

Рассмотрим ещё один пример. Функция $y = x^2$ не является обратимой. Вместе с тем эта функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Следовательно, функция $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, является обратимой. Также принято говорить, что функция $y = x^2$ является **обратимой на множестве** $[0; +\infty)$. Найдём функцию, обратную к функции f.

Имеем: $y = x^2$, где $x \in [0; +\infty)$. Отсюда $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$. Равенство $\sqrt{y} = x$ задаёт функцию с аргументом y и зависимой переменной x.

Воспользовавшись традиционными обозначениями, получим функцию $y = \sqrt{x}$, обратную к функции f.

Теорема

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Доказательство

Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Тогда $b = f(a)$. Если функция g является обратной к функции f, то $g(b) = a$, то есть точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$.

Покажем, что точки M и N симметричны относительно прямой $y = x$.

Если $a = b$, то точки M и N совпадают и принадлежат прямой $y = x$.

При $a \neq b$ имеем (рис. 7.5): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка MN, а следовательно, принадлежит серединному перпендикуляру отрезка MN. Середина K отрезка MN имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, то есть принадлежит прямой $y = x$. Следовательно, прямая $y = x$ является серединным перпендикуляром отрезка MN. ■

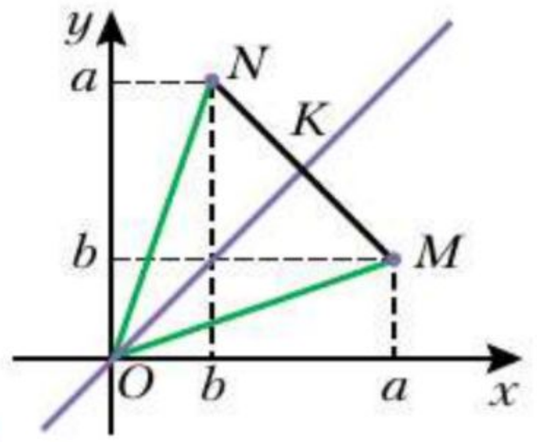
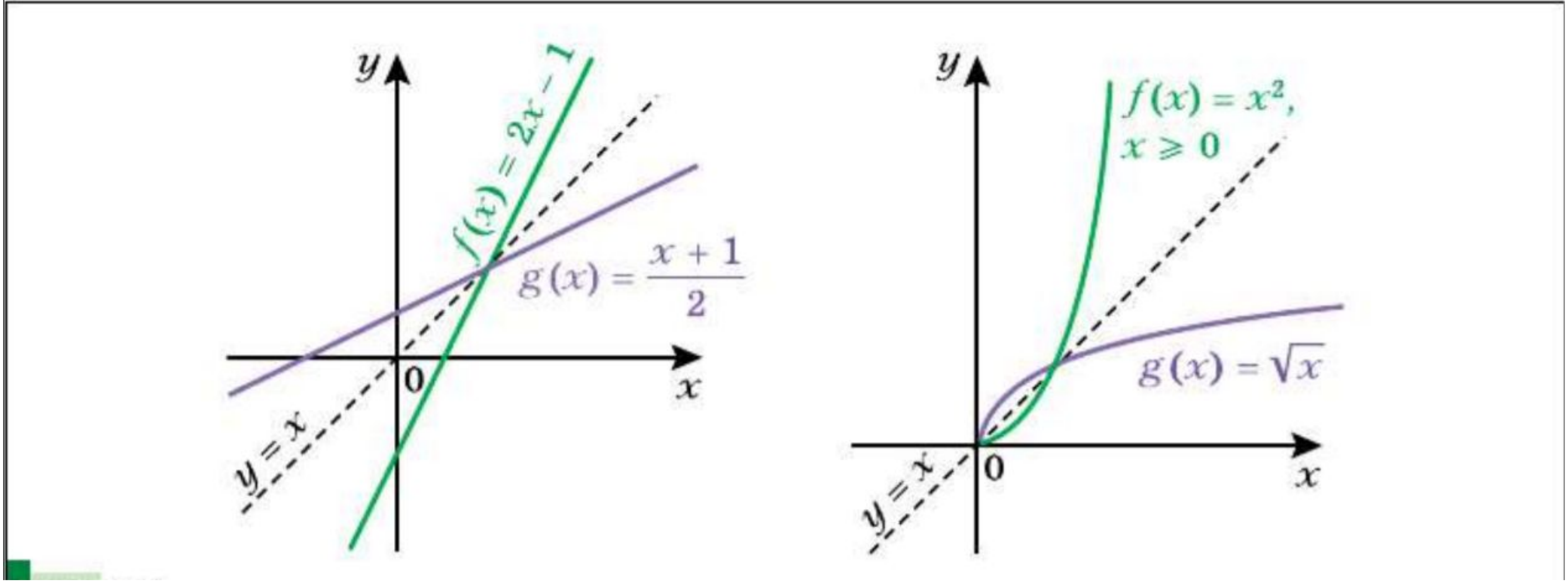


Рис. 7.5

Доказанную теорему иллюстрируют графики взаимно обратных функций, которые рассматривались выше



Теорема

Если функция f является возрастающей (убывающей), то обратная к ней функция g является также возрастающей (убывающей).

Доказательство

Предположим, что функция f — возрастающая и при этом обратная к ней функция g не является возрастающей. Тогда найдутся такие $y_1 \in D(g)$ и $y_2 \in D(g)$, что из неравенства $y_1 < y_2$ будет следовать неравенство $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Пусть $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Получаем, что $x_1 \geqslant x_2$. Так как функция f — возрастающая, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то есть $y_1 \geqslant y_2$. Получили противоречие.

Для убывающей функции рассуждаем аналогично. ■

Теорема

Общие точки графиков возрастающих взаимно обратных функций лежат на прямой $y = x$.

Доказательство

Пусть $M(a; b)$ — общая точка графиков взаимно обратных возрастающих функций f и g. Докажем, что $a = b$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, например, что $a < b$. Так как графики взаимно обратных функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$, то точка $N(b; a)$ является для них общей. В силу возрастания функции f можно записать: $f(a) < f(b)$. Но $f(a) = b$, $f(b) = a$. Получили $b < a$, что противоречит предположению $a < b$. Аналогично рассматривается случай, когда $a > b$. Таким образом, $a = b$. ■

Следствие

Если функции f и g — взаимно обратные и возрастающие, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно каждому из уравнений $f(x) = x$ или $g(x) = x$.

Пример Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{x}+5} = x - 5$.

Решение. Выполним замену $\sqrt{x} = t$. Получаем $\sqrt{t+5} = t^2 - 5$. Рассмотрим функции $f(t) = \sqrt{t+5}$ и $g(t) = t^2 - 5$, $D(g) = [0; +\infty)$. Эти функции — взаимно обратные и возрастающие. Тогда из следствия теоремы 7.4 следует, что уравнение $\sqrt{t+5} = t^2 - 5$ равносильно системе $\begin{cases} t^2 - 5 = t, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$

Отсюда $t = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$. Теперь можно записать: $\sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$; $x = \dfrac{22+2\sqrt{21}}{4} = \dfrac{11+\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{11+\sqrt{21}}{2}$. ■

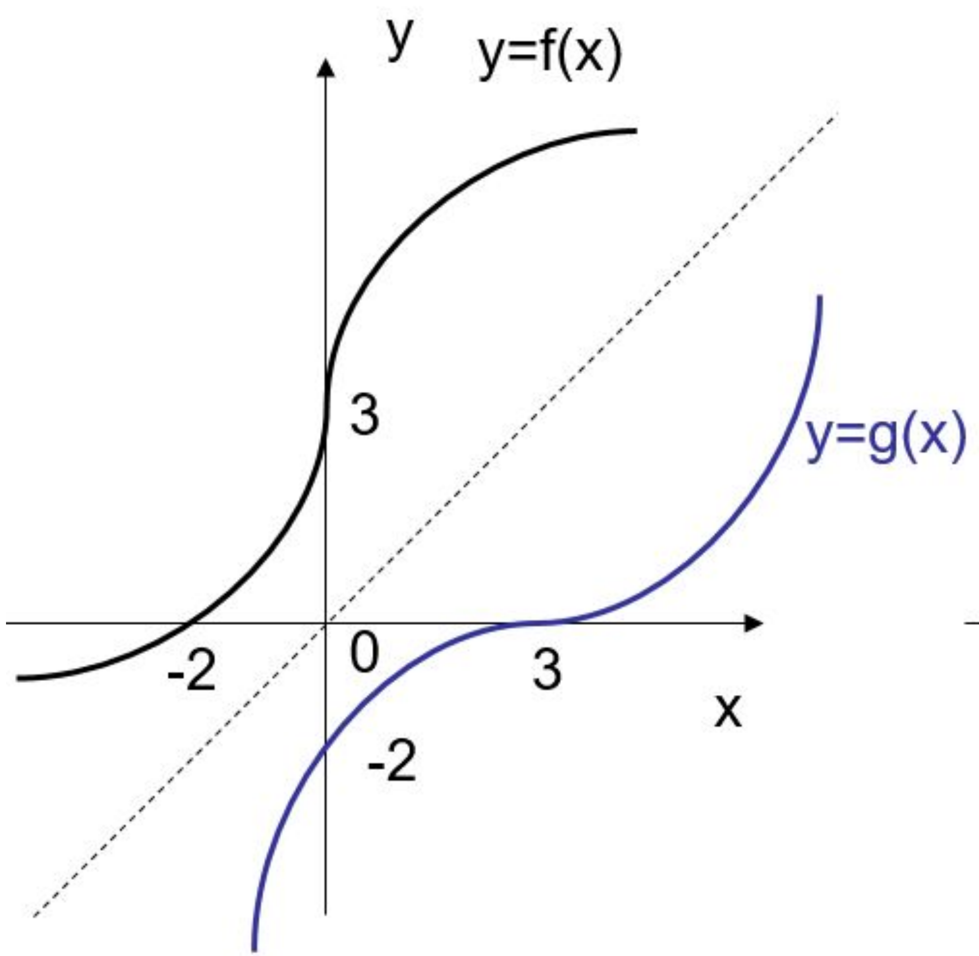
Свойства обратных функций.

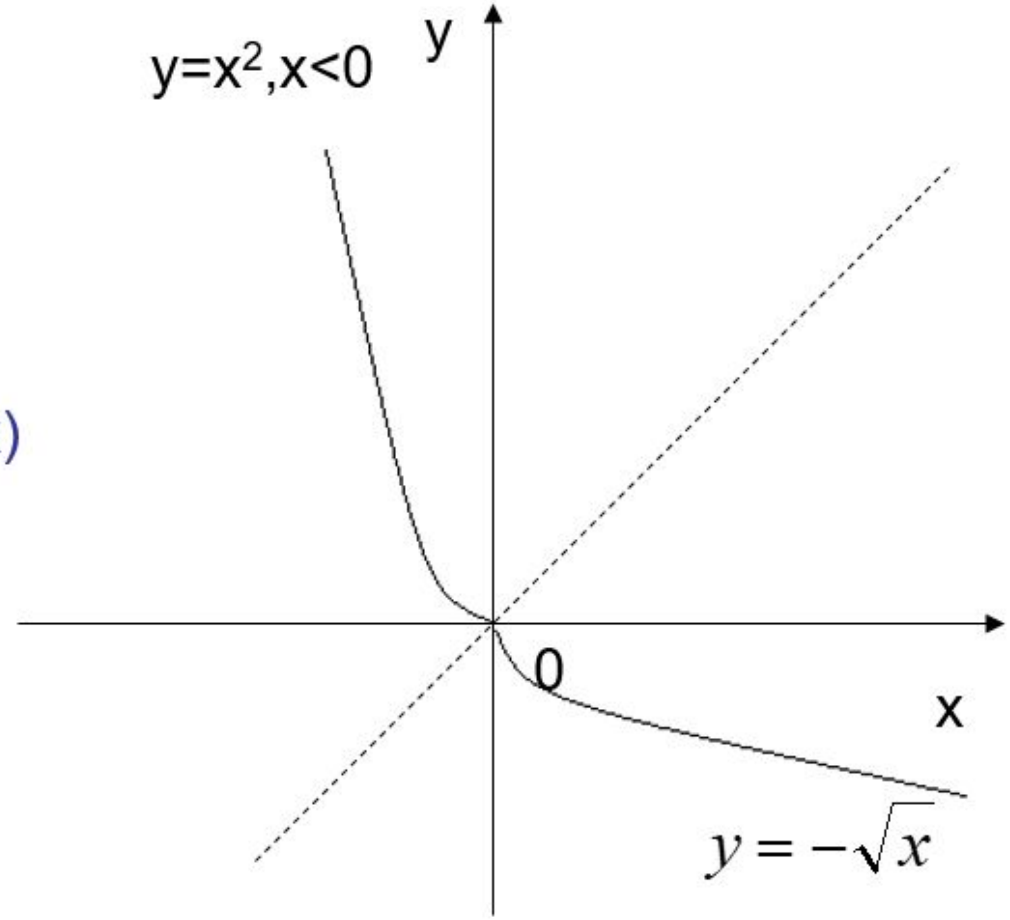
1. **Область определения обратной функции f^{-1} совпадает с множеством значений исходной f, а множество значений обратной функции f^{-1} совпадает с областью определения исходной функции f:**

$$D(f^{-1}) = E(f),\ E(f^{-1}) = D(f).$$

2. **Монотонная функция является обратимой:**

- **если функция f возрастает, то обратная к ней функция f^{-1} также возрастает;**
- **если функция f убывает, то обратная к ней функция f^{-1} также убывает.**





1. D(f)=R
2. E(f)=R
3. возрастающая

1. D(g)=R
2. E(g)=R
3. возрастающая

1. D(y)=(-∞;0]
2. E(y)=[0;+∞)
3. убывающая

1. D(y)=[0;+∞)
2. E(y)=(-∞;0]
3. убывающая

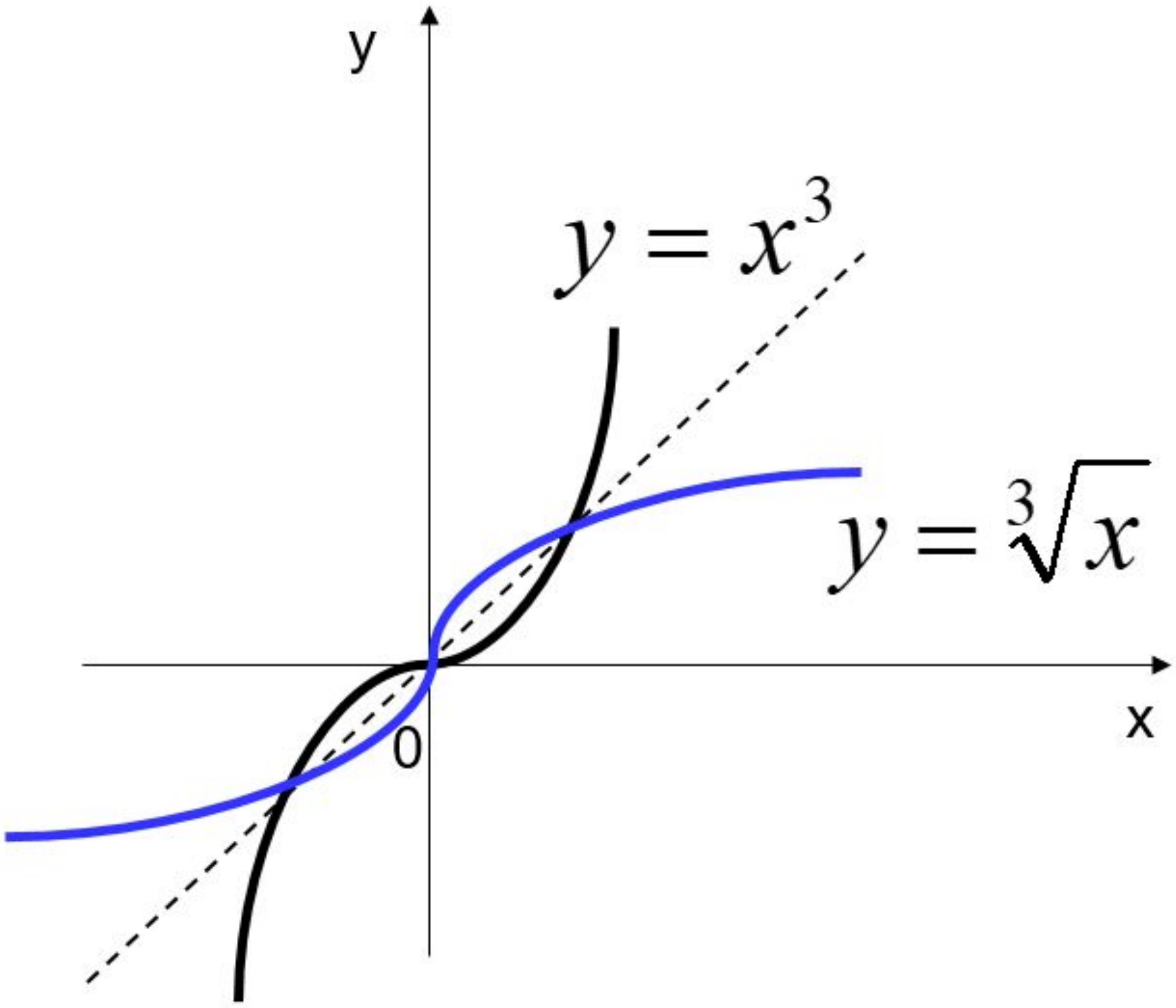
Построить график функции, обратной данной.

Дано: $y = x^3$

Построить функцию, обратную к данной.

Решение: $x^3 = y$

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$



Домашнее задание-№123,129 и задачи ниже на слайде

Найди функцию, обратную данной $f(x) = -1 - 19x$:

- $y = 19 \cdot (-1 - x)$
- $y = \dfrac{19}{(-1 - x)}$
- $y = \dfrac{(x - 19)}{-1}$
- $y = \dfrac{(-1 - x)}{19}$
- $x = \dfrac{(-1 - y)}{19}$

Функция вида $y = 4x + 7$:

- не обратима
- обратима

Даны функции $f(x) = 5^x$ и $g(x) = \dfrac{x}{5}$.

Вычислите значение сложной функции $g(f(x))$, если аргумент x равен 2.