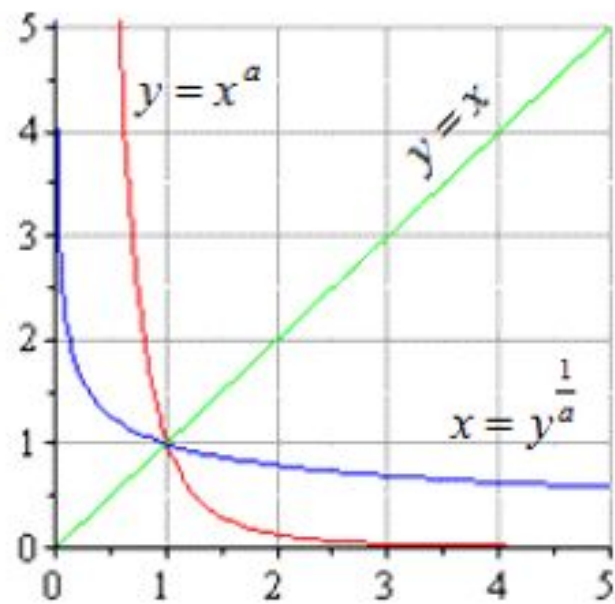
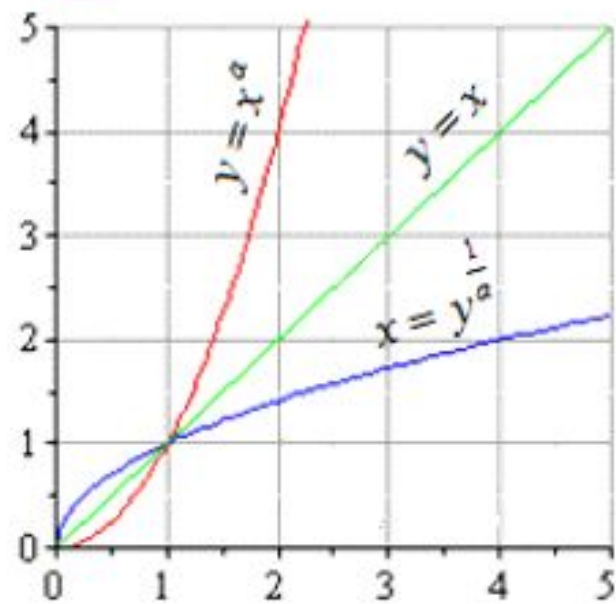
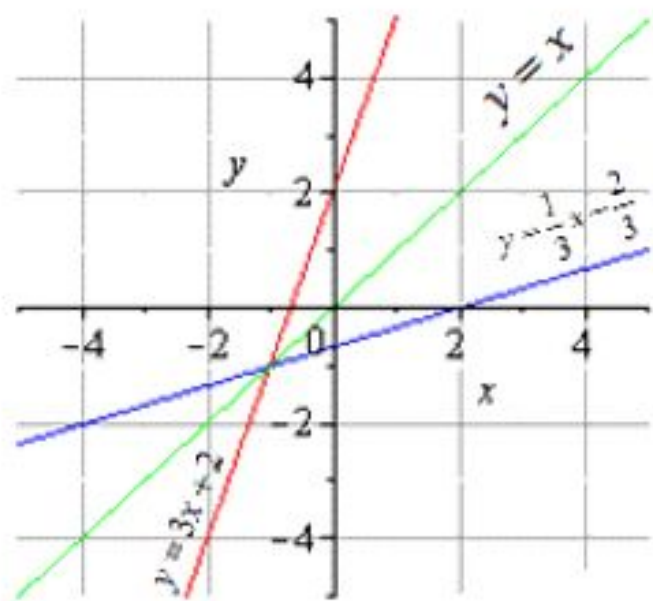
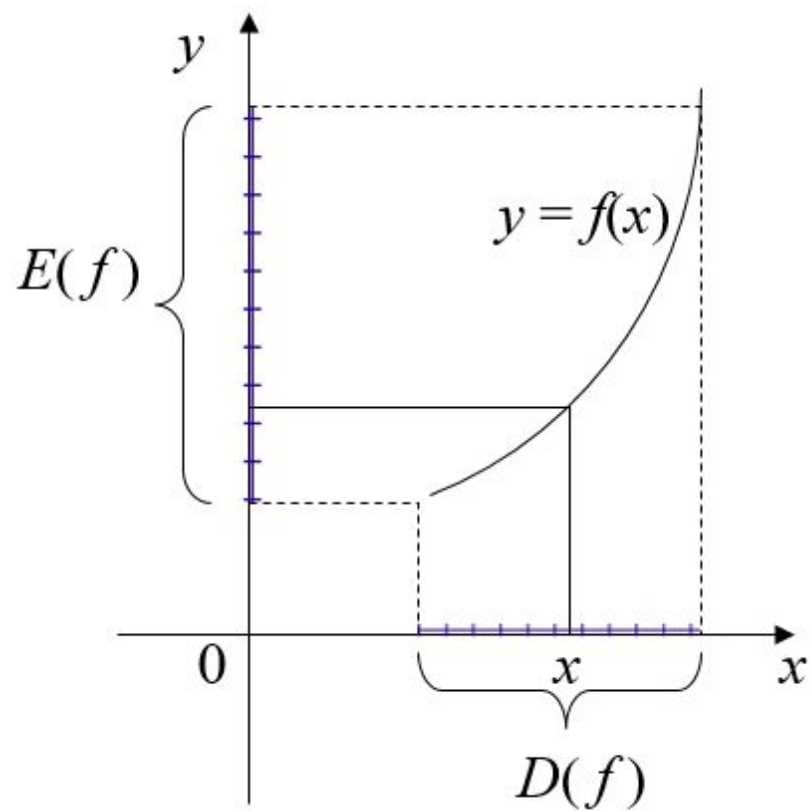
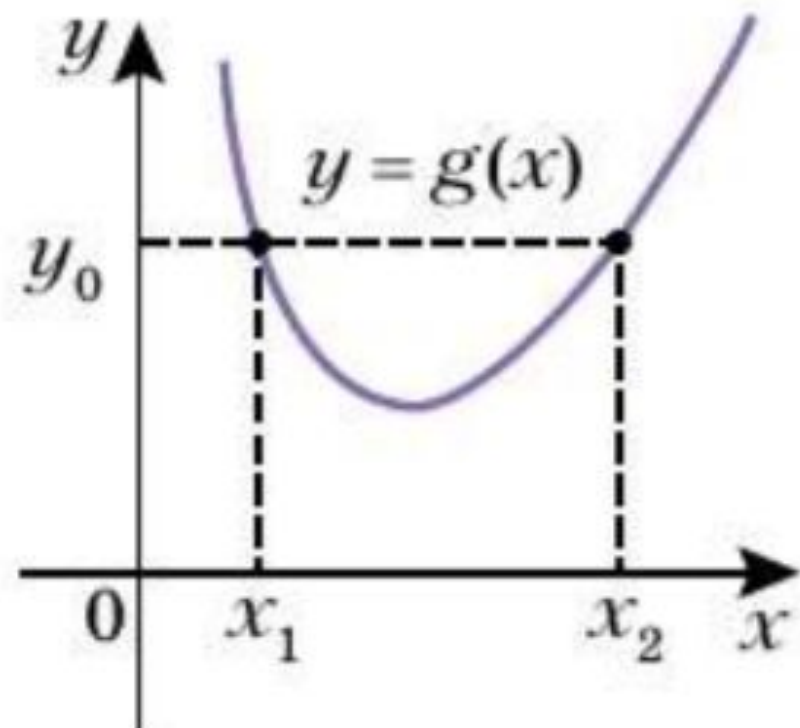
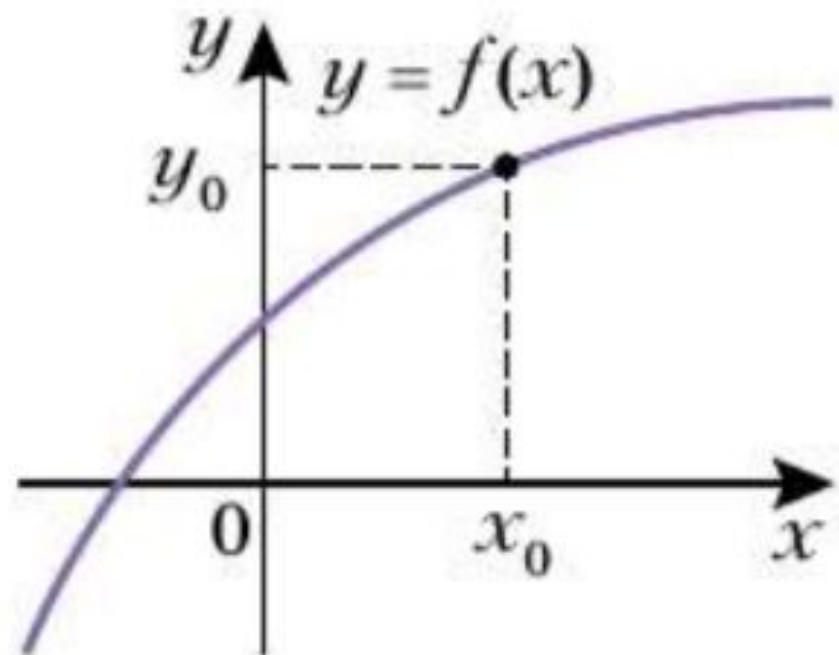


# «Взаимно обратные функции»





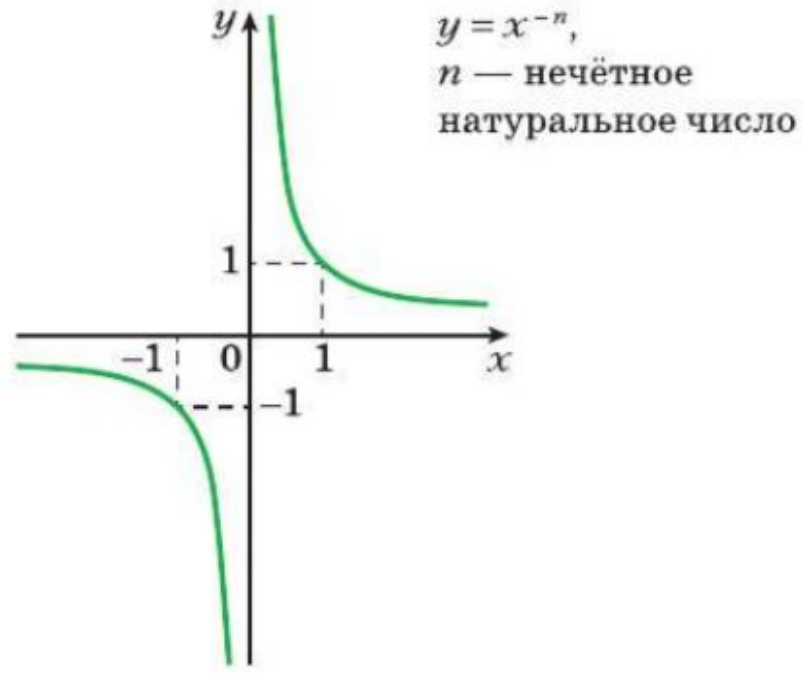
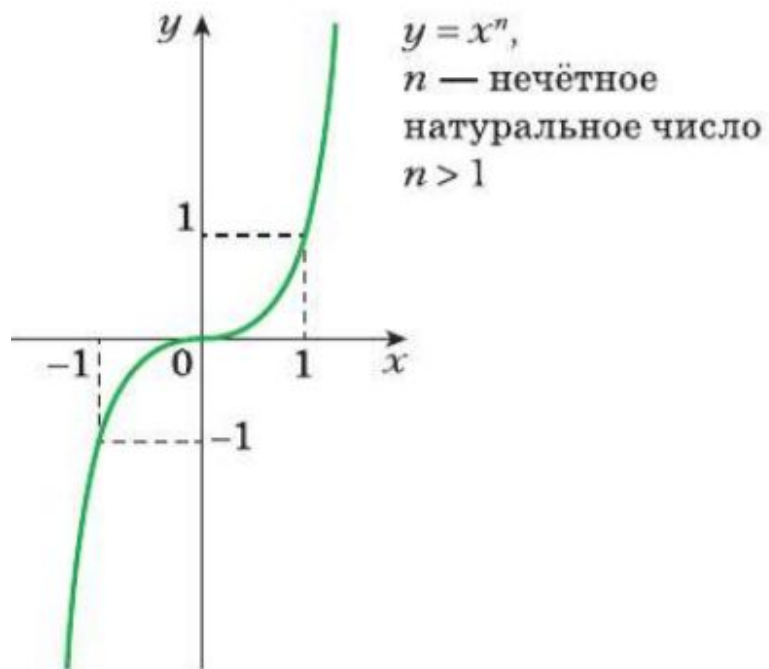
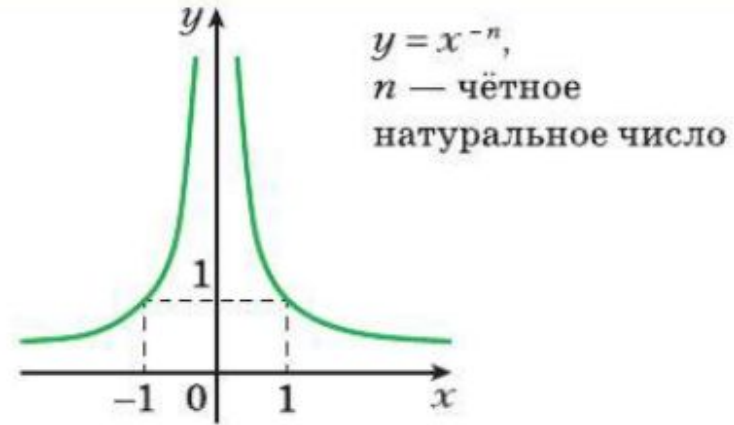
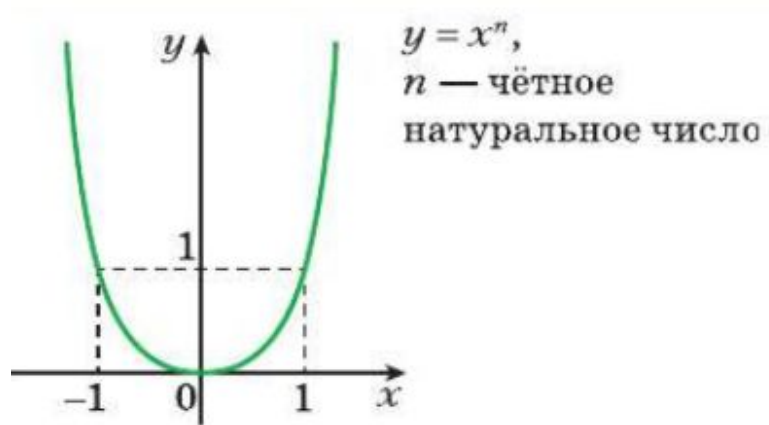
Если каждому значению  $x$  из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определённому правилу  $f$  число  $y$ , то, говорят, что на этом множестве определена функция.



### Определение

Функцию  $y = f(x)$  называют обратимой, если для любого  $y_0 \in E(f)$  существует единственное  $x_0 \in D(f)$  такое, что  $y_0 = f(x_0)$ .

# Какие функции являются обратимыми?



## □ □ → Теорема

**Если функция является возрастающей (убывающей), то она обратима.**

### Доказательство

Предположим, что существует возрастающая функция  $f$ , не являющаяся обратимой. Тогда найдётся  $y_0 \in E(f)$ , для которого существуют  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) такие, что  $f(x_1) = f(x_2) = y_0$ . Вместе с тем функция  $f$  — возрастающая, и из неравенства  $x_1 < x_2$  следует, что  $f(x_1) < f(x_2)$ . Получили противоречие.

Аналогично рассматривают случай, когда функция  $f$  является убывающей. ■

!!! Обратная теорема неверна, т.е. не любая обратимая функция является возрастающей (убывающей)



# Практический приём нахождения формулы функции, обратной к функции $y=f(x)$

## Алгоритм

1. **Выяснить, будет ли функция  $y = f(x)$  обратимой на всей области определения:** для этого достаточно выяснить, имеет ли уравнение  $y = f(x)$  единственный корень относительно переменной  $x$ . Если нет, то попытаться выделить промежуток, где существует обратная функция (например, это может быть промежуток, где функция  $y = f(x)$  возрастает или убывает).
2. **Из равенства  $y = f(x)$  выразить  $x$  через  $y$ .**
3. **В полученной формуле ввести традиционные обозначения:** аргумент обозначить через  $x$ , а функцию — через  $y$ .

## Пример

Найдите функцию, обратную к функции  $y = 2x + 4$ .

► Из равенства  $y = 2x + 4$  можно однозначно выразить  $x$  через  $y$ :

$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$

Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через  $y$ , а функция — через  $x$ .

Обозначим в полученной формуле аргумент через  $x$ , а функцию — через  $y$ .

Получаем функцию  $y = \frac{1}{2}x - 2$ , обратную к функции  $y = 2x + 4$ . ◁

## Найдите функцию, обратную к функции

$$y = \frac{1}{x-1}.$$

### Решение

► Область определения:  $x \neq 1$ . Тогда из равенства  $y = \frac{1}{x-1}$  имеем

$$xy - y = 1, \quad xy = y + 1, \quad x = \frac{y+1}{y}.$$

Обозначим аргумент через  $x$ , а функцию — через  $y$  и получим функцию  $y = \frac{x+1}{x}$ , обратную к заданной. ◀

### Комментарий

На всей области определения ( $x \neq 1$ ) заданная функция обратима, поскольку из уравнения  $y = \frac{1}{x-1}$  можно однозначно выразить  $x$  через  $y$  ( $y \neq 0$  в области значений заданной функции). Полученная формула  $x = \frac{y+1}{y}$  задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через  $y$ , а функция — через  $x$ . Изменяя обозначения на традиционные, получаем окончательный результат.



□ □ → **Определение**

Функции  $f$  и  $g$  называют взаимно обратными, если:

1)  $D(f) = E(g)$  и  $E(f) = D(g)$ ;

2) для любого  $x_0 \in D(f)$  из равенства  $f(x_0) = y_0$  следует, что  $g(y_0) = x_0$ , то есть  $g(f(x_0)) = x_0$ .

Также говорят, что функция  $g$  является обратной к функции  $f$ , а функция  $f$  — обратной к функции  $g$ .

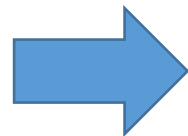


**Пример** Докажите, что функции  $f(x) = 2x - 1$  и  $g(x) = \frac{x + 1}{2}$  являются взаимно обратными.

**Решение.** Имеем:  $D(f) = E(g) = \mathbf{R}$ ,  $E(f) = D(g) = \mathbf{R}$ .

Пусть  $f(x_0) = y_0$ , то есть  $y_0 = 2x_0 - 1$ . Докажем, что  $g(y_0) = x_0$ .

$$\text{Имеем: } g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0. \blacksquare$$



Если функция  $f$  не является обратимой, то не существует функции, обратной к ней. Любая обратимая функция имеет обратную.

Рассмотрим ещё один пример. Функция  $y = x^2$  не является обратной. Вместе с тем эта функция возрастает на промежутке  $[0; +\infty)$ . Следовательно, функция  $f(x) = x^2$ ,  $D(f) = [0; +\infty)$ , является обратной. Также принято говорить, что функция  $y = x^2$  является **обратимой на множестве**  $[0; +\infty)$ . Найдём функцию, обратную к функции  $f$ .

Имеем:  $y = x^2$ , где  $x \in [0; +\infty)$ . Отсюда  $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$ . Равенство  $\sqrt{y} = x$  задаёт функцию с аргументом  $y$  и зависимой переменной  $x$ .

Воспользовавшись традиционными обозначениями, получим функцию  $y = \sqrt{x}$ , обратную к функции  $f$ .

□ □ → Теорема

**Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой  $y = x$ .**

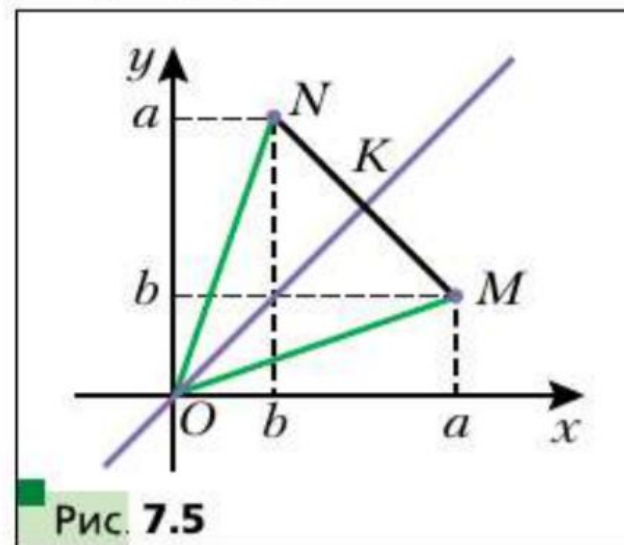
Доказательство

Пусть точка  $M(a; b)$  принадлежит графику функции  $y = f(x)$ . Тогда  $b = f(a)$ . Если функция  $g$  является обратной к функции  $f$ , то  $g(b) = a$ , то есть точка  $N(b; a)$  принадлежит графику функции  $y = g(x)$ .

Покажем, что точки  $M$  и  $N$  симметричны относительно прямой  $y = x$ .

Если  $a = b$ , то точки  $M$  и  $N$  совпадают и принадлежат прямой  $y = x$ .

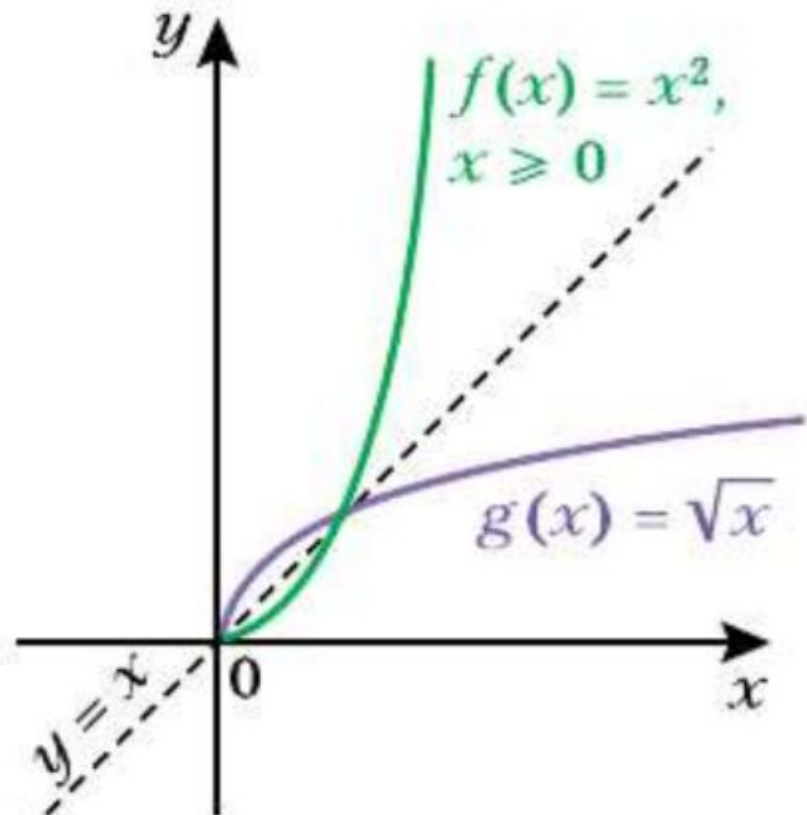
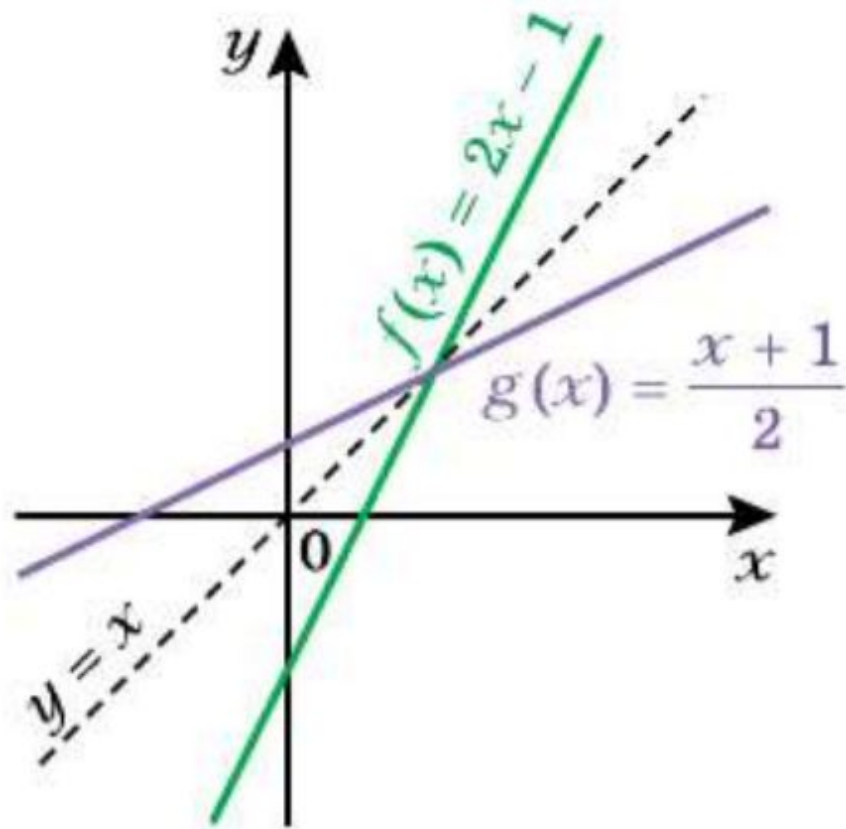
При  $a \neq b$  имеем (рис. 7.5):  $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ , т. е. точка  $O$  равноудалена от концов отрезка  $MN$ , а следовательно, принадлежит серединному перпендикуляру отрезка  $MN$ . Середина  $K$  отрезка



$MN$  имеет координаты  $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$ , то есть принадлежит прямой  $y = x$ .

Следовательно, прямая  $y = x$  является серединным перпендикуляром отрезка  $MN$ . ■

Доказанную теорему иллюстрируют графики взаимно обратных функций, которые рассматривались выше





□ □ → **Теорема**

**Если функция  $f$  является возрастающей (убывающей), то обратная к ней функция  $g$  является также возрастающей (убывающей).**

**Доказательство**

Предположим, что функция  $f$  — возрастающая и при этом обратная к ней функция  $g$  не является возрастающей. Тогда найдутся такие  $y_1 \in D(g)$  и  $y_2 \in D(g)$ , что из неравенства  $y_1 < y_2$  будет следовать неравенство  $g(y_1) \geq g(y_2)$ . Пусть  $g(y_1) = x_1$ ,  $g(y_2) = x_2$ . Получаем, что  $x_1 \geq x_2$ . Так как функция  $f$  — возрастающая, то  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , то есть  $y_1 \geq y_2$ . Получили противоречие.

Для убывающей функции рассуждаем аналогично. ■

□ □ → **Теорема**

**Общие точки графиков возрастающих взаимно обратных функций лежат на прямой  $y = x$ .**

Доказательство

Пусть  $M(a; b)$  — общая точка графиков взаимно обратных возрастающих функций  $f$  и  $g$ . Докажем, что  $a = b$ .

Будем рассуждать от противного. Предположим, например, что  $a < b$ . Так как графики взаимно обратных функций  $f$  и  $g$  симметричны относительно прямой  $y = x$ , то точка  $N(b; a)$  является для них общей. В силу возрастания функции  $f$  можно записать:  $f(a) < f(b)$ . Но  $f(a) = b$ ,  $f(b) = a$ . Получили  $b < a$ , что противоречит предположению  $a < b$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $a > b$ . Таким образом,  $a = b$ . ■

## ■ ■ ➔ Следствие

Если функции  $f$  и  $g$  — взаимно обратные и возрастающие, то уравнение  $f(x) = g(x)$  равносильно каждому из уравнений  $f(x) = x$  или  $g(x) = x$ .

**Пример** Решите уравнение  $\sqrt{\sqrt{x} + 5} = x - 5$ .

**Решение.** Выполним замену  $\sqrt{x} = t$ . Получаем  $\sqrt{t + 5} = t^2 - 5$ . Рассмотрим функции  $f(t) = \sqrt{t + 5}$  и  $g(t) = t^2 - 5$ ,  $D(g) = [0; +\infty)$ . Эти функции — взаимно обратные и возрастающие. Тогда из следствия теоремы 7.4 следует, что уравнение  $\sqrt{t + 5} = t^2 - 5$  равносильно системе  $\begin{cases} t^2 - 5 = t, \\ t \geq 0. \end{cases}$

Отсюда  $t = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ . Теперь можно записать:  $\sqrt{x} = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ ;  $x =$   
 $= \frac{22 + 2\sqrt{21}}{4} = \frac{11 + \sqrt{21}}{2}$ .

**Ответ:**  $\frac{11 + \sqrt{21}}{2}$ . ■



# Свойства обратных функций.

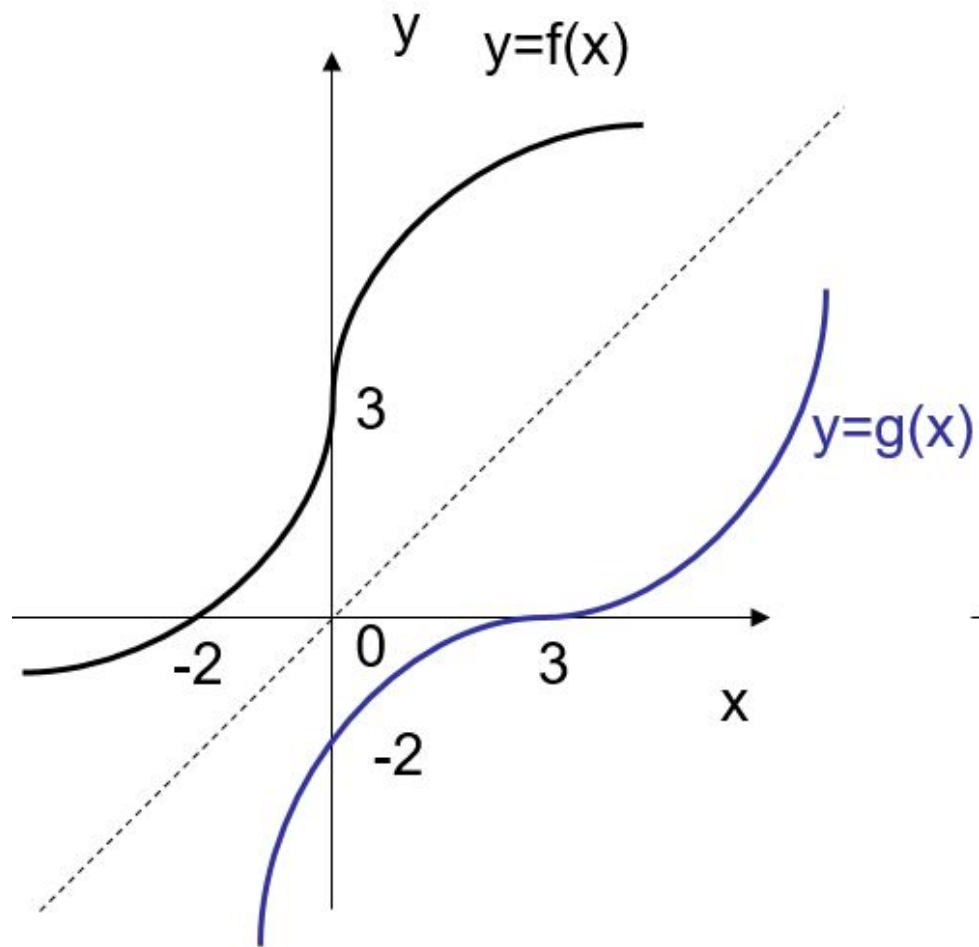
1. Область определения обратной функции  $f^{-1}$  совпадает с множеством значений исходной  $f$ , а множество значений обратной функции  $f^{-1}$  совпадает с областью определения исходной функции  $f$ :

$$D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f).$$

2. Монотонная функция является обратимой:

- если функция  $f$  возрастает, то обратная к ней функция  $f^{-1}$  также возрастает;
- если функция  $f$  убывает, то обратная к ней функция  $f^{-1}$  также убывает.





1.  $D(f)=\mathbb{R}$

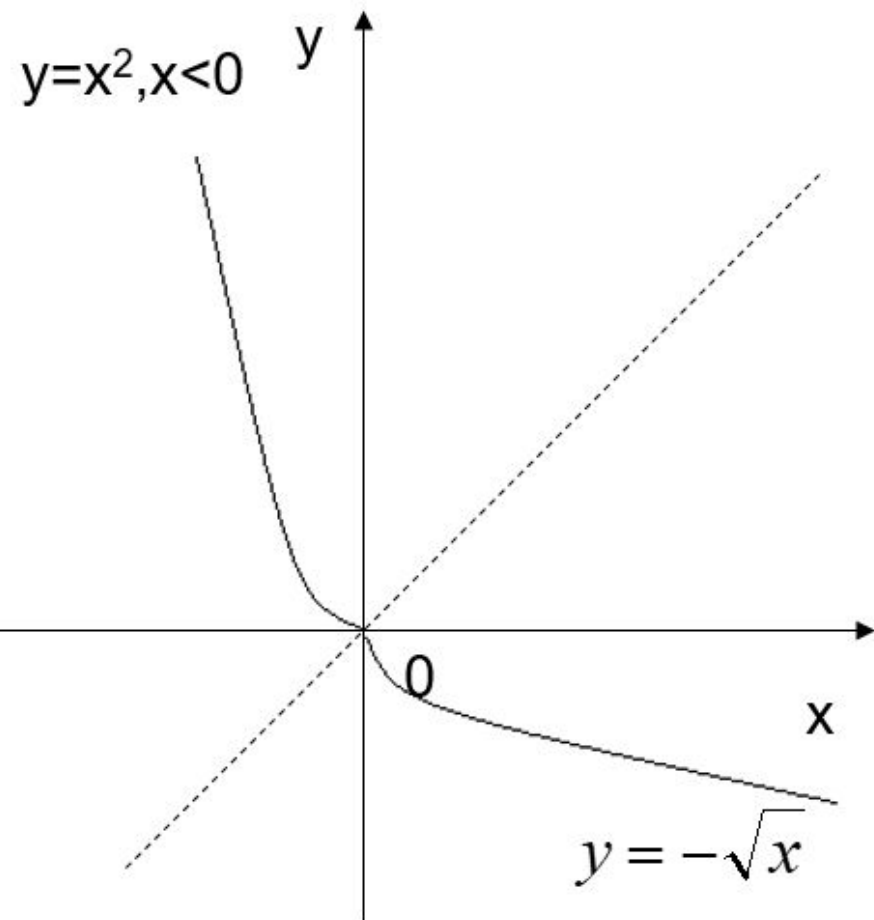
2.  $E(f)=\mathbb{R}$

3. возрастающая

1.  $D(g)=\mathbb{R}$

2.  $E(g)=\mathbb{R}$

3. возрастающая



1.  $D(y)=(-\infty; 0]$

2.  $E(y)=[0; +\infty)$

3. убывающая

1.  $D(y)=[0; +\infty)$

2.  $E(y)=(-\infty; 0]$

3. убывающая

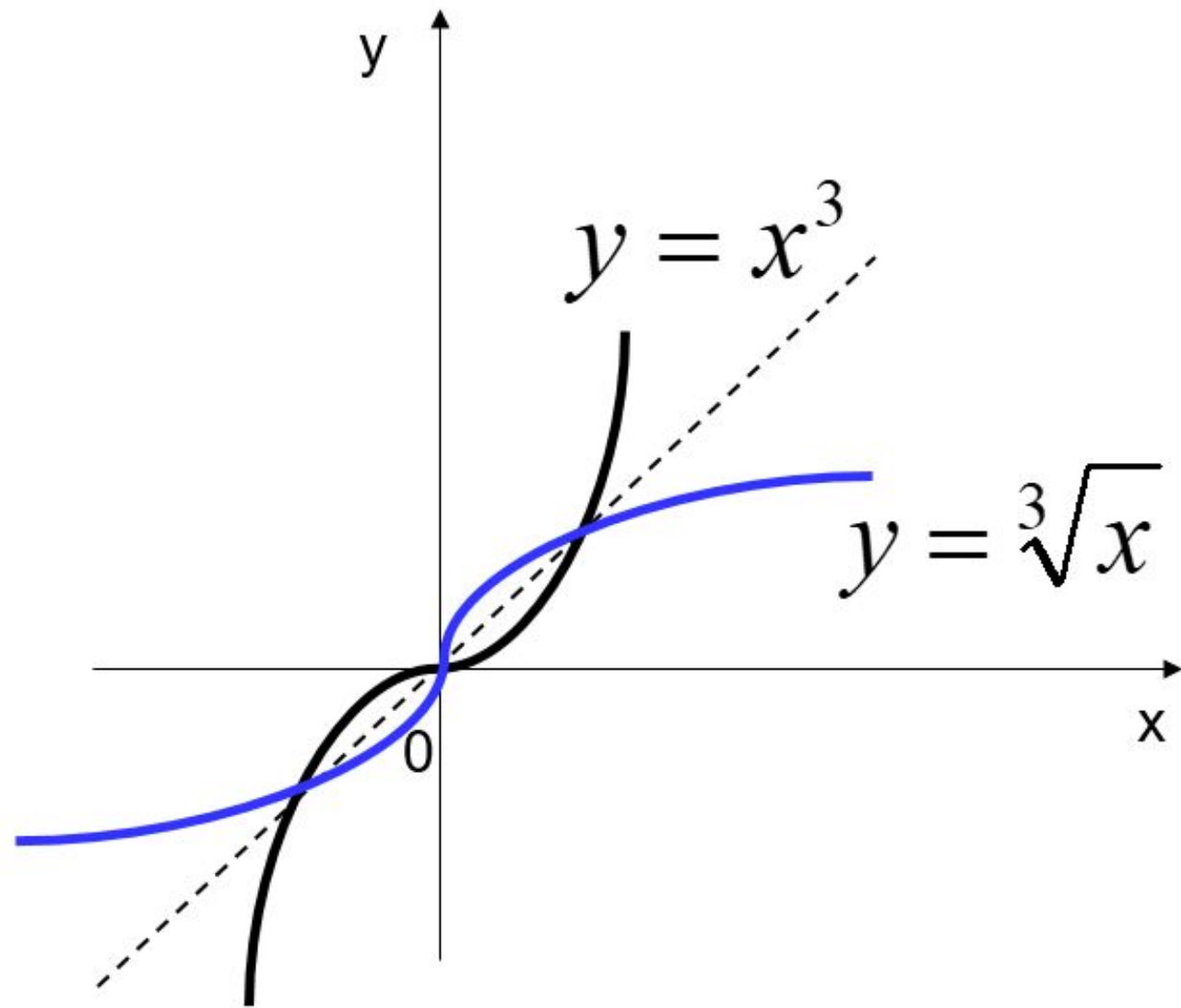
Построить график функции, обратной данной.

Дано:  $y = x^3$

Построить функцию,  
обратную к данной.

Решение:  $x^3 = y$

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$



Домашнее задание-№123, 129 и задачи ниже на слайде

Найди функцию, обратную данной  $f(x) = -1 - 19x$ :

$y = 19 \cdot (-1 - x)$

$y = \frac{19}{(-1 - x)}$

$y = \frac{(x - 19)}{-1}$

$y = \frac{(-1 - x)}{19}$

$x = \frac{(-1 - y)}{19}$

Функция вида  $y = 4x + 7$ :

не обратима

обратима

Даны функции  $f(x) = 5^x$  и  $g(x) = \frac{x}{5}$ .

Вычислите значение сложной функции  $g(f(x))$ , если аргумент  $x$  равен 2.