

ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ

Лекция

**по учебной дисциплине «Цифровая схемотехника и
обработка сигналов»**

(Д-0205-1)

**Тема № 8: «Описание линейных дискретных
систем в Z-области»**

**Занятие № 26: «ВВЕДЕНИЕ В z-
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ»**

Руководитель занятия – доцент кафедры, к.т.н., доцент,
полковник Филимонов Василий Александрович

г. Санкт-Петербург

2018





Учебные цели:

1. Дать базовые понятия о Z -преобразовании.
2. Изучить Z -изображения функций типовых дискретных сигналов.



Учебные вопросы:

1. Определение и основные свойства Z -преобразования.
2. Z -преобразования типовых дискретных (цифровых) сигналов.
3. Прямое и обратное Z -преобразование.



Литература для самостоятельной работы обучаемых:

1. Солонина А. И., Улахович Д. А. и др. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / Изд. 2-е испр. и перераб. – СПб: Петербург, 2005, стр. 30 – 51

Определение и основные свойства Z- преобразования

Первый учебный вопрос

Определение Z-преобразования

$p = \sigma + j\omega$
 оператор
 Лапласа

$$X(p) = \bar{x}(p) = \int_{t=0}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt; \quad \int_{t=0}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \Big|_{t=nT} = 0$$

T – период частоты дискретизации

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(t) \Big|_{t=nT} = x(nT) \quad e^{pTn} \rightarrow z = e^{pT} \rightarrow e^{pTn} = z^n$$

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}; \quad x(nT) \Big|_{n=0} = 0$$

Z-

изображение

оригина

л

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT) z^{-n}| < \infty.$$

Формы представления комплексной переменной z :

$$z = e^{pT} = e^{(\sigma + j\omega) T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = r e^{j\varphi} = r \xi \cos \varphi + r \sin \varphi = \quad + j$$

показательная алгебраическая

$$r = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2};$$

радиус

$$\varphi = \arg(z) = \arctg \frac{\eta}{\xi}$$

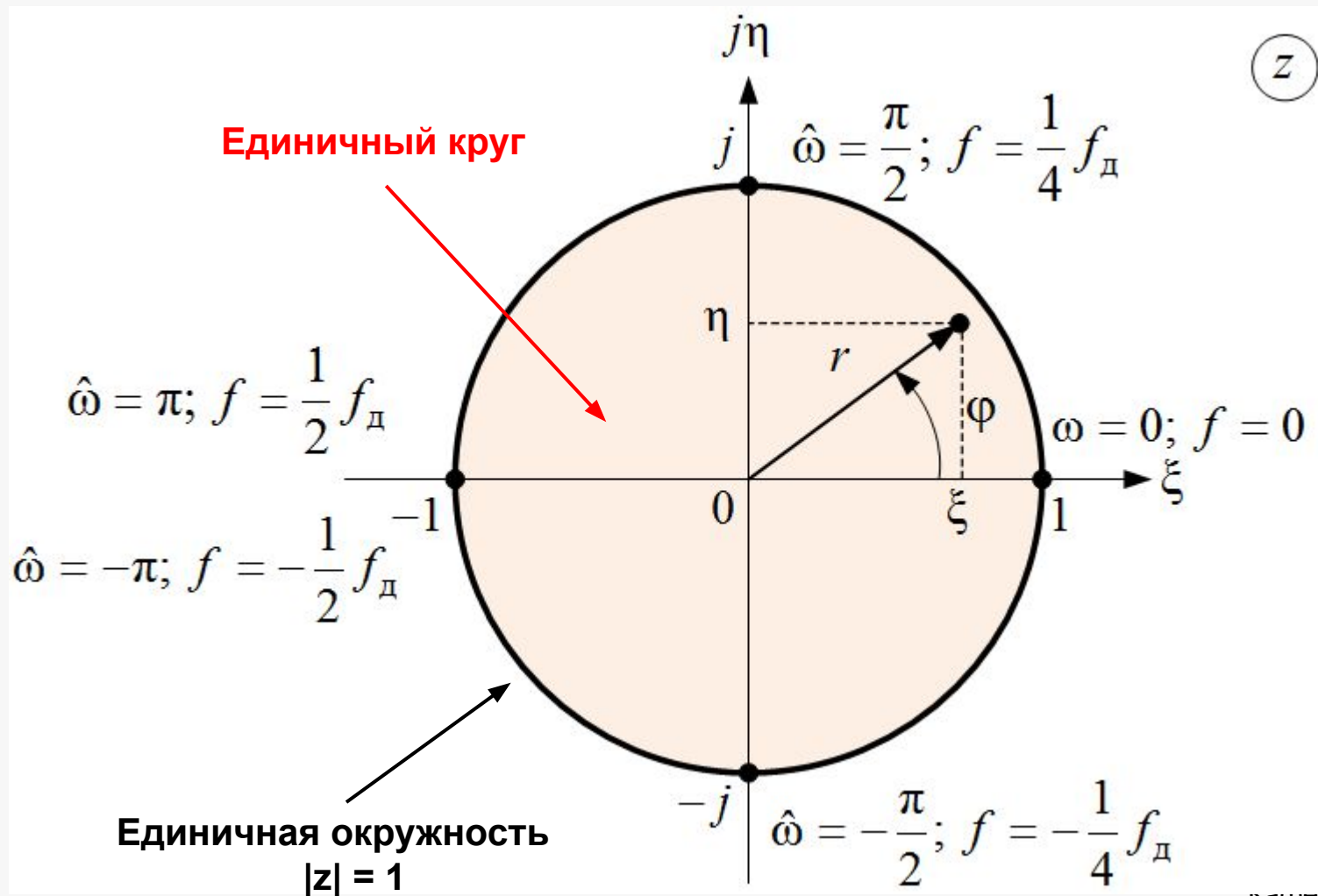
аргумент

Первый учебный вопрос

Задание точки на z-плоскости:

в декартовой системе координатами (ξ, η) ;

в полярной системе координатами (r, φ) .





Первый учебный вопрос

Основные свойства Z-преобразования

1. *Линейность.*

$$x(n) = a_1 x_1(n) + \dots + a_k x_k(n) + \dots + a_K x_K(n) = \sum_{k=1}^K a_k x_k(n)$$

$$Z\{x(n)\} = X(z) = a_1 X_1(z) + \dots + a_k X_k(z) + \dots + a_K X_K(z) = \sum_{k=1}^K a_k X_k(z)$$

2. *Z-изображение задержанной последовательности (теорема о задержке).*

$$x(n) \Rightarrow x(n - m),$$

$$Z\{x(n - m)\} = X(z) z^{-m} = z^{-m} X(z).$$

3. *Z-преобразование свёртки последовательностей (теорема о свертке).*

$$x_1(n) \quad x_2(n)$$
$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) x_2(n - m).$$

Z-изображение свертки равно произведению Z-изображений свертываемых последовательностей

$$Z\{x(n)\} = X(z) = X_1(z) X_2(z).$$



Второй учебный вопрос

Z-преобразования ТИПОВЫХ ДИСКРЕТНЫХ (цифровых) сигналов

Второй учебный вопрос

1. Z-изображение задержанного цифрового единичного импульса

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad Z\{u_0(n)\} = U_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0(n) z^{-n} = u_0(0) z^{-0} = 1$$

2. Z-изображение задержанного цифрового единичного импульса

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

на основании теоремы о задержке имеем

$$Z\{u_0(n-m)\} = U_0(z) z^{-m} = z^{-m}$$

3. Z-изображение цифрового единичного скачка

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad Z\{u_1(n)\} = U_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_1(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n \Big|_{|z^{-1}| < 1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

4. Z-изображение задержанного цифрового единичного скачка

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{на основании} \\ \text{теоремы о задержке} \end{array} \quad Z\{u_1(n-m)\} = U_1(z) z^{-m} = \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$$

Второй учебный вопрос

5. Z-изображение убывающей дискретной экспоненты

$$x(n) = \begin{cases} (\pm a)^n, & n \geq 0, |a| < 1; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm a)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm az^{-1})^n$$

Сумма членов (БУГП) с областью

сходимости

$$|az^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

и радиусом сходимости $R = |a|$

$$Z\{x(n)\} = X(z) = \frac{1}{1 \mp az^{-1}}$$

7. Z-изображение последовательности

$$x(n) = r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*}; \quad \varphi_* = \omega_* T = \hat{\omega}_*$$

Радиус полюса
полюса 1

Частота (угол)

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}} = X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$a_1 = -2r_* \cos \varphi_*; \quad \varphi_* = \arccos \frac{-a_1}{2r_*}; \quad a_2 = r_*^2; \quad r_* = \sqrt{a_2}$$

6. Z-изображение взвешенной убывающей дискретной экспоненты

$$bx(n-m) = \begin{cases} (\pm a)^{n-m}, & n-m \geq 0, |a| < 1; \\ 0, & n-m < 0. \end{cases}$$

$$X(z) = \frac{bz^{-m}}{1 \mp az^{-1}}$$

8. Z-изображение последовательности

$$x(n) = r_*^n \sin(\varphi_* n) \Leftrightarrow X(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad \varphi = \hat{\omega};$$

$$a_1 = -2r_* \cos \varphi_*, \quad a_2 = r_*^2, \quad b_1 = r_* \sin \varphi_*.$$

9. Z-изображение последовательности

$$x(n) = r_*^n \cos(\varphi_* n)$$

$$X(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad \varphi = \hat{\omega};$$

$$a_1 = -2r_* \cos \varphi_*, \quad a_2 = r_*^2, \quad b_1 = -r_* \sin \varphi_*.$$

Второй учебный вопрос

Доказательство 7

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin \varphi_*} z^{-n} = \frac{1}{\sin \varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \sin[(n+1)\varphi_*] z^{-n}$$

$$X(z) = \frac{1}{\sin \varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n \frac{e^{j(n+1)\varphi_*} - e^{-j(n+1)\varphi_*}}{2j} z^{-n} = \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\sum_{n=0}^{\infty} r_*^n e^{j(n+1)\varphi_*} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} r_*^n e^{-j(n+1)\varphi_*} z^{-n} \right] =$$

$$= \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[e^{j\varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} (r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})^n - e^{-j\varphi_*} \sum_{n=0}^{\infty} (r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})^n \right].$$

$$X(z) = \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*}}{1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1}} - \frac{e^{-j\varphi_*}}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}} \right]$$

$$q = r_* e^{j\varphi_*} z^{-1} \quad q = r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1}$$

$$R = r_*; \quad |r_* e^{\pm j\varphi_*} z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{r_*}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > r_*$$

$$X(z) = \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*} - r_* z^{-1} - e^{-j\varphi_*} + r_* z^{-1}}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] = \frac{1}{2j \sin \varphi_*} \left[\frac{e^{j\varphi_*} - e^{-j\varphi_*}}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right]$$

$$\sin \varphi_* = \frac{e^{j(n+1)\varphi_*} - e^{-j(n+1)\varphi_*}}{2j}$$



Второй учебный вопрос

Доказательство 7

$$X(z) = \frac{1}{\sin \varphi_*} \left[\frac{\sin \varphi_*}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})} \right] = \frac{1}{(1 - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1})(1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - r_* e^{-j\varphi_*} z^{-1} - r_* e^{j\varphi_*} z^{-1} + r_*^2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - r_* (e^{-j\varphi_*} + e^{j\varphi_*}) z^{-1} + r_*^2 z^{-2}},$$

$$e^{-j\varphi_*} + e^{j\varphi_*} = 2 \cos \varphi_*$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2r_* \cos \varphi_* z^{-1} + r_*^2 z^{-2}} = X(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$z_{*1,2} = r_* e^{\pm j\varphi_*}$$





Третий учебный вопрос

14

Прямое и обратное Z-преобразование

Третий учебный вопрос

3.1 Прямое Z-преобразование

$$x(n) = b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin \varphi} + b_1 r_*^{n-1} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}$$

Согласно свойству
линейности:

$$X(z) = Z \left\{ b_0 r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin \varphi} \right\} + Z \left\{ b_1 r_*^{n-1} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \right\}$$

$$X(z) = b_0 Z \left\{ r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin \varphi} \right\} + b_1 Z \left\{ r_*^{n-1} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \right\}$$

$$X(z) = b_0 Z \left\{ r_*^n \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin \varphi} \right\} + b_1 Z \left\{ r_*^{n-1} \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \right\}$$

Согласно соотношению 7

и свойству задержки:

$$X(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$



Третий учебный вопрос

3.2. Обратное Z-преобразование

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(n)$$

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Согласно свойству
линейности:

$$X(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Согласно
соотношению 5:

$$X(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \Rightarrow x(n) = a^n$$

$$\begin{aligned} x(n) &= Z^{-1} \left\{ \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} \right\} + Z^{-1} \left\{ \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \right\} = \\ &= b_0 Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right\} + b_1 Z^{-1} \left\{ \frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Согласно свойству
задержки:

$$x(n) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1}$$



Заключение

Краткий обзор рассмотренных вопросов (привлекаются курсанты). Даются рекомендации по изучению материала.

Ещё раз подчёркивается практическое приложение изученного и краткая постановка задачи на очередную лекцию: получение передаточных функций и изучение их свойств. Выдаётся электронная версия раздаточного материала.



ЛЕКЦИЯ ЗАВЕРШЕНА!

