ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ

Лекция
по учебной дисциплине «Цифровая схемотехника и обработка сигналов»
(Д-0205-1)

Тема № 8: «Описание линейных дискретных систем в Z-области»

Занятие № 26: «ВВЕДЕНИЕ В Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ»

Руководитель занятия – доцент кафедры, к.т.н., доцент, полковник Филимонов Василий Александрович

г. Санкт-Петербург
2018

Учебные цели:

1. Дать базовые понятия о Z-преобразовании.
2. Изучить Z-изображения функций типовых дискретных сигналов.

Учебные вопросы:

1. Определение и основные свойства Z-преобразования.
2. Z-преобразования типовых дискретных (цифровых) сигналов.
3. Прямое и обратное Z-преобразование.

Литература для самостоятельной работы обучаемых:

1. Солонина А. И., Улахович Д. А. и др. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / Изд. 2-е испр. и перераб. – СПб: Петербург, 2005, стр. 30 – 51

Первый учебный вопрос

Определение и основные свойства Z-преобразования

Первый учебный вопрос

Определение Z-преобразования

$$p = \sigma + j\omega \qquad X(p) = \overline{x}(p) = \int_{t=0}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt; \qquad \int_{t=0}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \Big|_{t=nT} = 0$$

оператор Лапласа

T – период частоты дискретизации

$$\sum_{n=0}^{\infty} \qquad x(t)\big|_{t=nT} = x(nT) \qquad e^{pTn} \to z = e^{pT} \to e^{pTn} = z^n$$

$$\underbrace{Z\{x(nT)\} = X(z)}_{\text{Z-изображение}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{x(nT)}_{\text{оригинал}} z^{-n}; \quad x(nT)\big|_{n=0} = 0$$

Область сходимости z-изображения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| x(nT) z^{-n} \right| < \infty.$$

Формы представления комплексной переменной *z*:

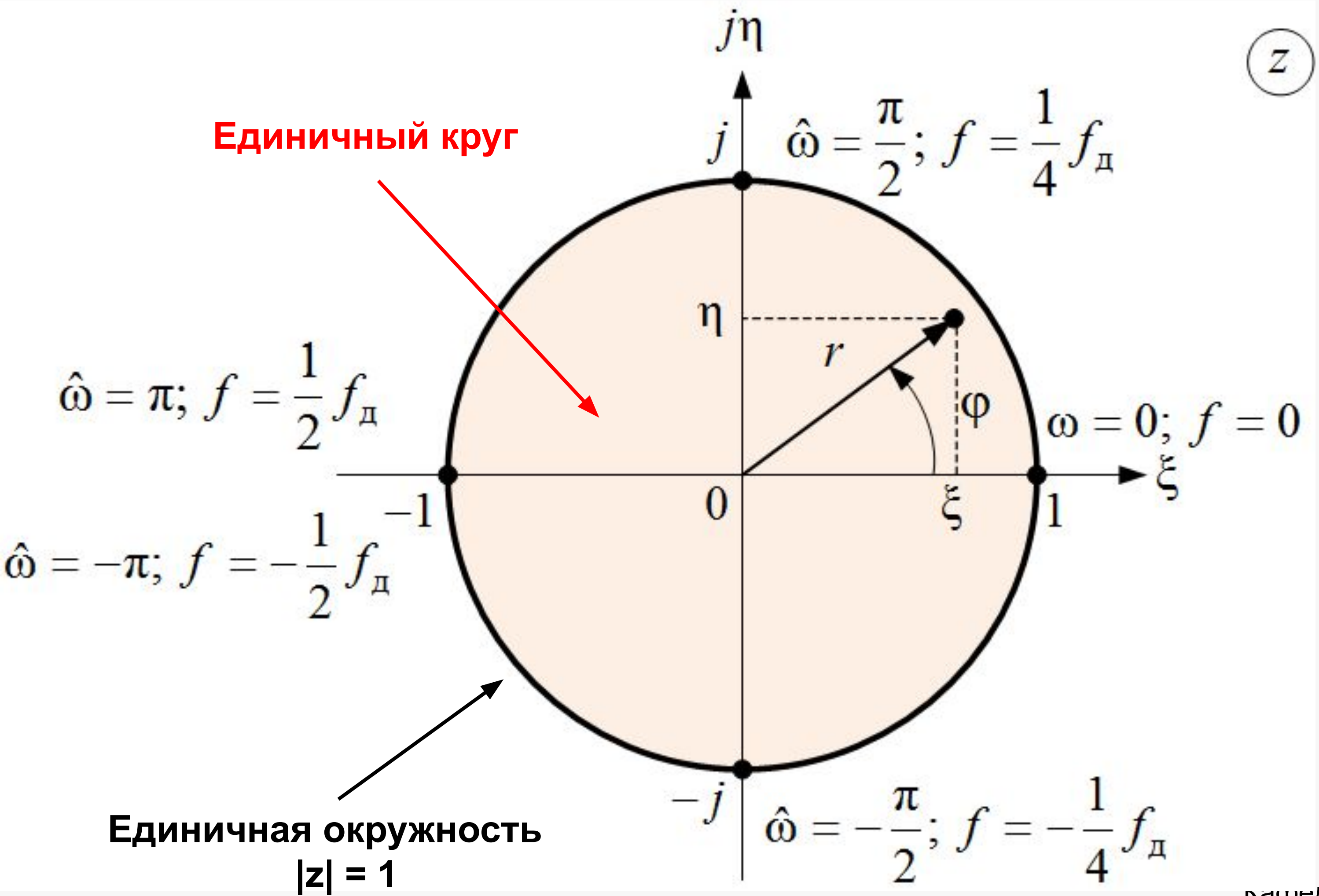
$$z = e^{pT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = \underbrace{re^{j\varphi}}_{\textit{показательная}} = r\cos\varphi + jr\sin\varphi = \underbrace{\xi + j\eta}_{\textit{алгебраическая}}$$

$$\underbrace{r}_{\textit{радиус}} = |z| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \qquad \underbrace{\varphi = \arg(z) = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}}_{\textit{аргумент}}$$

Первый учебный вопрос

Задание точки на *z*-плоскости:

в декартовой системе координатами (ξ, η); в полярной системе координатами (r, φ).



Первый учебный вопрос

Основные свойства Z-преобразования

1*. Линейность*.

$$x(n)=a_1x_1(n)+\dots\ +a_kx_k(n)+\dots\ +a_Kx_K(n)=\sum_{k=1}^{K}a_kx_k(n)$$

$$Z\{x(n)\}=X(z)=a_1X_1(z)+\dots\ +a_kX_k(z)+\dots\ +a_KX_K(z)=\sum_{k=1}^{K}a_kX_k(z)$$

2. *Z-изображение задержанной последовательности* (*теорема о задержке*).

$$x(n)\Rightarrow x(n-m),$$

$$Z\{x(n-m)\}=X(z)z^{-m}=z^{-m}X(z).$$

3. *Z-преобразование свёртки последовательностей (теорема о свертке).*

$$x_1(n)\ (\ x)_2\ n$$

$$x(nT)=\sum_{m=0}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m).$$

Z-изображение свертки равно произведению *Z*-изображений свертываемых последовательностей

$$Z\{x(n)\}=X(z)=X_1(z)X_2(z).$$

Второй учебный вопрос

Z-преобразования типовых дискретных (цифровых) сигналов

Второй учебный вопрос

1. *Z*-изображение задержанного цифрового единичного импульса

$$u_0(n)=\begin{cases}1, & n=0;\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}\quad Z\{u_0(n)\}=U_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_0(n)z^{-n}=u_0(0)z^{-0}=1$$

2. *Z*-изображение задержанного цифрового единичного импульса

:

$$u_0(n-m)=\begin{cases}1, & n=m;\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

на основании теоремы о задержке имеем

:

$$Z\{u_0(n-m)\}=U_0(z)z^{-m}=z^{-m}$$

3. *Z*-изображение цифрового единичного скачка

$$u_1(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0;\\ 0, & n<0.\end{cases}\qquad Z\{u_1(n)\}=U_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_1(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}1\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^n\Bigg|_{|z^{-1}|<1}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

4. *Z*-изображение задержанного цифрового единичного скачка

$$u_1(n-m)=\begin{cases}1, & n\geq m;\\ 0, & n<m\end{cases}$$

на основании теоремы о задержке

$$Z\{u_1(n-m)\}=U_1(z)z^{-m}=\frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$$

Второй учебный вопрос

5. *Z*-изображение убывающей дискретной экспоненты

$$x(n)=\begin{cases}(\pm a)^n,\ n\ge 0,\ |a|<1;\\ 0,\ \ n<0.\end{cases}$$

$$Z\{x(n)\}=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm a)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm az^{-1})^n$$

Сумма членов (БУГП) с областью сходимости

$$\left|az^{-1}\right|<1\ \Rightarrow\ \frac{|a|}{|z|}<1\ \Rightarrow\ |z|>|a|$$

и радиусом сходимости *R* = |*a*|

$$Z\{x(n)\}=X(z)=\frac{1}{1\mp az^{-1}}$$

6. *Z*-изображение взвешенной убывающей дискретной экспоненты

$$bx(n-m)=\begin{cases}(\pm a)^{n-m},\ n-m\ge 0,\ |a|<1;\\ 0,\ \ n-m<0.\end{cases}$$

$$X(z)=\frac{bz^{-m}}{1\mp az^{-1}}$$

7. *Z*-изображение последовательности

$$x(n)=r_*^n\frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*};\quad \varphi_*=\omega_*T=\hat{\omega}_*$$

Радиус полюса

Частота (угол)

$$X(z)=\frac{1}{1-2r_*\cos\varphi_* z^{-1}+r_*^2z^{-2}}=X(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$a_1=-2r_*\cos\varphi_*;\quad \varphi_*=\arccos\frac{-a_1}{2r_*};\quad a_2=r_*^2;\quad r_*=\sqrt{a_2}$$

8. *Z*-изображение последовательности

$$x(n)=r_*^n\sin(\varphi_*n)\ \Leftrightarrow\ X(z)=\frac{b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}},\ \ \varphi=\hat{\omega};$$

$$a_1=-2r_*\cos\varphi_*,\ a_2=r_*^2,\ b_1=r_*\sin\varphi_*.$$

9. *Z*-изображение последовательности

$$x(n)=r_*^n\cos(\varphi_*n)$$

$$X(z)=\frac{1+b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}},\ \ \varphi=\hat{\omega};$$

$$a_1=-2r_*\cos\varphi_*,\ a_2=r_*^2,\ b_1=-r_*\sin\varphi_*.$$

Второй учебный вопрос

Доказательство 7

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} r_*^{\,n}\frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*}z^{-n}=\frac{1}{\sin\varphi_*}\sum_{n=0}^{\infty} r_*^{\,n}\sin[(n+1)\varphi_*]z^{-n}$$

$$X(z)=\frac{1}{\sin\varphi_*}\sum_{n=0}^{\infty} r_*^{\,n}\frac{e^{j(n+1)\varphi_*}-e^{-j(n+1)\varphi_*}}{2j}z^{-n}=\frac{1}{2j\sin\varphi_*}\left[\sum_{n=0}^{\infty} r_*^{\,n}e^{j(n+1)\varphi_*}z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty} r_*^{\,n}e^{-j(n+1)\varphi_*}z^{-n}\right]=$$

$$=\frac{1}{2j\sin\varphi_*}\left[e^{j\varphi_*}\sum_{n=0}^{\infty}(r_*e^{j\varphi_*}z^{-1})^n-e^{-j\varphi_*}\sum_{n=0}^{\infty}(r_*e^{-j\varphi_*}z^{-1})^n\right].$$

$$X(z)=\frac{1}{2j\sin\varphi_*}\left[\frac{e^{j\varphi_*}}{1-r_*e^{j\varphi_*}z^{-1}}-\frac{e^{-j\varphi_*}}{1-r_*e^{-j\varphi_*}z^{-1}}\right]$$

$$R=r_*;\qquad \left|r_*e^{\pm j\varphi_*}z^{-1}\right|<1\ \Rightarrow\ \frac{r_*}{|z|}<1\ \Rightarrow\ |z|>r_*$$

$$q=r_*e^{j\varphi_*}z^{-1}\qquad q=r_*e^{-j\varphi_*}z^{-1}$$

$$X(z)=\frac{1}{2j\sin\varphi_*}\left[\frac{e^{j\varphi_*}-r_*z^{-1}-e^{-j\varphi_*}+r_*z^{-1}}{(1-r_*e^{j\varphi_*}z^{-1})(1-r_*e^{-j\varphi_*}z^{-1})}\right]=\frac{1}{2j\sin\varphi_*}\left[\frac{e^{j\varphi_*}-e^{-j\varphi_*}}{(1-r_*e^{j\varphi_*}z^{-1})(1-r_*e^{-j\varphi_*}z^{-1})}\right]$$

$$\sin\varphi_*=\frac{e^{j(n+1)\varphi_*}-e^{-j(n+1)\varphi_*}}{2j}$$

Второй учебный вопрос

Доказательство 7

$$X(z)=\frac{1}{\sin\varphi_*}\left[\frac{\sin\varphi_*}{(1-r_*e^{j\varphi_*}z^{-1})(1-r_*e^{-j\varphi_*}z^{-1})}\right]=\frac{1}{(1-r_*e^{j\varphi_*}z^{-1})(1-r_*e^{-j\varphi_*}z^{-1})}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-r_*e^{-j\varphi_*}z^{-1}-r_*e^{j\varphi_*}z^{-1}+r_*^{\,2}z^{-2}}=\frac{1}{1-r_*\left(e^{-j\varphi_*}+e^{j\varphi_*}\right)z^{-1}+r_*^{\,2}z^{-2}},$$

$$e^{-j\varphi_*}+e^{j\varphi_*}=2\cos\varphi_*$$

$$X(z)=\frac{1}{1-2r_*\cos\varphi_* z^{-1}+r_*^{\,2}z^{-2}}=X(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$z_{*1,2}=r_*e^{\pm j\varphi_*}$$

■

Третий учебный вопрос

Прямое и обратное Z-преобразование

Третий учебный вопрос

3.1 Прямое Z-преобразование

$$x(n) = b_0 r_*^{\,n} \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*} + b_1 r_*^{\,n-1} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin\varphi_*}$$

Согласно свойству линейности:

$$X(z) = Z\left\{ b_0 r_*^{\,n} \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*} \right\} + Z\left\{ b_1 r_*^{\,n-1} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin\varphi_*} \right\}$$

$$X(z) = b_0 Z\left\{ r_*^{\,n} \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*} \right\} + b_1 Z\left\{ r_*^{\,n-1} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin\varphi_*} \right\}$$

$$X(z) = b_0 Z\left\{ r_*^{\,n} \frac{\sin[(n+1)\varphi_*]}{\sin\varphi_*} \right\} + b_1 Z\left\{ r_*^{\,n-1} \frac{\sin(n\varphi_*)}{\sin\varphi_*} \right\}$$

Согласно соотношению 7 и свойству задержки:

$$X(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Третий учебный вопрос

3.2. Обратное Z-преобразование

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(n)$$

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Согласно свойству линейности:

$$X(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Согласно соотношению 5:

$$X(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \Rightarrow x(n) = a^n$$

$$x(n) = Z^{-1}\left\{\frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{b_1 \ z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}\right\} =$$

$$= b_0 Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}\right\} + b_1 Z^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}\right\}.$$

Согласно свойству задержки:

$$x(n) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1}$$

Заключение

Краткий обзор рассмотренных вопросов (привлекаются курсанты). Даются рекомендации по изучению материала.
Ещё раз подчёркивается практическое приложение изученного и краткая постановка задачи на очередную лекцию: получение передаточных функций и изучение их свойств. Выдаётся электронная версия раздаточного материала.

ЛЕКЦИЯ ЗАВЕРШЕНА!