

# ГЕОМЕТРИЯ



Школа::Кода  
Олимпиадное  
программирование

2020-2021 Таганрог

# Точки и вектора

- Любую геометрическую задачу можно решить оперируя только точками и векторами.
- Отрезок можно представить как 2 точки. Ломаную – как последовательный набор точек. Любой многоугольник – это замкнутая ломаная.
- Прямую или луч можно представить как точку и направляющий вектор.
- Окружность или сферу – как точку, задающую центр, и радиус-вектор.
- Для решения задач определяются структуры, описывающие точку и вектора, после чего реализуется алгоритм, который уже не содержит в себе координатного метода.

# Реализация вектора 1

- Создадим структуру Vector. Сделаем её шаблонной так, как некоторые задачи решаются в целых числах, а некоторые в вещественных. Шаблонность добавляет универсальности но обычно не нужна в условиях соревнования.

```
template<class Type>
struct Vector
{
    Type x;
    Type y;
    Vector(Type x, Type y)
        :x(x), y(y)
    {}
    Vector() {}
}
```

# Реализация вектора 2

- Одной из характеристик вектора является его длина, которая равна  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Заметим, что даже если сам вектор имеет целочисленные координаты, его длина, скорее всего, имеет вещественное значение. Однако в некоторых задачах достаточно узнавать квадрат длины.

```
double len() const
{
    return sqrt(double(x * x + y * y));
}

Type len_sqr() const
{
    return (x * x + y * y);
}
```

- Слово `const` после имени метода позволяет его вызывать у констант типа данной структуры.

# Реализация вектора 3

- Сумма двух векторов – это вектор начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом второго, отложенного от конца первого.
- Разность двух векторов – это вектор, который начинается в конце второго и заканчивается в конце первого, если первый и второй отложить от одной точки.

```
friend Vector operator+(const Vector& a, const Vector& b)
{
    return Vector(a.x + b.x, a.y + b.y);
}
```

```
friend Vector operator- (const Vector& a, const Vector& b)
{
    return Vector(a.x - b.x, a.y - b.y);
}
```

```
friend Vector operator- (const Vector& a)
{
    return Vector(-a.x, -a.y);
}
```

- Унарный минус меняет направление вектора на обратное.

# Реализация вектора 4

- Скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$  – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Зная координаты векторов, скалярное произведение можно вычислить как  $a.x * b.x + a.y * b.y$  в двумерном пространстве или  $a.x * b.x + a.y * b.y + a.z * b.z$  в трёхмерном пространстве.
- Векторное произведение векторов  $a$  и  $b$  в трёхмерном пространстве – это вектор с направлением перпендикулярно плоскости, задаваемой данными векторами, длина которого равна произведению длин этих векторов на синус угла между ними. В двумерном пространстве векторное произведение – это число, равное  $a.x * b.y - a.y * b.x$ . По знаку этого числа можно определить, как по отношению к вектору  $a$  повернут вектор  $b$  (векторное произведение  $> 0$  – против часовой стрелки,  $< 0$  – по часовой стрелке,  $0$  – коллинеарные).

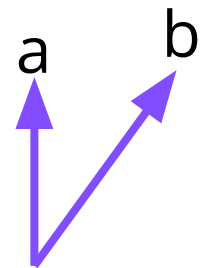
# Реализация вектора 4

- Произведения вектора  $a$  на число  $b$  – это вектор  $c$ , коллинеарный вектору  $a$ , его длина равна длине  $a$ , умноженной на  $b$ , а направление совпадает с  $a$ , если  $k > 0$ , иначе является противоположным. Для того чтобы получить произведение вектора на число нужно каждую координату вектора умножить на это число.

```
friend Type operator* (const Vector& a, const Vector& b)
{
    return a.x * b.x + a.y * b.y;
}
```

```
friend Type operator^ (const Vector& a, const Vector& b)
{
    return a.x * b.y - a.y * b.x;
}
```

```
friend Vector operator* (const Vector& a, Type b)
{
    return Vector(a.x * b, a.y * b);
}
```



$$a \cdot b < 0$$

$$b \cdot a > 0$$

# Реализация вектора 5

- Для удобства будет не лишним переопределить и операторы потокового ввода-вывода.
- Деление вектора  $a$  на число  $b$  – это операция, эквивалентная произведению вектора  $a$  на число  $1/b$ .

```
friend istream& operator >> (istream& in, Vector& p)
{
    return in >> p.x >> p.y;
}

friend ostream& operator << (ostream& out, const Vector& p)
{
    return out << p.x << ' ' << p.y;
}

friend Vector operator/ (const Vector& a, const Type b)
{
    return Vector(a.x / b, a.y / b);
}
```



# Реализация вектора 6

- В качестве вспомогательных шагов часто может понадобиться получить вектор в вещественных числах (если изначально он в целых), нормализовать вектор (получить вектор длиной 1 и с тем же направлением) и изменить длину на заданную.

```
Vector<double> ToFloat() const
{
    return Vector<double>(double(x), double(y));
}
```

```
Vector<double> ToNormal() const
{
    return ToFloat() / len();
}
```

```
Vector<double> Relen(double l) const
{
    return ToNormal() * l;
}
```

# Реализация вектора 7

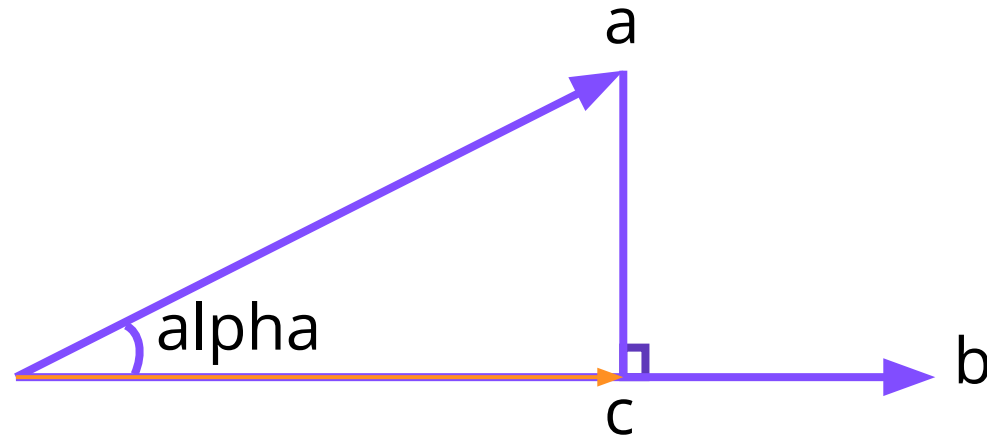
- Для того что бы повернуть вектор на определённый угол нужно умножить матрицу поворота на этот вектор.

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X * \cos(a) + Y * \sin(a) \\ -X * \sin(a) + Y * \cos(a) \end{pmatrix}$$

```
Vector Turn(double a)
{
    return Vector<double>
        (sin(a) * y + cos(a) * x,
         cos(a) * y - sin(a) * x);
}
```

- Стандартные функции C++ работают с радианами.

# Проекция вектора на вектор



- Вектор  $c$  – проекция вектора  $a$  на вектор  $b$ .
- Длина вектора  $c$  равна произведению длины вектора  $a$  на косинус угла  $\alpha$ . Она относится к длине  $b$  как некоторый коэффициент  $k = |a| \cdot \cos(\alpha) / |b|$ .
- Тогда  $c = b \cdot k$ .
- Если вспомнить, что  $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\alpha)$ , то можно определить  $k$  как  $a \cdot b / |b|^2$ .

# Реализация вектора 8

- Метод `ProjectionK` возвращает коэффициент, на который нужно умножить вектор, у которого вызван метод, чтобы получить проекцию на него вектора, который является аргументом.
- Метод `Projection` возвращает вектор-проекцию вектора `v1` на вектор, у которого вызван метод.

```
double ProjectionK(const Vector& v1) const
{
    return (ToFloat() * v1.ToFloat()) / len_sqr();
}

Vector<double> Projection(const Vector& v1) const
{
    return ToFloat() * ProjectionK(v1);
}
```

# Реализация точки 1

- Структура точки довольно похожа на структуру вектора. В некоторых случаях из точки может понадобиться получить вектор. Операторы ввода-вывода переопределяются аналогичным образом.

```
template<class Type>
struct Point
{
    Type x;
    Type y;
    Point(Type x, Type y)
        :x(x), y(y)
    {}
    Point() {}

    Vector<Type> ToVector() const
    {
        return Vector<Type>(x, y);
    }
}
```

```
friend istream& operator >> (istream& in, Point& p)
{
    return in >> p.x >> p.y;
}
```

```
friend ostream& operator << (ostream& out, const Point& p)
{
    return out << p.x << " " << p.y;
}
```

# Реализация точки 2

- При прибавлении к точке вектора получается новая точка.
- Соответственно, при вычитании из одной точки другой получается вектор.

```
friend Vector<Type> operator- (const Point& a, const Point& b)
{
    return Vector<Type>(a.x - b.x, a.y - b.y);
}

friend Point operator+ (const Point& a, const Vector<Type>& b)
{
    return Point(a.x + b.x, a.y + b.y);
}
```

- В рамках соревнований, когда времени мало, а готовом шаблоне воспользоваться нельзя, большинство предпочитает реализовывать только структуру вектора в той степени, в какой необходимо, т.к. она по сути полностью покрывает возможности структуры точки.

# Нахождение угла между двумя векторами

- Разделив векторное произведение векторов на произведение их длин получим синус угла между ними.
- Разделив скалярное произведение векторов на произведение их длин получим косинус угла между ними.

```
template<typename T>
double get_sin(Vector<T>& a, Vector<T>& b)
{
    return (a ^ b) / a.len() / b.len();
}

template<typename T>
double get_cos(Vector<T>& a, Vector<T>& b)
{
    return (a * b) / a.len() / b.len();
}
```

# Немного прекода от себя...

```
typedef long long int64;  
typedef unsigned long long uint64;  
typedef unsigned int uint;
```

```
#define mp make_pair  
#define sqr(a) ((a)*(a))  
#define forn(i, n) for(int i = 0; i < int(n); ++i)  
#define forr(i, n) for(int i = int(n) - 1; i >= 0; --i)  
#define forit(i,c) for(auto i=(c).begin(); i!=(c).end(); ++i)  
#define ALL(x) (x).begin(), (x).end()
```

```
#define MIN(a, b) ((a)<(b)?(a):(b))  
#define MAX(a, b) ((a)>(b)?(a):(b))
```

```
typedef vector<int> vint;  
typedef vector<bool> vbool;  
typedef vector<int64> vint64;  
typedef vector<uint64> uvint64;  
typedef pair<int, int> pii;  
typedef pair<int64, int64> pii64;
```

```
typedef Point<int64> Pint;  
typedef Point<double> Pdbl;  
typedef Vector<int64> Vint;  
typedef Vector<double> Vdbl;  
typedef pair<Pdbl, Vdbl> Line;  
const double Pi = 3.1415926535897932384626433832795;  
const double EPS = 1e-9;
```



# Полярный угол точки

- Полярный угол точки – это угол между вектором, с началом в точке пересечения координатных осей и концом в этой точке, и осью X.
- Самая точная функция для нахождения полярного угла – это `atan2(double Y, double X)`. Она возвращает значения в диапазоне  $[-\pi; \pi)$ .

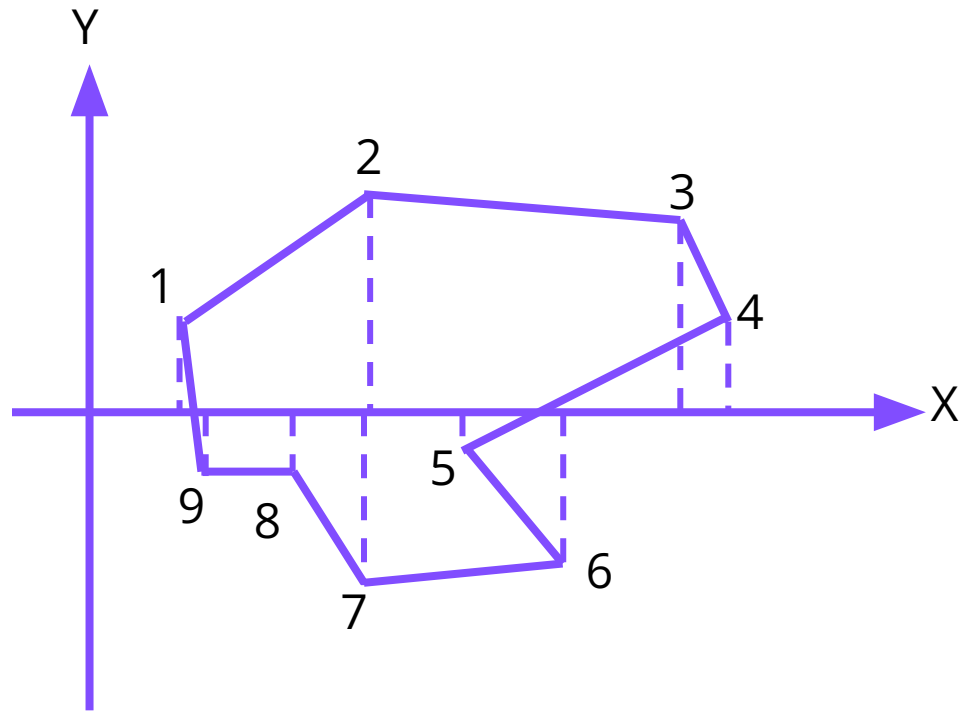
# Сравнение вещественных чисел на равенство / неравенство

- Так как вычисления в вещественных числах происходят с некоторой погрешностью, нельзя гарантировать, что результат вычислений будет равен ожидаемому числу со 100% точностью, а значит эти числа нельзя сравнивать через `'=='` или `'!='`.
- Корректная проверка вещественных чисел на равенство: `fabs(a - b) <= EPS` (проверка на неравенство: `fabs(a - b) > EPS`).

# Алгоритм нахождения ориентированной площади многоугольника

- Пусть даны вершина N-угольника в порядке обхода.
- Заведём переменную  $res$ , изначально равную нулю.
- Переберём все вершины. На каждом шаге будем рассматривать ребро между вершинами  $i$  и  $i+1$  прибавлять к результату удвоенную площадь трапеции, образуемой данным ребром, нормалью к оси  $X$  и самой осью:  $res += (p_{i+1}.x - p_i.x) * (p_{i+1}.y + p_i.y)$ .
- В конце возьмём результат по модулю и разделим пополам, т.к. изначально суммировали удвоенную площадь. Это делается для увеличения точности подсчётов. Если координаты точек даны целыми числами, то до последнего шага вычисления можно проводить не прибегая к вещественным числам.

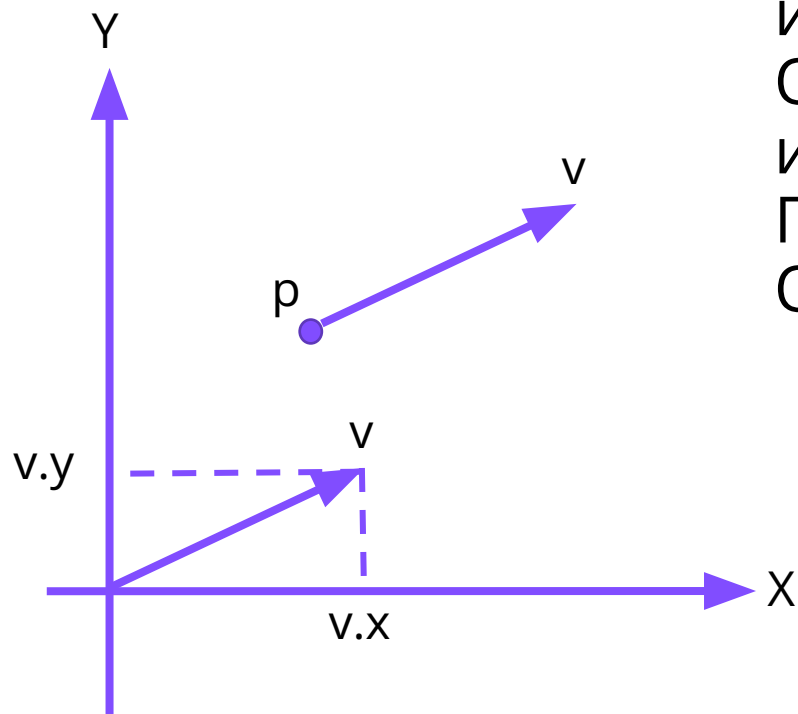
# Алгоритм нахождения ориентированной площади многоугольника



```
template<typename T>
double get_area(vector<Point<T>>& p)
{
    T res = 0;
    int n = p.size();
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        res += (p[(i + 1) % n].x - p[i].x)
            * (p[(i + 1) % n].y - p[i].y);
    return abs(res) / 2.0;
}
```

# Уравнение прямой

- Каноническое уравнение прямой имеет вид  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ .
- Пусть известны коэффициенты уравнения задающего прямую, и нужно найти точку и направляющий вектор для описания этой прямой.



Рассмотрим прямую, параллельную заданной и проходящую через начало координат.

Она имеет такой же направляющий вектор  $v$  и коэффициент  $c = 0$ .

Получаем, что  $a \cdot v.x + b \cdot v.y = 0$

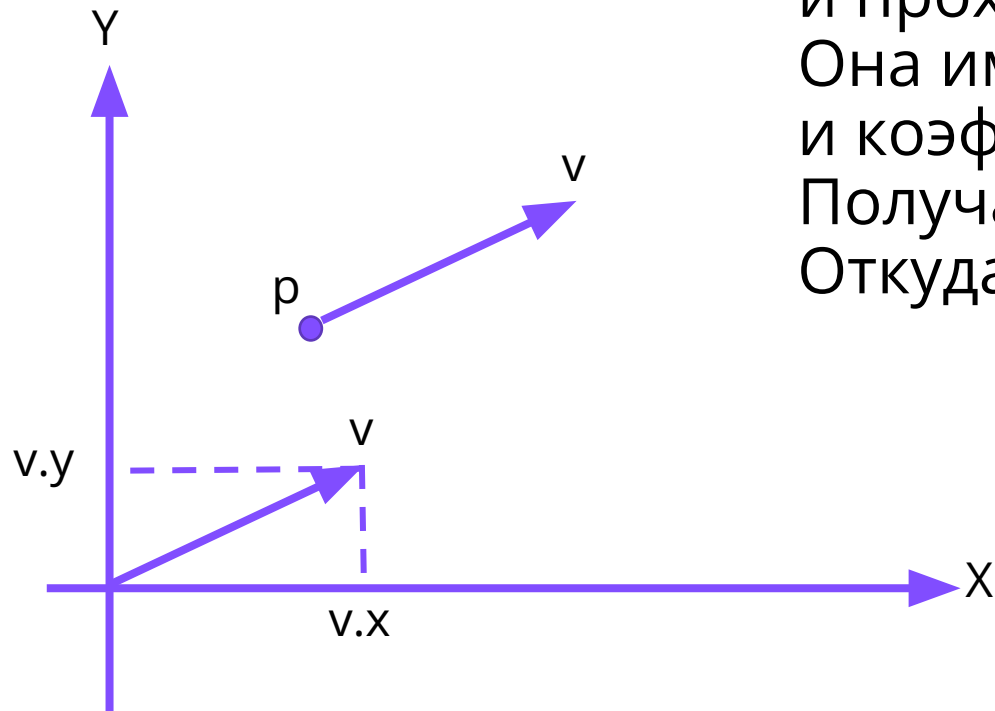
Откуда  $v.x = b$  и  $v.y = -a$

Если прямая не вертикальная ( $b \neq 0$ ), то в качестве  $r.x$  возьмём  $0$ , тогда уравнение прямой принимает вид  $b \cdot r.y + c = 0$ , откуда  $r.y = -c/b$ .

Иначе возьмём  $0$  в качестве  $r.y$ , тогда  $r.x = -c/a$

# Уравнение прямой 2

- Пусть известна точка  $p$  и направляющий вектор  $v$ , задающие прямую. Требуется найти коэффициенты канонического уравнения для этой прямой.



Рассмотрим прямую, параллельную заданной и проходящую через начало координат.

Она имеет такой же направляющий вектор  $v$  и коэффициент  $c = 0$ .

Получаем, что  $a \cdot v.x + b \cdot v.y = 0$

Откуда  $a = -v.y$  и  $b = v.x$

Подставим в уравнение  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$  коэффициенты  $a$ ,  $b$  и координаты  $p$ , получим:

$-v.y \cdot p.x + v.x \cdot p.y + c = 0$ , откуда

$c = p.x \cdot v.y - p.y \cdot v.x = p.ToVector() \wedge v$

```
Line ToLine(double a, double b, double c)
{
    Line l;
    l.second.y = -a;
    l.second.x = b;
    if (b != 0)
    {
        l.first.x = 0;
        l.first.y = -c / b;
    }
    else
    {
        l.first.x = -c / a;
        l.first.y = 0;
    }
    return l;
}
```

# Реализация функций

```
template<typename T>
void PrintABC(const Point<T>& p, const Vector<T>& v)
{
    double a, b, c;
    a = -v.y;
    b = v.x;
    c = (p.ToVector() ^ v);
    printf("%.12f %.12f %.12f\n", a, b, c);
}
```