

Практический семинар по Математической экономике (17.М18-э + 17.М19-э)

Занятие 4

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.

2018/2019 уч. год

Примеры экономических задач, формализуемых в виде задач для ОДУ

- модель рынка с прогнозируемыми ценами;
- модель конкуренции;
- модель, описывающая изменение объёма производства в некоторой замкнутой экономической системе;
- и др.

Задача Коши для ОДУ первого порядка

Задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется задача вида

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x_0 \in (a, b),$$

где x_0, y_0 - заданные вещественные числа.

При этом условие $y(x_0) = y_0$ называется начальным условием или условием Коши.

Пример

Найти приближённое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 3x^2y + x^2e^{x^3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

методом Эйлера на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0,1$.

Точное решение задачи $y = \frac{x^3 e^{x^3}}{3}$.

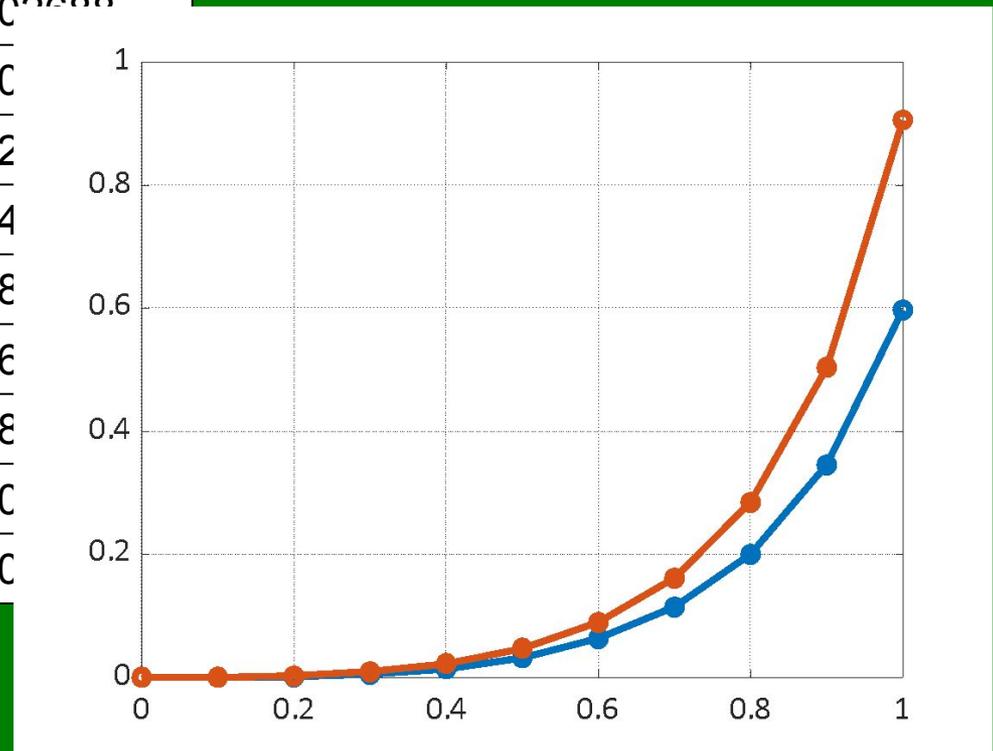
Расчетная формула метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, y_n), \quad y_n = y_0$$

$$x_{n+1} = x_0 + h(n + 1)$$

Пример (продолжение)

n	x_n	$y_{n+1}=y_n+f(x_n,y_n)$	Точное значение
0	0	0	0
1	0,1	0	0,000334
2	0,2	0,001001	0,000668
3	0,3	0,005045	0,001336
4	0,4	0,014428	0,002672
5	0,5	0,032178	0,005344
6	0,6	0,062920	0,010688
7	0,7	0,114395	0,021376
8	0,8	0,200260	0,042752
9	0,9	0,345502	0,085504
10	1	0,597372	0,171008



Пример

Найти приближённое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

методом Эйлера на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0,1$.

Точное решение задачи $y = 2e^x - x - 1$

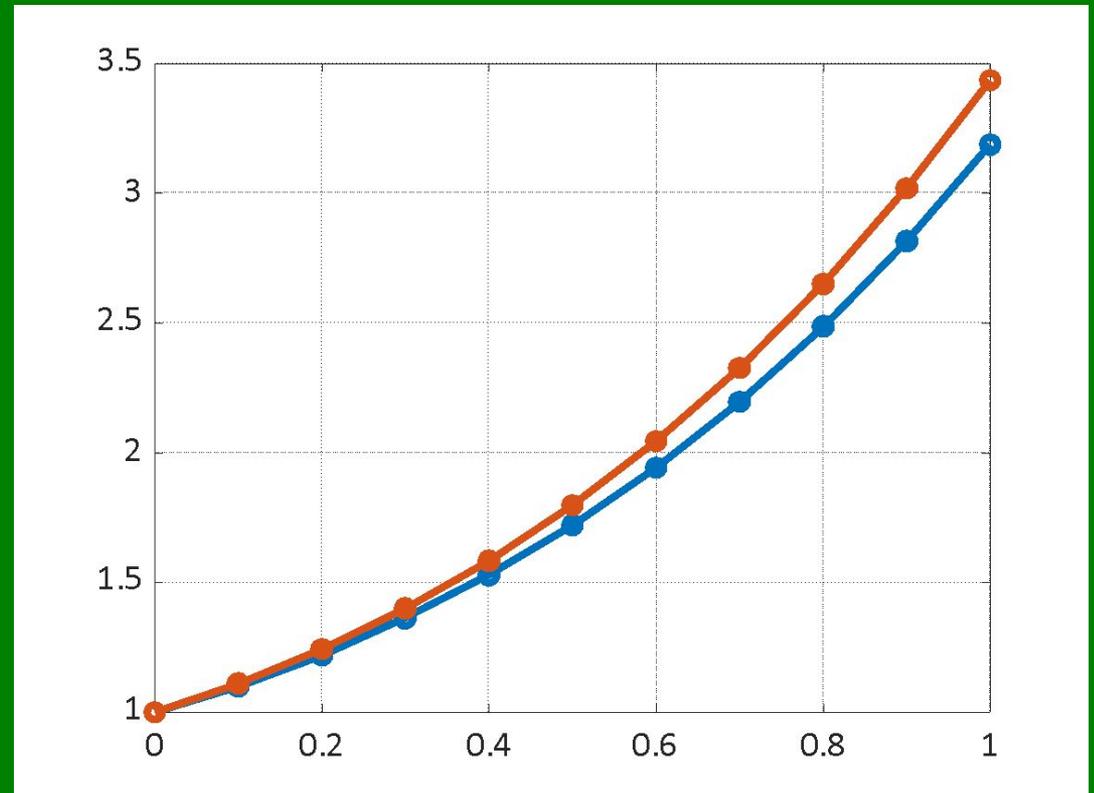
Расчетная формула метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, x_n), \quad y_0 = 1$$

$$x_{n+1} = x_0 + h(n + 1)$$

Решение

x	y	Y
0	1.0000	1.0000
0.1000	1.1000	1.1103
0.2000	1.2200	1.2428
0.3000	1.3620	1.3997
0.4000	1.5282	1.5836
0.5000	1.7210	1.7974
0.6000	1.9431	2.0442
0.7000	2.1974	2.3275
0.8000	2.4872	2.6511
0.9000	2.8159	3.0192
1.0000	3.1875	3.4366



Пример

Найти приближённое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

методом Эйлера на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0,1$.

Точное решение задачи $y = 2e^x - x - 1$

Расчетная формула метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, x_n), \quad y_0 = 0$$

$$x_{n+1} = x_0 + h(n + 1)$$

Замечание о погрешности

Относительные погрешности вычисленных значений функции при различных h

x	h	0,1	0,05	0,025	0,00625	0,0015625	0,0007813	0,0001953
	N	1	2	4	16	64	128	512
0,1		100,00%	48,32%	23,76%	5,87%	1,46%	0,73%	0,18%
0,2		46,61%	22,55%	11,10%	2,74%	0,68%	0,34%	0,09%
0,3		28,95%	14,03%	6,91%	1,71%	0,43%	0,21%	0,05%
0,4		20,22%	9,81%	4,83%	1,20%	0,30%	0,15%	0,04%
0,5		15,06%	7,32%	3,61%	0,89%	0,22%	0,11%	0,03%
0,6		11,67%	5,68%	2,80%	0,69%	0,17%	0,09%	0,02%
0,7		9,30%	4,53%	2,24%	0,55%	0,14%	0,07%	0,02%
0,8		7,57%	3,69%	1,82%	0,45%	0,11%	0,06%	0,01%
0,9		6,25%	3,05%	1,51%	0,37%	0,09%	0,05%	0,01%
1		5,22%	2,55%	1,26%	0,31%	0,08%	0,04%	0,01%

Задача Коши для ОДУ второго порядка

Задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$ называется задача вида

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}, \quad x_0 \in (a, b),$$

где x_0, y_0, y'_0 - заданные вещественные числа.

При этом условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ называются начальными условиями или условиями Коши.

Задача Коши для ОДУ второго порядка

ОДУ, порядок которых выше первого, введением вспомогательных переменных легко могут быть сведены к эквивалентной системе уравнений первого порядка.

Для ОДУ $y'' = f(x, y, y')$ процедура такова: полагая

$$v_1(x) = y, v_2(x) = y',$$

трансформируем исходную задачу Коши в задачу

$$\begin{cases} v_1' = v_2 \\ v_2' = f(x, v_1, v_2) \\ v_1(x_0) = y_0 \\ v_2(x_0) = y_0' \end{cases}, \quad x_0 \in (a, b),$$

численное решение которой аналогично решению Задачи Коши для ОДУ 1-го порядка.

Пример (задача Коши для уравнения Бесселя)

Найти приближённое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \frac{y'}{x} + y = 0, \\ y(0.1) = 0.9975, \\ y'(0.1) = -0.5, \end{cases}$$

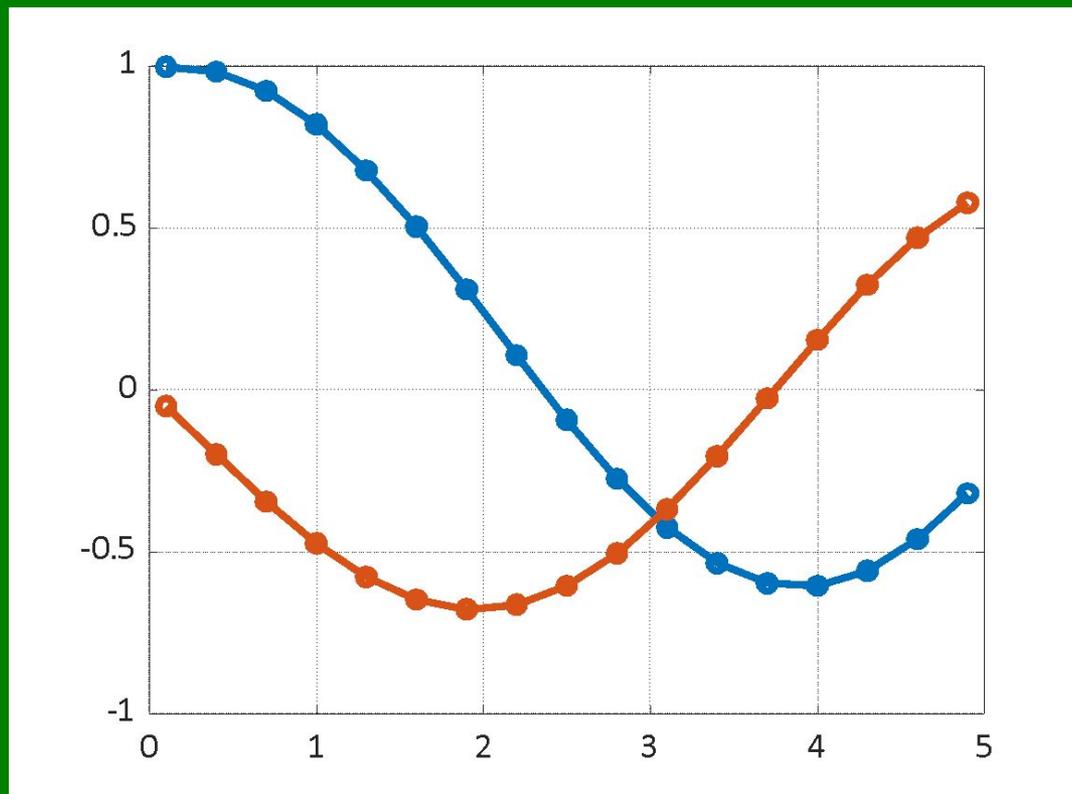
методом Эйлера на отрезке $[0.1, 5]$ с шагом $h = 0,3$.

Введем переменные $y_1 = y, y_2 = y'$ Уравнение
сведем к системе

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2/x \end{cases}$$

Решение

x	y	y'
0.1000	0.9975	-0.0500
0.4000	0.9825	-0.1993
0.7000	0.9227	-0.3446
1.0000	0.8194	-0.4737
1.3000	0.6772	-0.5774
1.6000	0.5040	-0.6473
1.9000	0.3098	-0.6772
2.2000	0.1067	-0.6632
2.5000	-0.0923	-0.6048
2.8000	-0.2737	-0.5045
3.1000	-0.4251	-0.3683
3.4000	-0.5356	-0.2052
3.7000	-0.5971	-0.0264
4.0000	-0.6050	0.1549
4.3000	-0.5586	0.3248
4.6000	-0.4611	0.4697
4.9000	-0.3202	0.5774



Программные средства

The image shows a MATLAB Command Window and a Documentation browser. The Command Window displays the command `>> help ode45` and the resulting help text for the `ode45` function. The Documentation browser shows the navigation menu and the content for the `ode45` function, including the differential equation $y' = 2t$ and the MATLAB code to solve it.

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

```
>> help ode45
ode45 Solve non-stiff differential equations, medium order method.
[TOUT,YOUT] = ode45(ODEFUN,TSPAN,Y0) with TSPAN = [T0 TFINAL] integrates
the system of differential equations y' = f(t,y) from time T0 to TFINAL
with initial conditions Y0. ODEFUN is a function handle. For a scalar T
and a vector Y, ODEFUN(T,Y) must return a column vector corresponding
to f(t,y). Each row in the solution array YOUT corresponds to a time
returned in the column vector TSPAN.
[T0 T1 ... TFINAL].
```

Documentation Search Help

CONTENTS Close

- < Documentation Home
- < MATLAB i
- < Mathematics
- < Numerical Integration and Differential Equations
- < Ordinary Differential Equations
- < MATLAB
- < Functions
- ode45**

ON THIS PAGE

- Syntax

Solve the ODE

$$y' = 2t.$$

Use a time interval of $[0,5]$ and the initial condition $y_0 = 0$.

```
tspan = [0 5];
y0 = 0;
[t,y] = ode45(@(t,y) 2*t, tspan, y0);
```

Plot the solution.

```
plot(t,y,'-o')
```