Динамика точки в неинерциальной системе отсчета.

Однородный вал вращается с постоянной угловой скоростью относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. К валу под прямым углом приварена трубка, внутри которой находится шарик. Шарик удерживается пружиной жесткости c, длина которой в недеформированном состоянии равна l. Определить закон движения шарика относительно трубки, если в начальный момент времени пружина была не деформирована и шарик находился в состоянии покоя относительно трубки.

Решение:

Свяжем подвижную систему отсчета с трубкой.

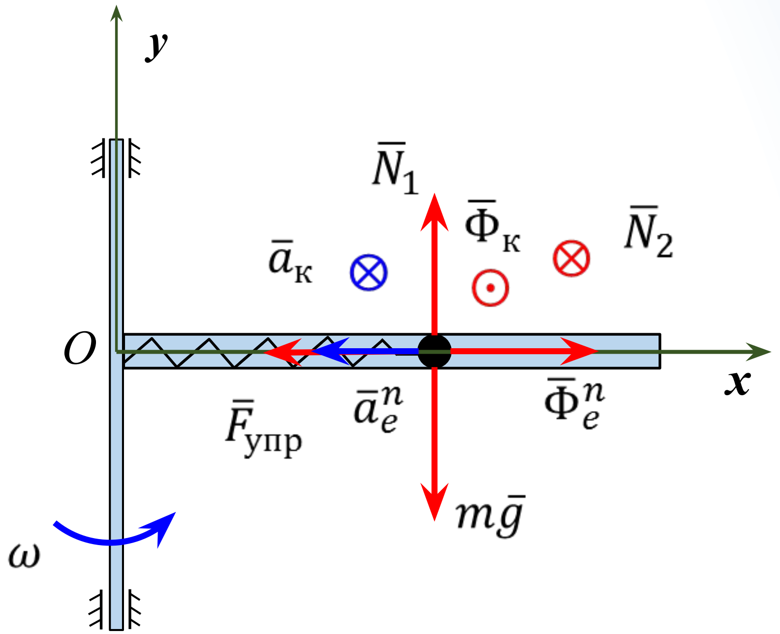
$$m\bar{a}_r = \bar{F}_{упр} + m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_к$$

$$x:\quad m\ddot{x} = \Phi_e^n - F_{упр}$$

$$\Phi_e^n = m\omega^2 x\,;\quad F_{упр} = c(x-l)$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x - c(x-l)$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)x = \frac{cl}{m}$$



Обозначим: $k^2 = \dfrac{c}{m}$

$$\ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x = \frac{cl}{m}$$

Динамика точки в неинерциальной системе отсчета.

Вариант 1.

$$k^2 - \omega^2 > 0$$

$$\ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x = \frac{cl}{m}$$

$$x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + (k^2 - \omega^2) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{(k^2 - \omega^2)}$

$$x_{\text{оо}} = c_1 \cos\sqrt{(k^2 - \omega^2)}t + c_2 \sin\sqrt{(k^2 - \omega^2)}t$$

$$x_{\text{чн}} = A, \quad (k^2 - \omega^2)A = \frac{cl}{m} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{cl}{(k^2 - \omega^2)m}$$

$$x = c_1 \cos\sqrt{(k^2 - \omega^2)}t + c_2 \sin\sqrt{(k^2 - \omega^2)}t + A$$

Н.У.: $x(0) = l, \qquad \dot{x}(0) = 0$

$$l = c_1 + \frac{cl}{(k^2 - \omega^2)m} \quad \Rightarrow \quad c_1 = l\left(1 - \frac{c}{(k^2 - \omega^2)m}\right)$$

$$0 = c_2 k \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$x = l\left(1 - \frac{c}{(k^2 - \omega^2)m}\right)\cos\sqrt{(k^2 - \omega^2)}t + \frac{cl}{(k^2 - \omega^2)m}$$

Динамика точки в неинерциальной системе отсчета.

Вариант 2.

$$k^2 - \omega^2 < 0$$

$$\ddot{x} - (\omega^2 - k^2)x = \frac{cl}{m}, \qquad x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - (\omega^2 - k^2) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\omega^2 - k^2}$

$$x_{\text{оо}} = c_1 e^{\sqrt{\omega^2 - k^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}t}$$

$$x_{\text{чн}} = A, \quad -(\omega^2 - k^2)\,A = \frac{cl}{m} \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{cl}{(\omega^2 - k^2)m}$$

$$x = c_1 e^{\sqrt{\omega^2 - k^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}t} + A$$

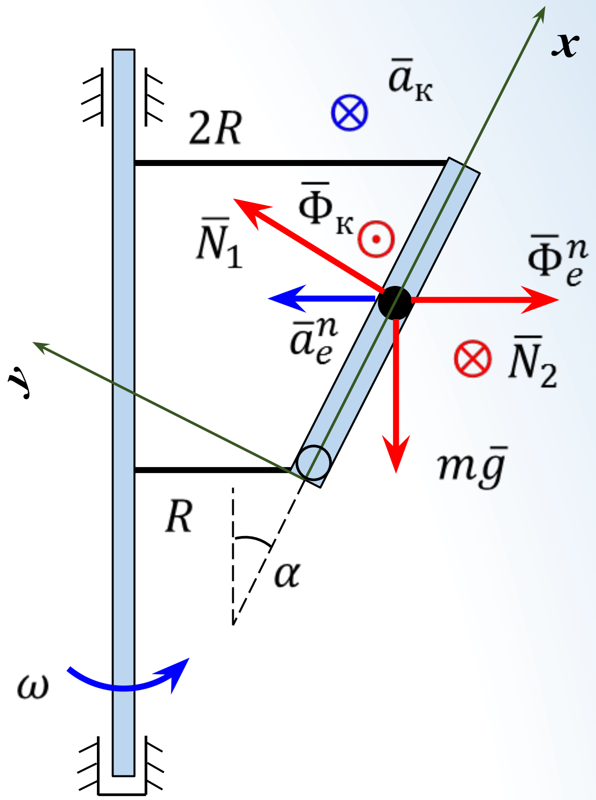
Н.У.: $x(0) = l, \qquad \dot{x}(0) = 0 \qquad l = c_1 + c_2 + A, \qquad 0 = \sqrt{\omega^2 - k^2}\,(c_1 - c_2) \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 = \frac{1}{2}(l - A)$

$$x = l\left(1 + \frac{c}{(\omega^2 - k^2)m}\right)\left(\frac{e^{\sqrt{\omega^2 - k^2}t} + e^{-\sqrt{\omega^2 - k^2}t}}{2}\right) - \frac{cl}{(\omega^2 - k^2)m}$$

$$x = l\left(1 + \frac{c}{(\omega^2 - k^2)m}\right) ch\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t - \frac{cl}{(\omega^2 - k^2)m}$$

Динамика точки в неинерциальной системе отсчета.

Материальная точка М массы m расположена внутри гладкой трубки, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Расстояния от нижнего и верхнего концов трубки до оси вращения равны R и $2R$ соответственно, угол между осью вращения и трубкой 30°. В начальный момент времени точка находилась на нижнем конце трубки в состоянии относительного покоя. Определить при каком значении угловой скорости вращения трубки ω_{min} точка начнет двигаться относительно трубки, а также относительную скорость точки в момент ее вылета из трубки считая $\omega = 2\omega_{min}$.



Решение:

Свяжем подвижную систему отсчета с трубкой.

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_к$$

$$a_e^n = \omega^2(R + x\sin\alpha)$$

$$\Phi_e^n = m\omega^2(R + x\sin\alpha)$$

$$x: \quad m\ddot{x} = \Phi_e^n \sin\alpha - mg\cos\alpha$$

Условие начала движения: $x = 0 \quad \sum F_{kx} > 0$

$$m\omega^2 R\sin\alpha > mg\cos\alpha \Rightarrow \quad \omega_{min}^2 = \frac{g}{R} ctg\alpha$$

Динамика точки в неинерциальной системе отсчета.

Сделаем замену переменных:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = \frac{d\dot{x}^2}{2dx}$$

$$m\frac{dv^2}{2dx} = m\omega^2(R + xsin\alpha)sin\alpha - mgcos\alpha\,; \qquad \frac{v^2}{2} = \frac{\omega^2 x^2}{2}sin^2\alpha + (\omega^2 Rsin\alpha - gcos\alpha)x + C$$

Н.У.: $t = 0 \quad x(0) = 0, \qquad v(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$

В момент вылета точки $x = \dfrac{R}{sin\alpha} = 2R.$

При $\omega^2 = 2\frac{g}{R}ctg\alpha$:

$$v^2 = 2\frac{g}{R}ctg\alpha \cdot 4Rsin^2\alpha + 2(2gcos\alpha - gcos\alpha)2R$$

$$v^2 = 4gRsin2\alpha + 4gRcos\alpha = 8gR\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}92gR$$

$$v = 2{,}63\sqrt{gR}$$