

Проценты. Задачи 11 из ЕГЭ

- **Шевкин А. В.** Заслуженный учитель РФ.
avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru

Будем считать, что учащиеся уже обучены решать задачу «Найти число b , составляющее p % числа a » и две обратные задачи, приводящие к нахождению a и p из равенства $b = \frac{a \cdot p}{100}$.

Проценты. Реальный случай

Рассмотрим способы решения задач на проценты, требующих сравнения чисел в процентах. Это не простые задачи, они ставят в тупик и взрослых. Вот вам реальный случай.

В Комсомольской правде (14.02.2019) обозреватель отдела экономики написал о монете, полученной из обращения за 1 р.: «А недавно глянул в каталог и обмер: стоит она уже 600 рублей...

Проценты. Реальный случай

Называется «Юбилейный рубль
«Пушкин» 1999 года выпуска.

Как тут не воскликнуть:

«Ай да Пушкин!» — 600 %
прибыли за 20 лет!»

Давайте поправим обозревателя отдела экономики.

В 1999 году юбилейная монета стоила 1 р. В 2019 году она
стоила 600 р. На сколько процентов подорожала монета?

Было это в начале нулевых, монетка та и сейчас у меня дома валяется. А недавно глянул в каталог - так и обмер: стоит она уже 600 рублей. Это если была напечатана на Московском монетном дворе. А если на Санкт-Петербургском - 650. Называется «Юбилейный рубль «Пушкин» 1999 года выпуска. Как тут не воскликнуть: «Ай да Пушкин!» - 600% прибыли за 20 лет!

Проценты. Реальный случай

Решение. *I способ,* Увеличение стоимости монеты в рублях составило $600 - 1 = 599$ (р.). Мы сравниваем в процентах прибыль 599 р. с первоначальной стоимостью монеты 1 р., принимаемой за 100 %. Так как 599 р. в 599 раз больше, чем 1 р., то монета подорожала на 59900 %.

II способ, Число a больше, чем число b на $\frac{(a - b) \cdot 100 \%}{b}$.
Вычисляя по этой формуле, получим те же 59900 %.

Ответ. На 59900 %

Проценты. Задачи 11 из ЕГЭ

Приведём теперь решения задач из ЕГЭ, указывая год выпуска сборника вариантов для подготовки к ЕГЭ, из которого взята задача.

Заметим, что при решении задач на проценты лучше обходиться без пропорций, в чём можно убедиться, решив рассмотренные ниже задачи с помощью пропорций.

Начнём с задачи на «**сухое вещество**».



Повторяем проценты. ЕГЭ-2018

- 1. Виноград содержит 90 % влаги, изюм — 5 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 98 кг изюма?

Решение. *I способ.*

- 1) $100 - 5 = 95$ (%) — «сухого вещества» в изюме;
- 2) $98 \cdot 0,95 = 93,1$ (кг) — «сухого вещества» в 98 кг изюма;
- 3) $100 - 90 = 10$ (%) — «сухого вещества» в винограде;
- 4) $93,1 : 0,1 = 931$ (кг) — масса винограда.



Повторяем проценты. ЕГЭ-2018

- 1. Виноград содержит 90 % влаги, изюм — 5 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 98 кг изюма?

Решение. *II способ.* Пусть надо взять x кг винограда, он содержит $100 - 90 = 10$ (%) «сухого вещества», т. е. $0,1x$ кг. Изюм содержит $100 - 5 = 95$ (%) «сухого вещества», т. е. $0,95 \cdot 98 = 93,1$ (кг). Составим уравнение:

$$0,1x = 93,1.$$

Его единственный корень 931. Надо взять 931 кг винограда.

Ответ. 931 кг.

$$a + 10 \% \text{ от } a = ?$$

Подготовительная задача

- **2.** Число увеличили на 10 %, полученное число ещё раз увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилось первоначальное число за два раза?

Решение. Пусть a — первоначальное число, тогда

$$a + \frac{10}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot a = 1,1a \text{ — второе число,}$$

$$1,1a + \frac{10}{100} \cdot 1,1a = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot 1,1a = 1,1^2 a = 1,21a = a + 0,21a.$$

Третье число, оно на 21 % больше, чем a .

Ответ. На 21 %.

Подготовительная задача. Выводы

- Здесь и далее неизвестное число, от которого находят проценты, будем обозначать буквой.

Обобщим полученный результат: чтобы увеличить число на p %, можно это число умножить на $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Аналогично показывается, что для уменьшения числа на p %, можно это число умножить на $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

ЕГЭ-2019

3. Одиннадцать одинаковых рубашек дешевле куртки на 1 %. На сколько процентов четырнадцать таких же рубашек дороже куртки?

Решение. Пусть r — цена рубашки, k — цена куртки (в руб.). Тогда верны равенства:

$$11r = k - 0,01k, \quad 11r = 0,99k, \quad r = 0,09k, \quad 14r = 1,26k.$$

Последнее равенство означает, что 14 рубашек стоят $k + 0,26k$, т. е. дороже куртки на 26 %.

Ответ. На 26 %.



ЕГЭ-2019

4. Восемь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2 %. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

Решение. Используя те же обозначения, получим верные равенства:

$$8r = 0,98k, \quad 4r = 0,49k, \quad 12r = 1,47k.$$

Значит, двенадцать рубашек дороже куртки на 47 %.

Ответ. На 47 %.



ЕГЭ-2017

5. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники.

На сколько процентов 1 кг клубники дешевле 1 кг черешни?

Решение. Выпишем в строчку одинаковые по стоимости массы ягод (см. табл.).

Черешня	Вишня	Клубника
3	5	
	3	2
9	15	10



ЕГЭ-2017

5. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники.

На сколько процентов 1 кг клубники дешевле 1 кг черешни?

Решение. Выпишем в строчку одинаковые по стоимости массы ягод (см. табл.). 1 кг клубники стоит столько же, сколько стоит 0,9 кг черешни, то есть на 10 % дешевле, чем 1 кг черешни.

Ответ. На 10 %.

Черешня	Вишня	Клубника
3	5	
	3	2
9	15	10



ЕГЭ-2019

6. Брюки дороже рубашки на 30 % и дешевле пиджака на 22 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Решение. Пусть брюки стоят b , рубашка r , пиджак p (в рублях). По условиям задачи составим равенства:

$$b = r + 0,3r = p - 0,22p,$$

откуда следует, что $r = 0,6p = p - 0,4p$.

Значит, рубашка дешевле пиджака на 40 %.

Ответ. На 40 %.



ЕГЭ прошлых лет

• 7. Зарплату сотрудника увеличили на несколько процентов. Через некоторое время эту новую зарплату увеличили на столько же процентов, как и в первый раз. На сколько процентов увеличили зарплату в первый раз, если за два раза она увеличилась на 44 %?

Решение. Пусть a — первоначальная зарплата и её увеличили в первый раз на p %, тогда после первого повышения зарплата стала равной $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a$.

ЕГЭ прошлых лет

• 7. Зарплату сотрудника увеличили на несколько процентов. Через некоторое время эту новую зарплату увеличили на столько же процентов, как и в первый раз. На сколько процентов увеличили зарплату в первый раз, если за два раза она увеличилась на 44 %?

...Эту зарплату увеличили на p %, поэтому третья зарплата была равна $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot a$, она по условию задачи равна $1,44a$.

ЕГЭ прошлых лет

∴ Тогда верно равенство:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot a = 1,44a.$$

Перепишем его в виде:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1,44.$$

Так как $1 + \frac{p}{100} > 0$, то $1 + \frac{p}{100} = 1,2$, откуда $p = 20$.

Значит, в первый раз зарплату увеличили на 20 %.

Ответ. На 20 %.

ЕГЭ прошлых лет

- 8. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

Решение. Пусть a — цена каждой акции при открытии торгов в четверг. Пусть после торгов в четверг цена акции увеличилась на p %, акция стала стоить $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a$.



ЕГЭ прошлых лет

- 8. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?



...После торгов в пятницу цена акции уменьшилась на p %, акция стала стоить $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot a = \left(1 - \left(\frac{p}{100}\right)^2\right) \cdot a$.

В результате она стала стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг, т. е. $0,91a$.

ЕГЭ прошлых лет

- Тогда верно равенство:

$$\left(1 - \left(\frac{p}{100}\right)^2\right) \cdot a = 0,91a.$$

Перепишем его в виде:

$$1 - \left(\frac{p}{100}\right)^2 = 0,91.$$

Так как $\frac{p}{100} > 0$, то $\frac{p}{100} = 0,3$, откуда $p = 30$.

Значит, в четверг акции компании подорожали на 30 %.

Ответ. На 30 %.



ЕГЭ прошлых лет

9. (2018) Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась в 2 раза, то общий доход семьи вырос бы на 65 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась в 2 раза, то общий доход семьи сократился бы на 1 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение. Обозначим доходы в рублях мужа, жены и дочери m , g и d соответственно. По условиям задачи составим два равенства:

$$m = 0,65(m + g + d), \quad (1)$$

$$0,5d = 0,01(m + g + d). \quad (2)$$

ЕГЭ прошлых лет

• Обе части равенства (2) не нули. Разделив равенство (1) на равенство (2), получим: $m : 0,5d = 65$, откуда получим $m = 32,5d$. Умножив равенство (2) на 2 и подставив в полученное равенство $32,5d$ вместо m , получим равенство:

$$d = 0,02(32,5d + g + d). \quad (3)$$

Выразив g через d из равенства (3), получим: $g = 16,5d$. Тогда доход семьи равен $m + g + d = 50d$, а зарплата жены от общего дохода составляет $\frac{g \cdot 100 \%}{m + g + d} = \frac{16,5d \cdot 100 \%}{50d} = 33 \%$.

Ответ. 33 %.

Задачи для самостоятельного решения

10. (2019) Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 4 %. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

11. (2019) Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 7 %. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Брюки дороже рубашки на 20 % и дешевле пиджака на 46 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?



Задачи для самостоятельного решения

13. В понедельник цена акции увеличилась на 20 %, во вторник она увеличилась ещё на 30 %. На сколько процентов за эти два дня увеличилась цена акции?

14. (2017) В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 49 % дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?



Задачи для самостоятельного решения

15. Брюки дороже рубашки на 25 % и дешевле пиджака на 20 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

16. В магазине костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 20 % дороже, чем такой же костюм на рынке, причем брюки стоят на 30 % дороже, чем на рынке, а пиджак — на 15 %. Во сколько раз на рынке брюки от этого костюма дешевле пиджака?

Ответы. 10. На 44 %. 11. На 24 %. 12. На 55 %. 13. На 56 %.
14. На 70 %. 15. На 36 %. 16. В 2 раза.

На экзамене в ответе пишем только число: 10. 44. 11. 24...