Проценты. Задачи 11 из ЕГЭ

Шевкин А. В. Заслуженный учитель РФ.
avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru

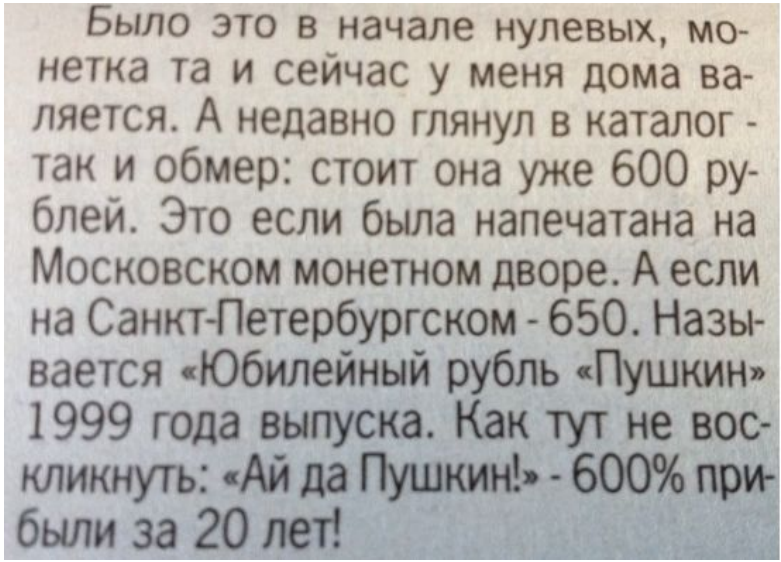
Будем считать, что учащиеся уже обучены решать задачу «Найти число b, составляющее p % числа a» и две обратные задачи, приводящие к нахождению a и p из равенства $b = \frac{a \cdot p}{100}$.

Проценты. Реальный случай

Рассмотрим способы решения задач на проценты, требующих сравнения чисел в процентах. Это не простые задачи, они ставят в тупик и взрослых. Вот вам реальный случай.

В **Комсомольской правде** (14.02.2019) обозреватель отдела экономики написал о монете, полученной из обращения за 1 р.: «А недавно глянул в каталог и обмер: стоит она уже 600 рублей…

Проценты. Реальный случай


Было это в начале нулевых, монетка та и сейчас у меня дома валяется. А недавно глянул в каталог - так и обмер: стоит она уже 600 рублей. Это если была напечатана на Московском монетном дворе. А если на Санкт-Петербургском - 650. Называется «Юбилейный рубль «Пушкин» 1999 года выпуска. Как тут не воскликнуть: «Ай да Пушкин!» - 600% прибыли за 20 лет!

Называется «Юбилейный рубль «Пушкин» 1999 года выпуска. Как тут не воскликнуть: «Ай да Пушкин!» — 600 % прибыли за 20 лет!»

Давайте поправим обозревателя отдела экономики.

В 1999 году юбилейная монета стоила 1 р. В 2019 году она стоила 600 р. На сколько процентов подорожала монета?

Проценты. Реальный случай

Решение. *I способ,* Увеличение стоимости монеты в рублях составило 600 – 1 = 599 (р.). Мы сравниваем в процентах прибыль 599 р. с первоначальной стоимостью монеты 1 р., принимаемой за 100 %. Так как 599 р. в 599 раз больше, чем 1 р., то монета подорожала на 59900 %.

II способ, Число a больше, чем число b на $\frac{(a-b)\cdot 100\ \%}{b}$.

Вычисляя по этой формуле, получим те же 59900 %.

Ответ. На 59900 %

Проценты. Задачи 11 из ЕГЭ

Приведём теперь решения задач из ЕГЭ, указывая год выпуска сборника вариантов для подготовки к ЕГЭ, из которого взята задача.

Заметим, что при решении задач на проценты лучше обходиться без пропорций, в чём можно убедиться, решив рассмотренные ниже задачи с помощью пропорций.

Начнём с задачи на «сухое вещество».

Повторяем проценты. ЕГЭ-2018

- **1.** Виноград содержит 90 % влаги, изюм — 5 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 98 кг изюма?

Решение. *I способ.*

1) $100 - 5 = 95$ (%) — «сухого вещества» в изюме;

2) $98 \cdot 0{,}95 = 93{,}1$ (кг) — «сухого вещества» в 98 кг изюма;

3) $100 - 90 = 10$ (%) — «сухого вещества» в винограде;

4) $93{,}1 : 0{,}1 = 931$ (кг) — масса винограда.

Повторяем проценты. ЕГЭ-2018

- **1.** Виноград содержит 90 % влаги, изюм — 5 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 98 кг изюма?

Решение. *II способ.* Пусть надо взять x кг винограда, он содержит $100 - 90 = 10$ (%) «сухого вещества», т. е. $0{,}1x$ кг. Изюм содержит $100 - 5 = 95$ (%) «сухого вещества», т. е. $0{,}95 \cdot 98 = 93{,}1$ (кг). Составим уравнение:

$$0{,}1x = 93{,}1.$$

Его единственный корень 931. Надо взять 931 кг винограда.

Ответ. 931 кг.

Подготовительная задача

a + 10 % от a = ?

• **2.** Число увеличили на 10 %, полученное число ещё раз увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилось первоначальное число за два раза?

Решение. Пусть a — первоначальное число, тогда

$a + \frac{10}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot a = 1{,}1a$ — второе число,

$1{,}1a + \frac{10}{100} \cdot 1{,}1a = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot 1{,}1a = 1{,}1^2a = 1{,}21a = a + 0{,}21a.$

Третье число, оно на 21 % больше, чем a.

Ответ. На 21 %.

Подготовительная задача. Выводы

- Здесь и далее неизвестное число, от которого находят проценты, будем обозначать буквой.

Обобщим полученный результат: чтобы увеличить число на p %, можно это число умножить на $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Аналогично показывается, что для уменьшения числа на p %, можно это число умножить на $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

ЕГЭ-2019

3. Одиннадцать одинаковых рубашек дешевле куртки на 1 %. На сколько процентов четырнадцать таких же рубашек дороже куртки?

Решение. Пусть r — цена рубашки, k — цена куртки (в руб.). Тогда верны равенства:

$$11r = k - 0{,}01k, \quad 11r = 0{,}99k, \quad r = 0{,}09k, \quad 14r = 1{,}26k.$$

Последнее равенство означает, что 14 рубашек стоят $k + 0{,}26k$, т. е. дороже куртки на 26 %.

Ответ. На 26 %.

ЕГЭ-2019

4. Восемь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2 %. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

Решение. Используя те же обозначения, получим верные равенства:

$$8r = 0{,}98k, \quad 4r = 0{,}49k, \quad 12r = 1{,}47k.$$

Значит, двенадцать рубашек дороже куртки на 47 %.

Ответ. На 47 %.

ЕГЭ-2017

5. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники.
На сколько процентов 1 кг клубники дешевле 1 кг черешни?

Решение. Выпишем в строчку одинаковые по стоимости массы ягод (см. табл.).

Черешня	Вишня	Клубника
3	5	
	3	2
9	15	10

ЕГЭ-2017

5. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники.
На сколько процентов 1 кг клубники дешевле 1 кг черешни?

Решение. Выпишем в строчку одинаковые по стоимости массы ягод (см. табл.). 1 кг клубники стоит столько же, сколько стоит 0,9 кг черешни, то есть на 10 % дешевле, чем 1 кг черешни.

Черешня	Вишня	Клубника
3	5	
	3	2
9	15	10

Ответ. На 10 %.

ЕГЭ-2019

6. Брюки дороже рубашки на 30 % и дешевле пиджака на 22 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Решение. Пусть брюки стоят b, рубашка r, пиджак p (в рублях). По условиям задачи составим равенства:

$$b = r + 0{,}3r = p - 0{,}22p,$$

откуда следует, что $r = 0{,}6p = p - 0{,}4p$.

Значит, рубашка дешевле пиджака на 40 %.

Ответ. На 40 %.

ЕГЭ прошлых лет

- **7.** Зарплату сотрудника увеличили на несколько процентов. Через некоторое время эту новую зарплату увеличили на столько же процентов, как и в первый раз. На сколько процентов увеличили зарплату в первый раз, если за два раза она увеличилась на 44 %?

Решение. Пусть a — первоначальная зарплата и её увеличили в первый раз на p %, тогда после первого повышения зарплата стала равной $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot a$.

ЕГЭ прошлых лет

- **7.** Зарплату сотрудника увеличили на несколько процентов. Через некоторое время эту новую зарплату увеличили на столько же процентов, как и в первый раз. На сколько процентов увеличили зарплату в первый раз, если за два раза она увеличилась на 44 %?

…Эту зарплату увеличили на p %, поэтому третья зарплата была равна $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \cdot a$, она по условию задачи равна $1{,}44a$.

ЕГЭ прошлых лет

∴ Тогда верно равенство:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \cdot a = 1{,}44a.$$

Перепишем его в виде:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}44.$$

Так как $1+\frac{p}{100} > 0$, то $1+\frac{p}{100} = 1{,}2$, откуда $p = 20$.

Значит, в первый раз зарплату увеличили на 20 %.

Ответ. На 20 %.

ЕГЭ прошлых лет

- **8.** В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

Решение. Пусть a — цена каждой акции при открытии торгов в четверг. Пусть после торгов в четверг цена акции увеличилась на p %, акция стала стоить $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot a$.

ЕГЭ прошлых лет

• **8.** В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

…После торгов в пятницу цена акции уменьшилась на p %, акция стала стоить $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot a=\left(1-\left(\frac{p}{100}\right)^2\right)\cdot a$.

В результате она стала стоить на 9 % дешевле, чем при открытии торгов в четверг, т. е. $0{,}91a$.

ЕГЭ прошлых лет

- Тогда верно равенство:

$$\left(1-\left(\frac{p}{100}\right)^2\right)\cdot a = 0{,}91a.$$

Перепишем его в виде:

$$1-\left(\frac{p}{100}\right)^2 = 0{,}91.$$

Так как $\frac{p}{100} > 0$, то $\frac{p}{100} = 0{,}3$, откуда $p = 30$.

Значит, в четверг акции компании подорожали на 30 %.

Ответ. На 30 %.

ЕГЭ прошлых лет

9. (2018) Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась в 2 раза, то общий доход семьи вырос бы на 65 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась в 2 раза, то общий доход семьи сократился бы на 1 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение. Обозначим доходы в рублях мужа, жены и дочери m, g и d соответственно. По условиям задачи составим два равенства:

$$m = 0{,}65(m + g + d), \qquad (1)$$

$$0{,}5d = 0{,}01(m + g + d). \qquad (2)$$

ЕГЭ прошлых лет

• Обе части равенства (2) не нули. Разделив равенство (1) на равенство (2), получим: $m : 0{,}5d = 65$, откуда получим $m = 32{,}5d$. Умножив равенство (2) на 2 и подставив в полученное равенство $32{,}5d$ вместо m, получим равенство:

$$d = 0{,}02(32{,}5d + g + d). \qquad (3)$$

Выразив g через d из равенства (3), получим: $g = 16{,}5d$. Тогда доход семьи равен $m + g + d = 50d$, а зарплата жены от общего дохода составляет $\frac{g \cdot 100\ \%}{m+g+d} = \frac{16{,}5d \cdot 100\ \%}{50d} = 33\ \%$.

Ответ. 33 %.

Задачи для самостоятельного решения

10. (2019) Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 4 %. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

11. (2019) Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 7 %. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Брюки дороже рубашки на 20 % и дешевле пиджака на 46 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

АКЦИЯ
ИМЕННАЯ ОБЫКНОВЕННАЯ
АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО ЗАКРЫТОГО ТИПА
„ЭГАТП"
г. Электросталь
ОДНА ТЫСЯЧА 1000 РУБЛЕЙ
ОДНА ТЫСЯЧА 1000 РУБЛЕЙ
20 марта 1992 года (дата внесения записей)
Серия А № 00712
УСТАВНЫЙ КАПИТАЛ 3096 тысяч рублей.

Задачи для самостоятельного решения

13. В понедельник цена акции увеличилась на 20 %, во вторник она увеличилась ещё на 30 %. На сколько процентов за эти два дня увеличилась цена акции?

14. (2017) В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 49 % дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Задачи для самостоятельного решения

15. Брюки дороже рубашки на 25 % и дешевле пиджака на 20 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

16. В магазине костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 20 % дороже, чем такой же костюм на рынке, причем брюки стоят на 30 % дороже, чем на рынке, а пиджак — на 15 %. Во сколько раз на рынке брюки от этого костюма дешевле пиджака?

Ответы. 10. На 44 %. **11.** На 24 %. **12.** На 55 %. **13.** На 56 %. **14.** На 70 %. **15.** На 36 %. **16.** В 2 раза.

На экзамене в ответе пишем только число: **10.** 44. **11.** 24…