

Математическая модель линейной динамической системы в форме проблемных матриц (проматриц)

Основные вопросы лекции #3

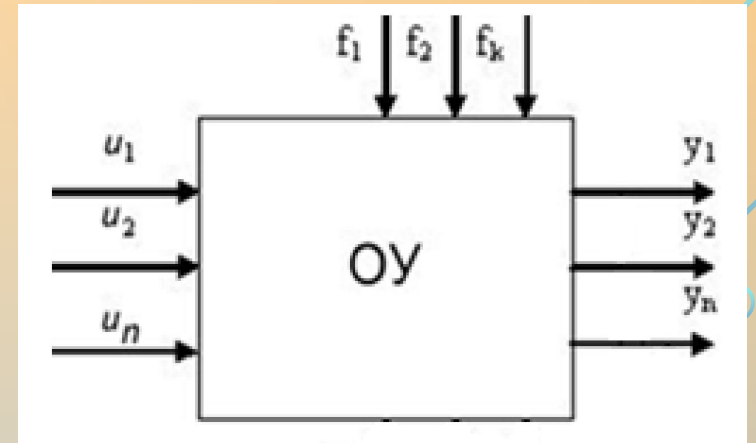
1. Формирование математической модели линейной динамической системы в форме проблемных матриц (проматриц)
2. Свойства проматриц
3. Проматрицы типовых соединений систем

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} px(p) = Ax(p) + Bu(p) + Ef(p) + x_0, \\ y(p) = Cx(p) + Du(p) + Gf(p). \end{cases}$$

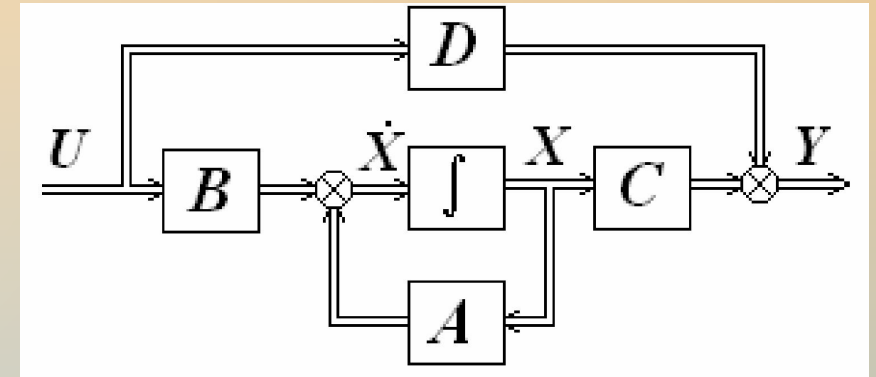
$$\begin{cases} (pI_n - A)x(p) = Bu(p) + x_0, \\ y(p) = Cx(p) + Du(p), \end{cases}$$



Математическая модель линейной системы в форме проматрицы

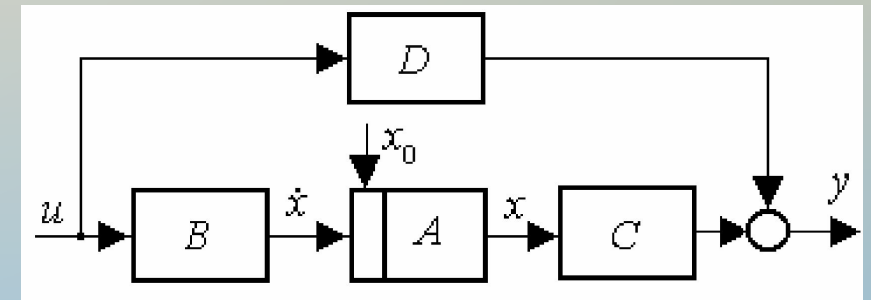
$$px(p) = Ax(p) + Bu(p) + x_0(p),$$

$$y(p) = Cx(p) + Du(p),$$



$$u_{s,1}(p) \quad y_{m,1}(p) \quad x_{n,1}(p) \quad x_0$$

$$A_{n,n} \quad B_{n,s} \quad C_{m,n} \quad D_{m,s}$$



$$(pI - A)x(p) - Bu(p) = x_0(p),$$

$$Cx(p) + Du(p) = y(p)$$

$$\begin{bmatrix} (pI - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(p) \\ u(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(p) \\ y(p) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (pI - A) & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

системная матрица Розенброка

$$\left[(n + m) \times (n + s) \right]$$

$$u(p) = u(p)$$

Далее везде нумерация формул, определений и пр.
дается в соответствии с [3].



$$(pI_n - A)x(p) = Bu(p) + x_0,$$

$$y(p) = Cx(p) + Du(p),$$

$$u(p) = u(p)$$

$$\begin{bmatrix} pI_n - A & 0_{n,m} & -B \\ -C & I_m & -D \\ 0_{s,n} & 0_{s,m} & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(p) \\ y(p) \\ u(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0_{m,1} \\ u(p) \end{bmatrix}$$

Определение 1. Матрица-столбец, составленная из субвекторов, представляющих собой вектор входных воздействий $u(p)$, вектор выходных реакций $y(p)$ и вектор внутренних переменных $x(p)$ системы

$$Y(p) = \begin{bmatrix} x(p) \\ y(p) \\ u(p) \end{bmatrix}$$

называется «**обобщенным выходом системы**»,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ 0_{m,1} \\ u(p) \end{bmatrix} = U(p)$$

называется «**обобщенным входом системы**».

$$\Omega(p)Y(p) = U(p) \quad (3.1.7)$$

Определение 3.2. Блочнo-матричное уравнение (3.1.7), связывающее обобщенный вход $U(p)$ и обобщенный выход $Y(p)$ системы, называется «**обобщенным уравнением линейной системы**».

$$\Omega(p) = \begin{bmatrix} pI_n - A_{n,n} & 0_{n,m} & -B_{n,s} \\ -C_{m,n} & I_m & -D_{m,s} \\ 0_{s,n} & 0_{s,m} & I_s \end{bmatrix} \quad [(n+m+s) \times (n+m+s)]$$

Определение 3.3. Квадратная полиномиальная матрица $\Omega(p)$, которая обобщенному выходу $Y(p)$ ставит в соответствие обобщенный вход $U(p)$ системы по формуле (3.1.7), называется «**проблемной матрицей**» или, кратко, «**проматрицей**» рассматриваемой системы в конкретной задаче

Определение 3.4. Блочная матрица (3.1.8) называется **проматрицей моделирования** для объекта, заданного в пространстве состояний постоянными матрицами A, B, C, D .

Свойства

проматрицы

1. Квадратность.
2. Невырожденность.

Эти свойства квадратности и невырожденности обеспечивают проматрице любой задачи двустороннюю обратимость, так что обратная к ней матрица всегда единственна. В основе этого важнейшего свойства проматриц лежит введенное дополнительное регуляризирующее тождество.

3. Автономность, т.е. все уравнения (коэффициенты исходных уравнений) представлены в проматрице самостоятельными строками-уравнениями.
4. Разреженность, т.е. большое количество нулевых элементов проматрицы, что может значительно облегчить выполнение вычислительных процедур.
5. Универсальность – применимость для любой формы модели, т.е. в любой задаче исследуемую или синтезируемую систему можно представить в форме обобщенного уравнения и, следовательно, соответствующей проматрицы.

Продemonстрируем свойство универсальности

Пусть имеется запись системы в форме левой факторизации

$$A_L(p)y(p) = B_L(p)u(p) + y_0(p)$$

Дополним его формальным *регуляризирующим тождеством*

$$u(p) = u(p)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_L(p) & -B_L(p) \\ 0 & I_S \end{bmatrix}}_{\Omega(p)} \underbrace{\begin{bmatrix} y(p) \\ u(p) \end{bmatrix}}_{Y(p)} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0(p) \\ u(p) \end{bmatrix}}_{U(p)}$$

Определение 3.5. Блочная матрица называется проматрицей задачи моделирования для объекта, заданного в форме левой факторизации парой полиномиальных матриц.

Для случая правой факторизации можно по записать

$$\begin{aligned}A_R(p)v(p) &= u(p) + v_0(p), \\ y(p) &= B_R(p)v(p).\end{aligned}$$

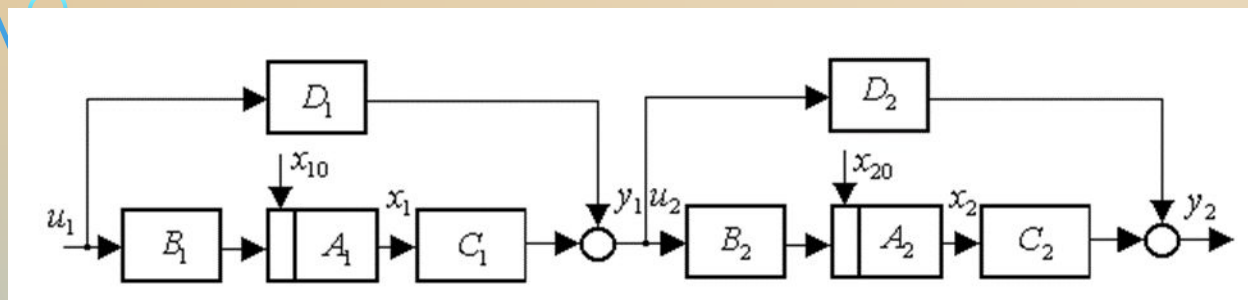
$$\begin{bmatrix} A_R(p) & 0_{s,m} & -I_s \\ -B_R(p) & I_m & 0_{m,s} \\ 0_{s,s} & 0_{s,m} & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(p) \\ y(p) \\ u(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0(p) \\ 0_{m,1} \\ u(p) \end{bmatrix}$$

$$\Omega(p) = \begin{bmatrix} A_R(p) & 0_{s,m} & -I_s \\ -B_R(p) & I_m & 0_{m,s} \\ 0_{s,s} & 0_{s,m} & I_s \end{bmatrix}$$

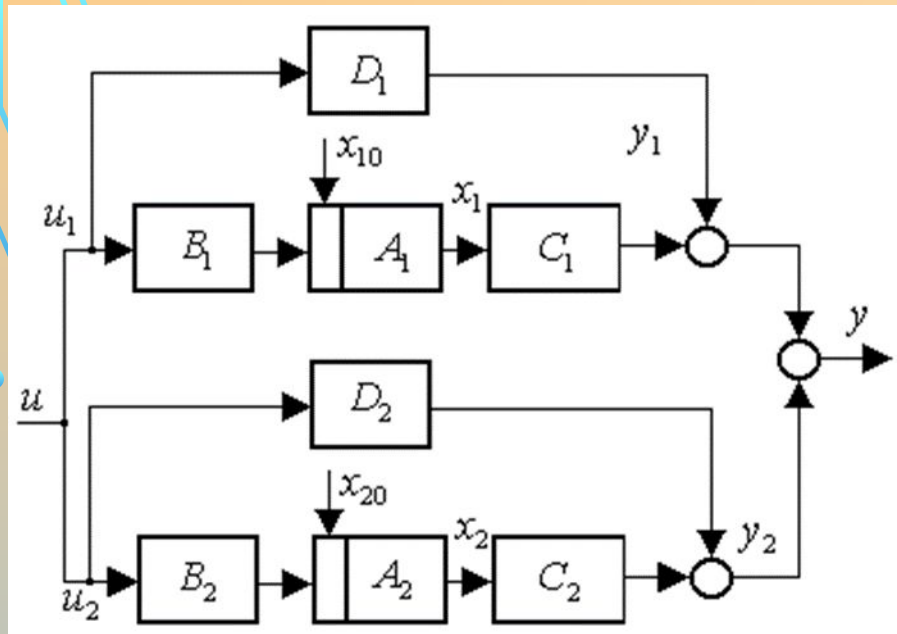
Определение 3.6. Блочная матрица называется проматрицей задачи моделирования для объекта, заданного в форме правой факторизации парой полиномиальных матриц .

Проматрицы типовых соединений систем

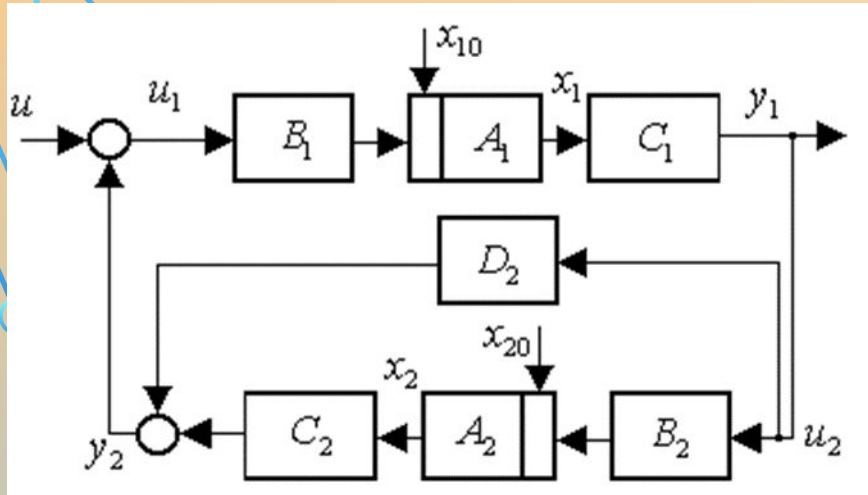
При использовании описаний систем в пространстве состояний



$$\begin{bmatrix}
 (pI_{m_1} - A_1) & 0 & -B_1 & 0 & 0 & 0 \\
 -C_1 & I_{m_1} & -D_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & I_s & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & (pI_{m_2} - A_2) & 0 & -B_2 \\
 0 & 0 & 0 & -C_2 & I_{m_2} & -D_2 \\
 0 & -I_{m_1} & 0 & 0 & 0 & I_{m_1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 y_1 \\
 u_1 \\
 x_2 \\
 y_2 \\
 u_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 x_{10} \\
 0 \\
 u_1 \\
 x_{20} \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}
 (pI_{n_1} - A_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_1 \\
 -C_1 & I_{m_1} & 0 & 0 & 0 & -D_1 \\
 0 & 0 & (pI_{n_2} - A_2) & 0 & 0 & -B_2 \\
 0 & 0 & -C_2 & I_{m_2} & 0 & -D_2 \\
 0 & -I_{m_1} & 0 & -I_{m_2} & I_m & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 y_1 \\
 x_2 \\
 y_2 \\
 y \\
 u
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 x_{10} \\
 0 \\
 x_{20} \\
 0 \\
 0 \\
 u
 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}
 (pI_{n_1} - A_1) & 0 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -C_1 & I_{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & I_{s_1} & 0 & \boxtimes I_{m_2} & 0 & I_s \\
 0 & 0 & 0 & (pI_{n_2} - A_2) & 0 & -B_2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -C_2 & I_{m_2} & -D_2 & 0 \\
 0 & -I_{s_1} & 0 & 0 & 0 & I_{s_2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 y_1 \\
 \varepsilon \\
 x_2 \\
 y_2 \\
 u_2 \\
 u
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 x_{10} \\
 0 \\
 0 \\
 x_{20} \\
 0 \\
 0 \\
 u
 \end{bmatrix}$$

Вопросы для самостоятельной проработки

1. Основные законы управления, их синтез и свойства для SISO-объектов [4];
2. Основные методы, математический аппарат для синтеза алгоритмов управления SISO-объектами [2];
3. Разработать математическую модель объекта управления (ОУ) (индивидуально, по вариантам):
 - в пространстве состояний;
 - в форме матричной передаточной функции;
 - в форме проматрицы;
4. Обосновать \доказать адекватность полученных математических \компьютерных моделей;
5. Обосновать \доказать идентичность \соответствие различных форм математических моделей ОУ