Механика деформируемого твердого тела

https://vk.com/mehss

Литература

1. *Сапронова Т.Ю., Прядко И.Н. Кинематика. Учебное пособие, 2021.*
2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо, 1999.*
3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2–х ч. М.: Наука, 1965.*

(см. http://vk.com/t_meh)

§ 1. Пространство и время. Материальные точки. Отмеченные точки.

1. Пространство и время. Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели — ***абсолютное пространство*** и ***абсолютное время***, существование которых постулируется. *Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого*; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Предполагается, что **абсолютное пространство** представляет собой трехмерное, однородное *(все точки пространства равноправны)* и изотропное (*все направления равноправны)* евклидово пространство. Наблюдения показывают, что для небольших по размерам областей реального физического пространства евклидова геометрия справедлива.

Абсолютное время в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. За единицу измерения времени принимается секунда. В кинематике надо еще выбрать единицу длины, например, 1 м, 1 см и т.п. Тогда основные кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение, о которых будет идти речь дальше, определяются при помощи единиц длины и времени.

2. Материальные точки. Отмеченные точки.

Под ***материальной точкой*** *понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы можно было пренебречь размерами частицы и ее вращением.*

Можно или нельзя принять материальный объект за материальную точку, зависит от конкретной задачи. Например, при определении положения спутника Земли в космическом пространстве очень часто целесообразно принимать его за материальную точку.

Если же рассматриваются задачи, связанные с ориентацией антенн, солнечных батарей, оптических приборов, установленных на спутнике, то его нельзя считать материальной точкой, так как в вопросах ориентации нельзя пренебрегать вращением спутника и его следует рассматривать как объект, имеющий конечные, хотя и малые по сравнению с расстоянием до Земли, размеры.

Отмеченной точкой *будем называть геометрическую точку, которую каким-либо образом отметили.* Например, вершина Эйфелевой башни и центр диска Луны – отмеченные точки.

Отмеченной точкой является конец отрезка длиной 1 метр, мысленно проведенного из центра некоторой прямоугольной площадки на поверхности Земли и перпендикулярного этой площадке.

Из последнего примера следует, *что отмеченная точка может не быть частицей (материальной точкой).*

Вообще, задание любого закона, определяющего изменение во времени координат точки относительно какой-нибудь системы отсчета, определяет отмеченную точку.

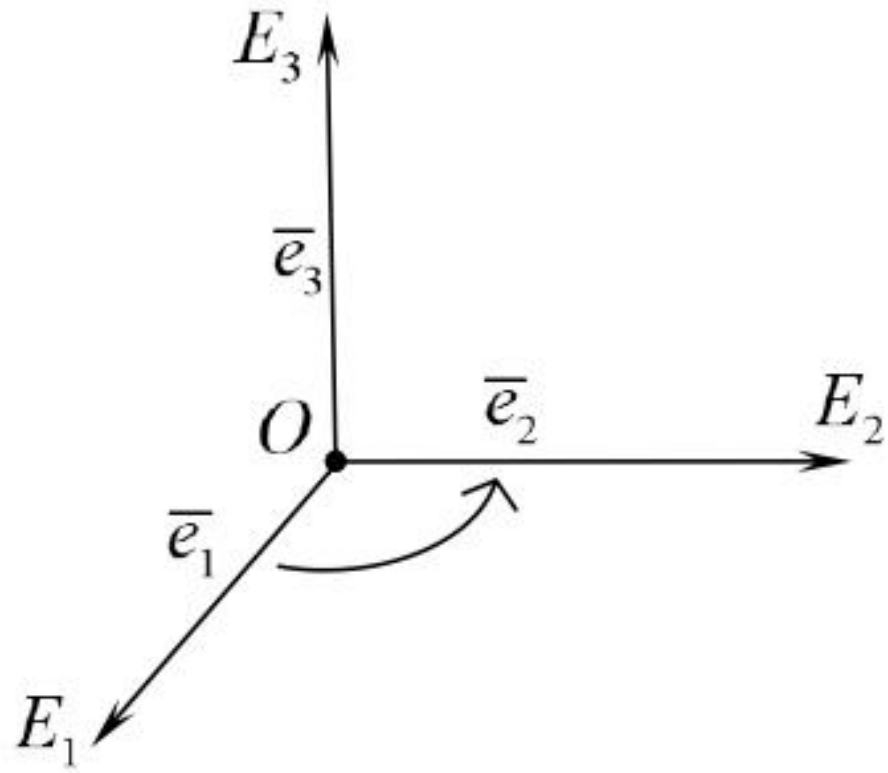
§ 2. Декартовы системы отсчета

Декартовой системой отсчета (ДСО) будем называть упорядоченную четверку отмеченных точек $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ в абсолютном пространстве E^3, для которой в любой момент времени выполнены три условия:

1) $|OE_1|=|OE_2|=|OE_3|=1$,

2) $OE_i \perp OE_j \ \ (i \neq j)$,

3) векторы $\overline{OE}_1$, $\overline{OE}_2$, $\overline{OE}_3$ образуют *правую тройку*, т. е. с конца последнего из них кратчайший поворот первого до второго кажется происходящим против часовой стрелки.



Для векторов $\overline{OE}_1, \overline{OE}_2, \overline{OE}_3$ мы будем использовать обозначения $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ (иногда $\overline{e}_x, \overline{e}_y, \overline{e}_z$ или $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$).

Положение отмеченной точки A по отношению к декартовой системе отсчета S в любой момент времени определяется ее *геометрическим радиус-вектором* $\overline{OA}$, который можно разложить по ортонормированному базису $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$:

$$\overline{OA} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3 .$$

Коэффициенты x, y, z этого разложения представляют собой *координаты* точки A в ДСО S.

Арифметический трехмерный вектор

$$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$ называют

арифметическим радиус-вектором точки A (в ДСО S),

или *координатным вектором* точки A (в ДСО S),

или *координатным представлением* вектора $\overline{OA}$ (в ДСО S)

($\mathbb{R}^3$ – арифметическое пространство).

Пусть V^3 – пространство геометрических (свободных) векторов. Соответствие между геометрическими и арифметическими векторами $\overline{OA}$ и r_{OA}, задаваемое с помощью базиса $\overline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, является изоморфизмом линейных евклидовых пространств V^3 и $\mathbb{R}^3$, т.е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим линейные операции и скалярное произведение.

Геометрическим векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ соответствуют арифметические векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Закон движения, скорость, ускорение, траектория

Рассмотрим ДСО $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и отмеченную точку A, движущуюся относительно S.

$r_{OA}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – арифметический радиус-вектор точки A в ДСО S.

Пусть известны функции $f_x(t),\ f_y(t),\ f_z(t),$ выражающие зависимость координат точки A от времени t:

$$x = f_x(t), \quad y = f_y(t), \quad z = f_z(t). \tag{3.1}$$

Рассмотрим вектор-функцию $r(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}.$

Система уравнений (3.1) равносильна уравнению

$$r_{OA} = r(t), \tag{3.2}$$

которое называется ***законом движения*** *точки A относительно ДСО S.*

Скорость v и ***ускорение*** w точки A в момент t относительно ДСО S определяются равенствами:

$$v := \dot{r}(t)\ \left(=\frac{dr(t)}{dt}\right),\ w := \ddot{r}(t)\ \left(=\frac{d^2 r(t)}{dt^2}\right).$$

Множество

$$\mathcal{T} = \{r(t) : t \in (\alpha,\ \beta)\}$$

называется ***арифметической траекторией*** данной точки (относительно ДСО S)

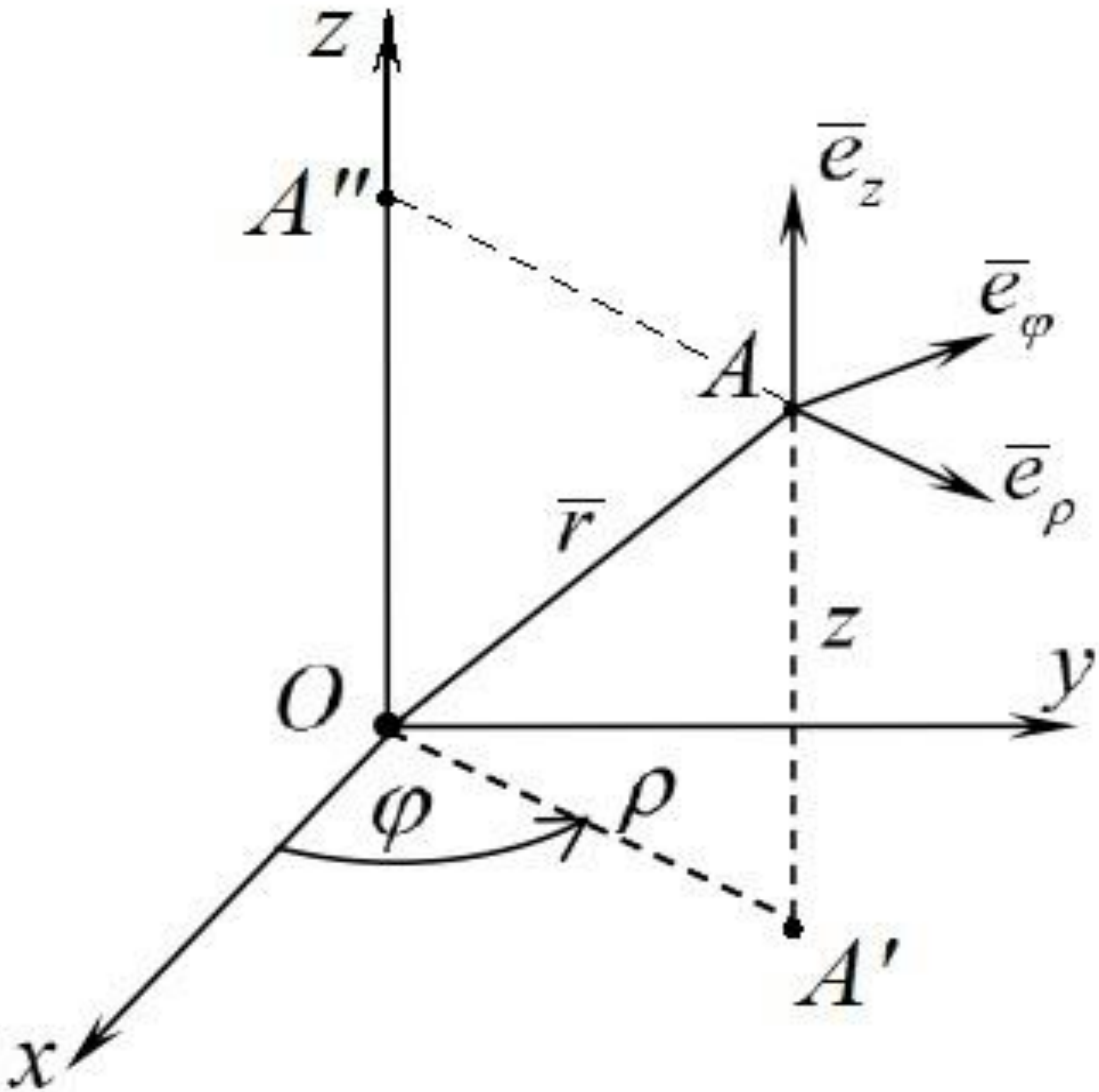
($(\alpha,\ \beta)$ – некоторый промежуток времени).

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее ***геометрической траекторией***.

Замечание о направлении вектора скорости. Геометрический вектор скорости, координатное представление которого равно $\dot{r}(t)=\begin{pmatrix}\dot{f}_x(t)\\ \dot{f}_y(t)\\ \dot{f}_z(t)\end{pmatrix}$, является *касательным вектором* к геометрической траектории точки.

§ 4. Цилиндрическая система координат.

Рассмотрим декартову систему отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и связанную с ней ПДСК $Oxyz$. Пусть A – произвольная точка в абсолютном пространстве E^3, A' – проекция точки A на плоскость Oxy, A'' – проекция точки A на ось Oz, φ – направленный угол между осью Oz и вектором $\overline{OA'}$ (см. рис.).



z
A''
$\overline{e}_z$
$\overline{e}_\varphi$
A
$\overline{e}_\rho$
$\overline{r}$
z
y
O
φ
ρ
A'
x

Тогда верно равенство $\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{OA''}$, которое, при переходе к соответствующим арифметическим векторам, приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''}. \tag{4.1}$$

Введем следующие обозначения : $\rho := |OA'|$,

$$e_\rho := \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $r_{OA'} = \rho e_\rho$, $r_{OA''} = z e_z$. Следовательно, в силу (4.1),

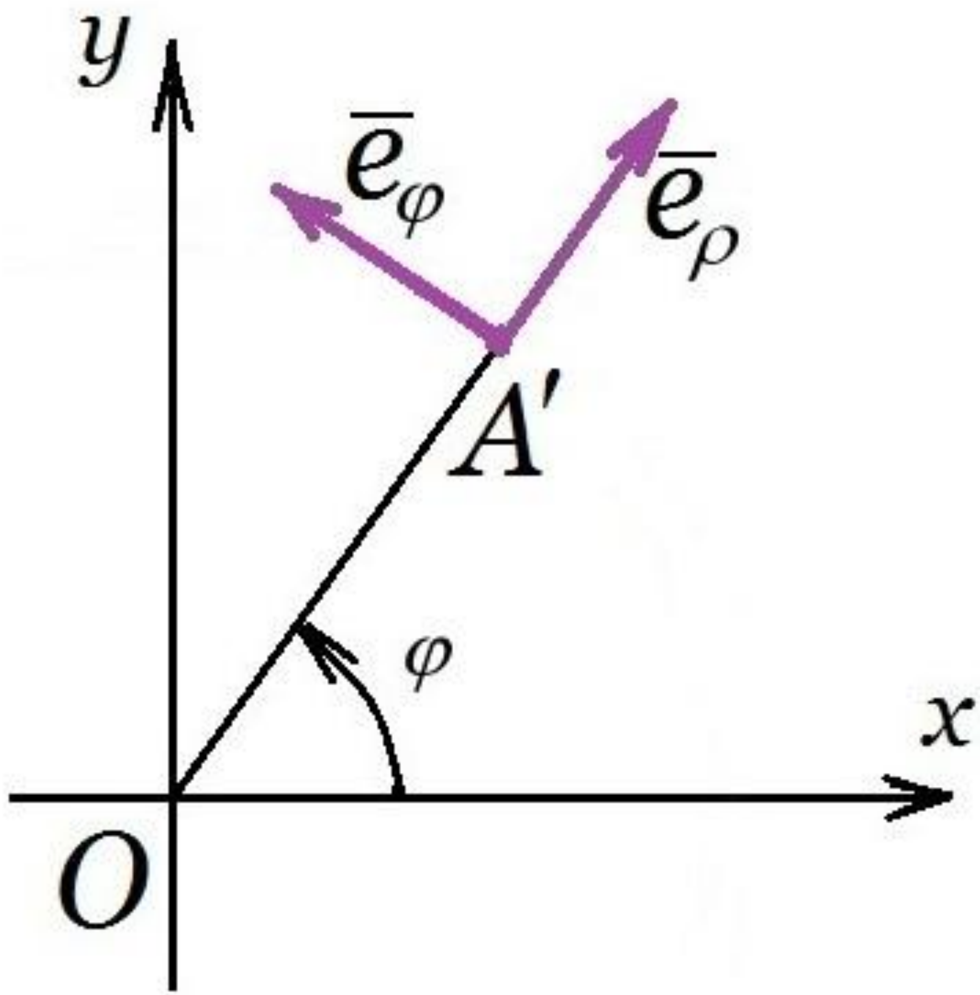
$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + z e_z. \tag{4.2}$$

Цилиндрическими координатами точки A по отношению к декартовой системе отсчета S называется упорядоченная тройка (ρ, φ, z).

Рассмотрим еще один вектор:

$$e_{\varphi} := \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий геометрический вектор $\bar{e}_{\varphi}$ получается из $\bar{e}_{\rho}$ поворотом на прямой угол против часовой стрелки.



y
$\bar{e}_\varphi$
$\bar{e}_\rho$
A'
φ
x
O

Заметим, что построенные выше *векторы* $\overline{e}_{\rho}$, $\overline{e}_{\varphi}$, $\overline{e}_{z}$ *образуют правый ортонормированный базис* (в пространстве геометрических (свободных) векторов V^3). В силу зависимости векторов $\overline{e}_{\rho}$ и $\overline{e}_{\varphi}$ от угла φ, этот базис является *подвижным*.

Арифметические векторы e_{ρ}, e_{φ}, e_{z} образуют правый ортонормированный базис в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть движение точки A задано в цилиндрической системе координат:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \tag{4.3}$$

Заметим, что при дифференцировании по переменной t имеют место следующие соотношения:

$$\dot{e}_\rho = \dot{\varphi} e_\varphi, \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_\rho. \tag{4.4}$$

Выразим скорость и ускорение точки через цилиндрические координаты ρ, φ, z и векторы $e_\rho,\ e_\varphi,\ e_z$:

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt}(\rho e_\rho + z e_z) = \dot{\rho} e_\rho + \rho\dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z} e_z, \qquad (4.5)$$

$$w = \dot{v} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) e_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) e_\varphi + \ddot{z} e_z. \qquad (4.6)$$

Поскольку векторы $e_\rho,\ e_\varphi,\ e_z$ образуют правый ортонормированный базис, квадраты длин векторов v и w можно вычислить как суммы квадратов коэффициентов в разложениях (4.5), (4.6).

§ 5. Неизменяемая система, твердое тело, твердая среда

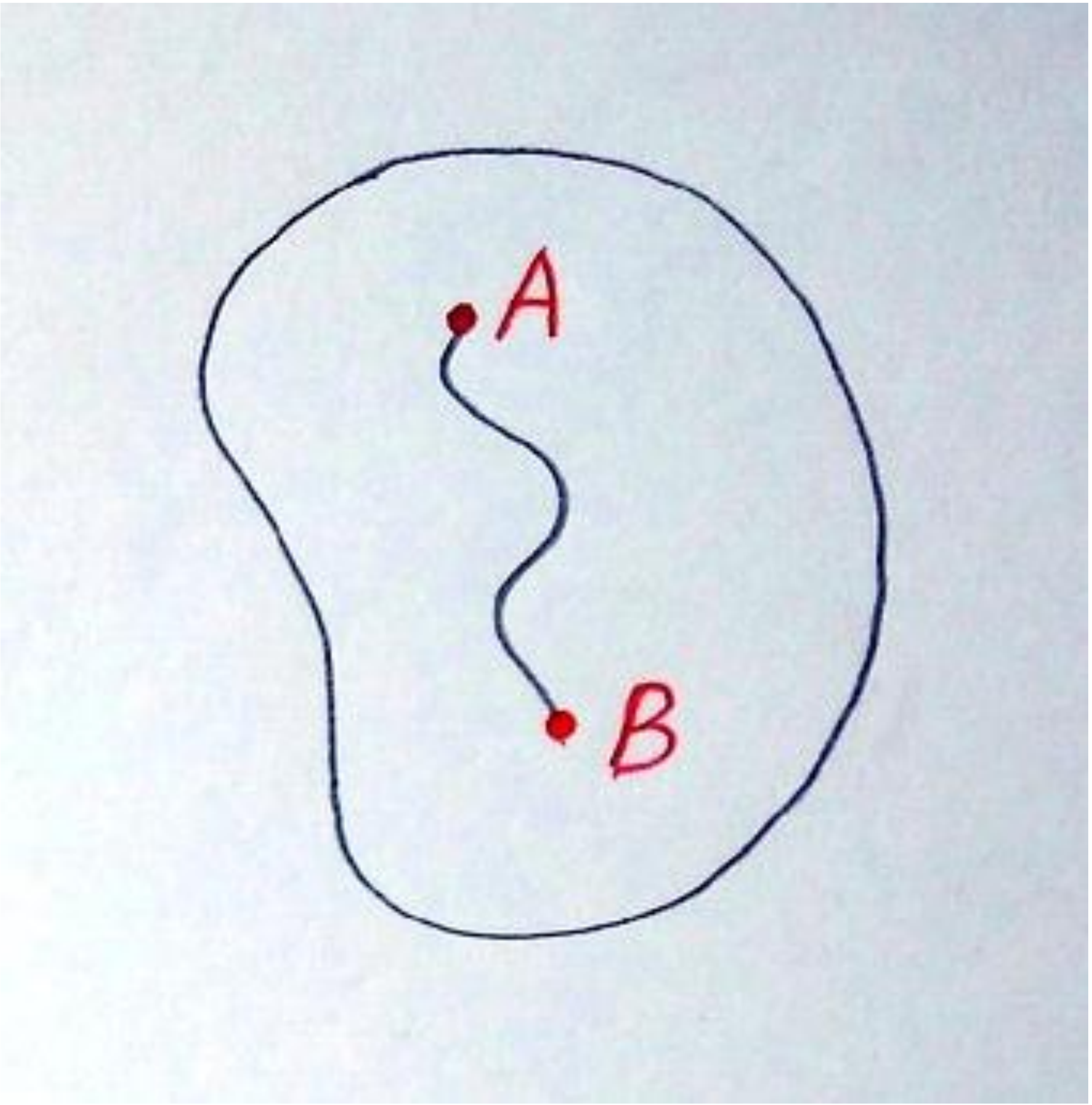
Рассмотрим некоторое множество $\{A_\alpha\}$ отмеченных точек, которое будем называть «системой».

Определение 1. Система $\{A_\alpha\}$ отмеченных точек называется ***неизменяемой***, если расстояния между точками этой системы не меняются со временем.

Примеры : ДСО $S=(O,E_1,E_2,E_3)$; какая-либо система точек $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, координаты которых не изменяются со временем.

Определение 2. ***Твердым телом*** называется ограниченная неизменяемая система отмеченных точек.

Замечание. Иногда в определение твердого тела добавляют условие ***линейной связности*** : для любой пары точек из твердого тела существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и полностью лежащая в теле. В этом случае твердое тело рассматривается как континуальное множество, как «сплошная среда».


A
B

Примеры. Конечная система точек $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, координаты которых не изменяются со временем, – пример «дискретного» твердого тела (не выполняется условие линейной связности).

Шар радиуса R с центром в начале координат – пример «сплошного» твердого тела (выполняется условие линейной связности).

Определение 3. ***Твердой средой*** называется неизменяемая система отмеченных точек, которая в каждый момент времени заполняет собой все пространство E^3.

Пример. Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и «подвижную» $S'=(O',E_1',E_2',E_3')$. Пусть Σ – множество отмеченных точек, неподвижных относительно S':

$$M\in\Sigma \Leftrightarrow r'_{O'M}=const,$$

где $r'_{O'M}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S'.

Система точек Σ является неизменяемой и в каждый момент времени заполняет собой все пространство E^3. Следовательно, Σ – твердая среда. В этом случае говорят, что *твердая среда* Σ *неподвижна относительно ДСО* S', а *система* S' *жестко связана со средой* Σ.

§ 6. Векторное произведение двух векторов

1. Векторное произведение двух геометрических векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два неколлинеарных вектора. ***Векторным произведением*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (обозначение: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$), удовлетворяющий следующим двум условиям:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$, где $(\vec{a},\vec{b})$ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$,

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные векторы, то, по определению, их векторное произведение равно нулевому вектору.

Рассмотрим координатные представления векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в ДСО S: $r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Тогда верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии):

$$r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Векторное произведение двух арифметических векторов. Рассмотрим два арифметических вектора $p=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ и $q=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. Их векторное произведение h определяется следующим равенством :

$$h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}:=\begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix},\ \text{где}\quad i=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ j=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначение: $h=p\times q$.

Нетрудно убедиться, что из равенства $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ следует аналогичное равенство для координатных представлений этих векторов:

$$r_c = r_a \times r_b \, .$$

§ 7. Смешанное произведение трех векторов

1. Смешанное произведение трех геометрических векторов. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – три геометрических вектора. ***Смешанным произведением*** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = <\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}>,$$

где символом $<\cdot\,, \cdot>$ обозначается скалярное произведение.

Рассмотрим координатные представления векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в ДСО S: $r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Тогда верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии):

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Смешанное произведение трех арифметических векторов. Для трех арифметических векторов

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

их смешанное произведение определяется аналогично:

$$(h, p, q) = < h \times p, q > .$$

Свойство смешанного произведения:

$$(h, p, q) = (p, q, h) = (q, h, p) \quad \forall h, p, q \in \mathbb{R}^3.$$

§8. Плоскопараллельное движение твердой среды. Определение и примеры

Пусть твердая среда Σ движется относительно неподвижной декартовой системы отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$, $v_A=\dot{r}_{OA}$ – скорость точки $A\in\Sigma$ в S.

Определение. Движение среды Σ относительно системы S называется ***плоскопараллельным***, если существует такое двумерное подпространство L_0 в $\mathbb{R}^3$, что $(\forall A\in\Sigma)(\forall t\in(\alpha,\beta))[v_A(t)\in L_0]$.

Подпространство L_0 называется ***пространством скоростей*** среды Σ.

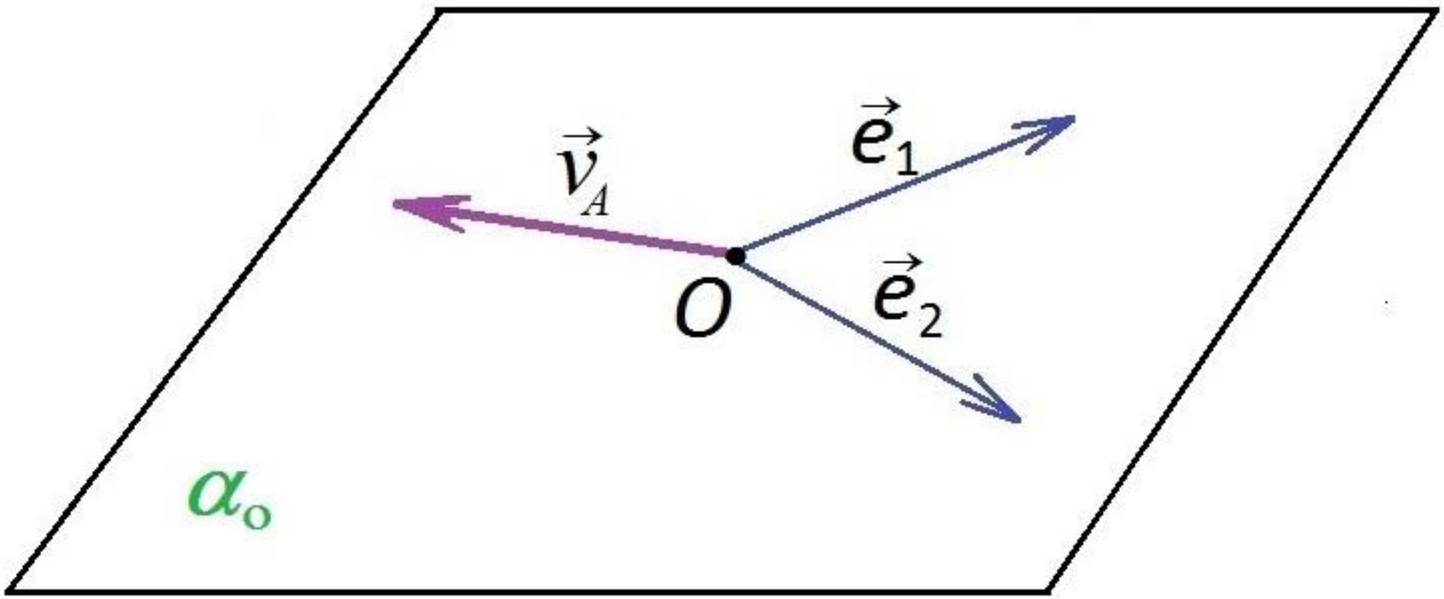
Двумерность подпространства L_0 означает, что в L_0 существуют линейно независимые векторы e_1 и e_2, такие, что $L_0 = \mathcal{L}in(e_1, e_2)$ – линейная оболочка векторов e_1 и e_2 (то есть векторы e_1 и e_2 образуют базис в L_0). Тогда для всякой точки $A \in \Sigma$ в каждый момент времени t найдутся такие числа $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, что скорость $v_A(t) = \lambda(t)e_1 + \mu(t)e_2$.

Соответствующие геометрические векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ также линейно независимы, а следовательно, неколлинеарны.

Рассмотрим плоскость α_0 в абсолютном пространстве, проходящую через точку O и параллельную векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда геометрический вектор скорости точки $A \in \Sigma$

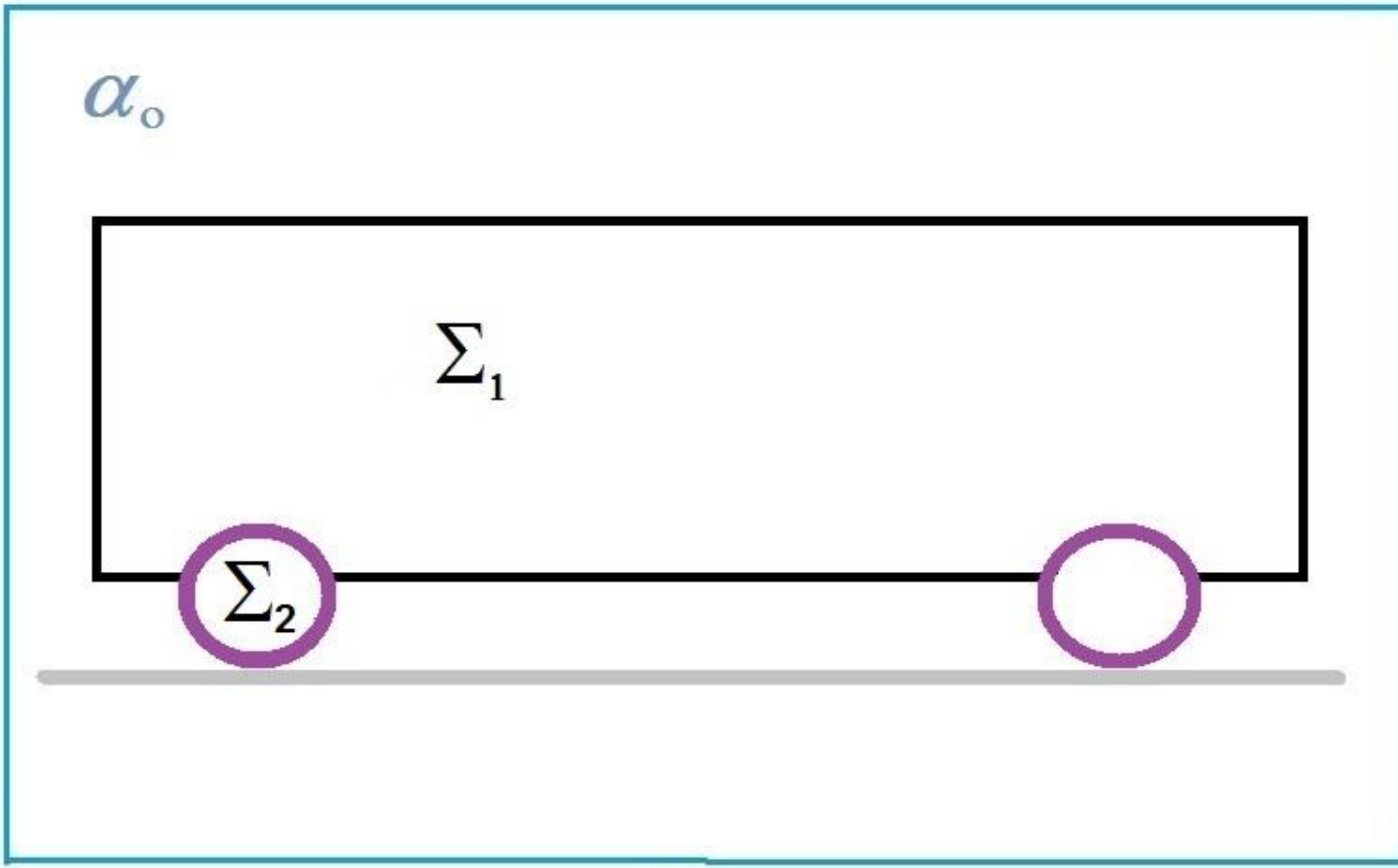
$$\vec{v}_A(t) = \lambda(t)\vec{e}_1 + \mu(t)\vec{e}_2,$$

то есть вектор $\vec{v}_A(t)$ также параллелен плоскости α_0 (см. рисунок).



Плоскость α_0 называют ***плоскостью скоростей*** среды Σ.

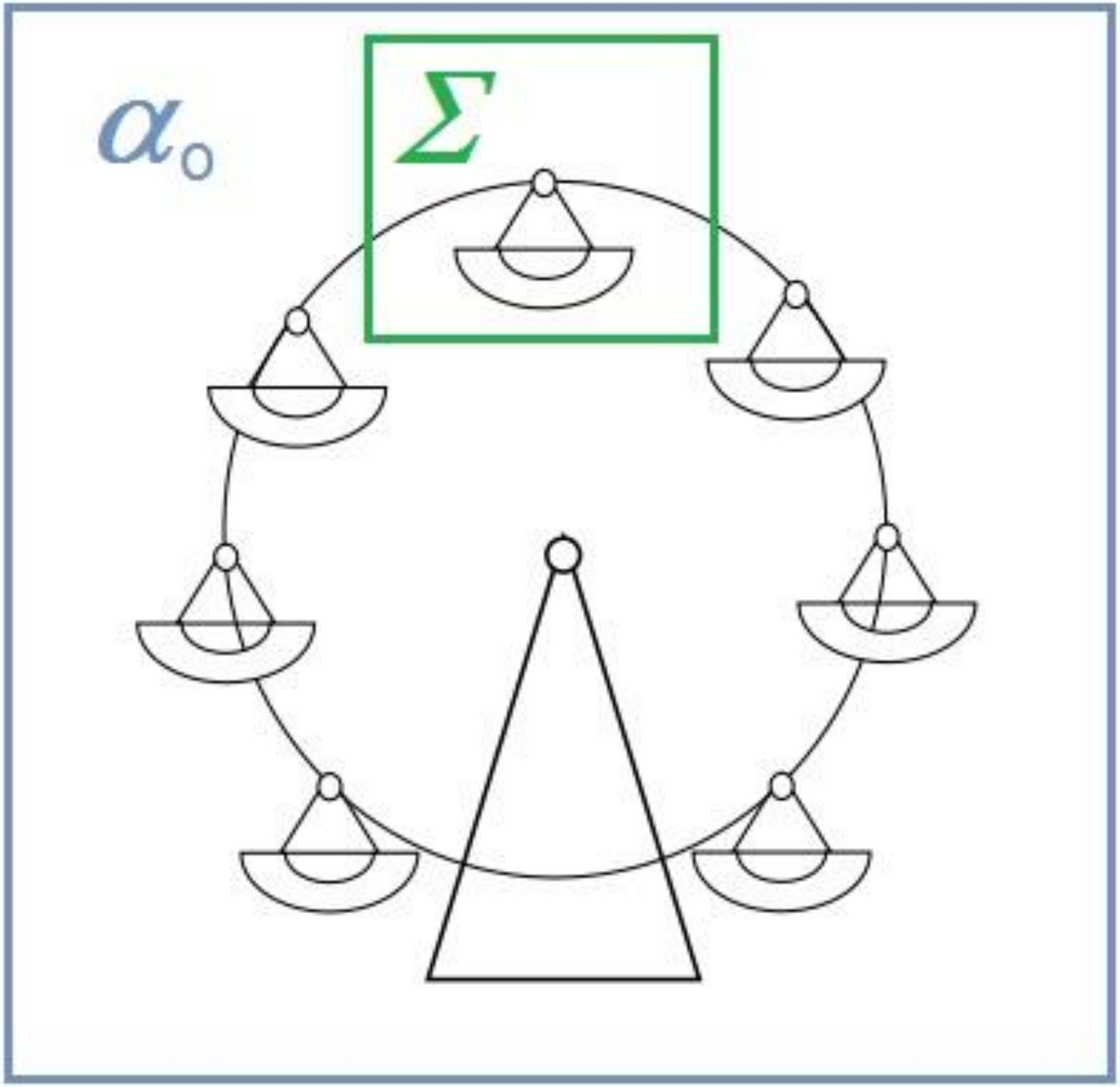
Примеры. **1. Железнодорожный вагон движется по прямолинейному участку пути.** В данном случае мы имеем плоскопараллельное движение разных твердых сред (см. рисунок), связанных, соответственно, с корпусом вагона (среда Σ_1) и с его колесами (среда Σ_2), так как скорости всех точек корпуса вагона и его колес «лежат» в вертикальной плоскости α_0, параллельной рельсам и перпендикулярной поверхности земли (на данном плоском участке). При этом корпус вагона совершает движение еще более частного вида – ***прямолинейное***, при котором скорости всех его точек коллинеарны фиксированной прямой (рельсам).



α_o
Σ_1
Σ_2

2. Движение твердой среды Σ, связанной с кабинкой «колеса обозрения», является плоскопараллельным.

Плоскость скоростей α_0 – это плоскость окружности колеса (см. рисунок).


α_0
Σ

§ 9. Критерий плоскопараллельного движения твердой среды

Пусть L_0 – двумерное подпространство в $\mathbb{R}^3$, $r_0 \in \mathbb{R}^3$.

Множество $L_0 + r_0 = \{q + r_0 \mid q \in L_0\}$ назовем ***арифметической плоскостью***, *параллельной подпространству* L_0.

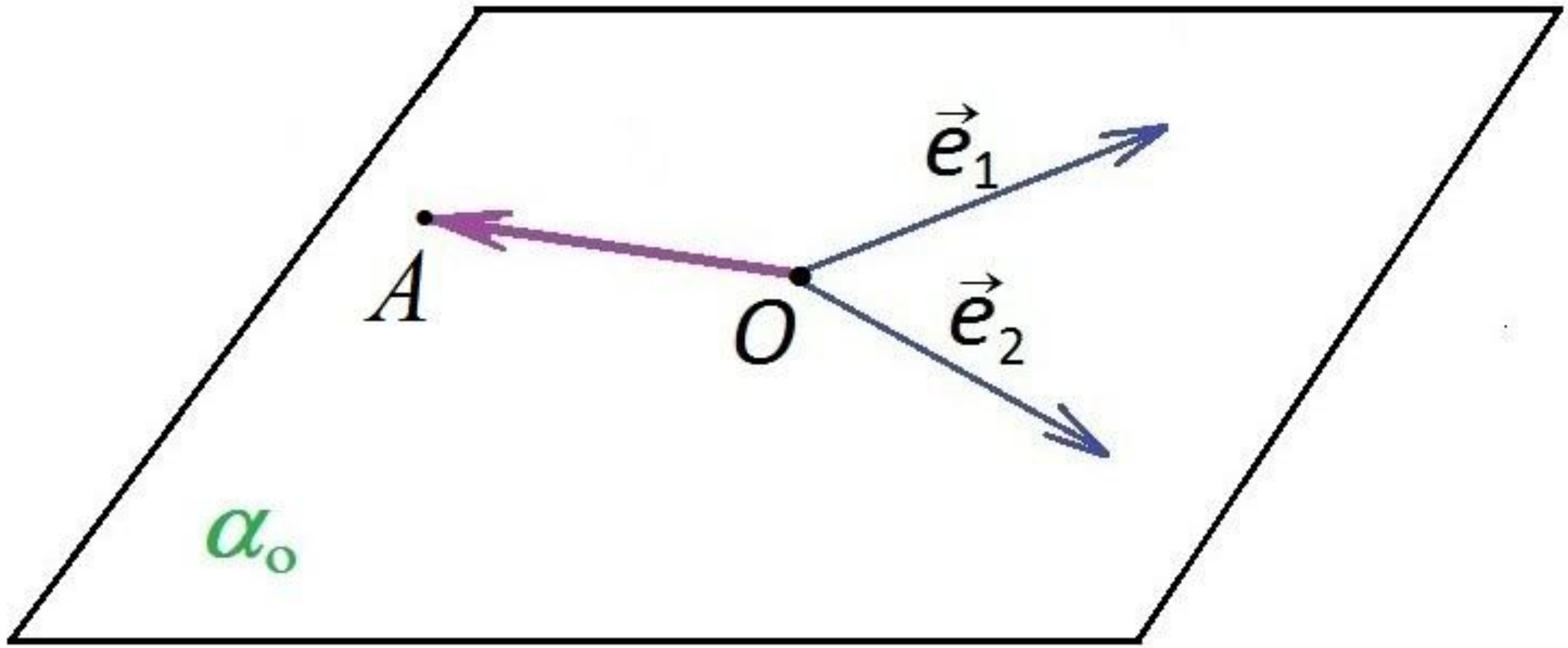
Пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства L_0.

Рассмотрим неподвижную декартову систему отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ в абсолютном пространстве E^3 и плоскость α_0 в E^3, проходящую через точку O и параллельную векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – геометрические векторы, координатные представления которых в системе S равны, соответственно, e_1 и e_2).

Пусть r_{OA} – координатный вектор точки $A \in E^3$ в системе S. Заметим, что $A \in \alpha_0 \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0$. Действительно,

$$A \in \alpha_0 \Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{OA},\ \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \in \mathcal{L}in(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{OA} \in \mathcal{L}in(e_1, e_2) = L_0 .$$


$\vec{e}_1$
A
O
$\vec{e}_2$
α_o

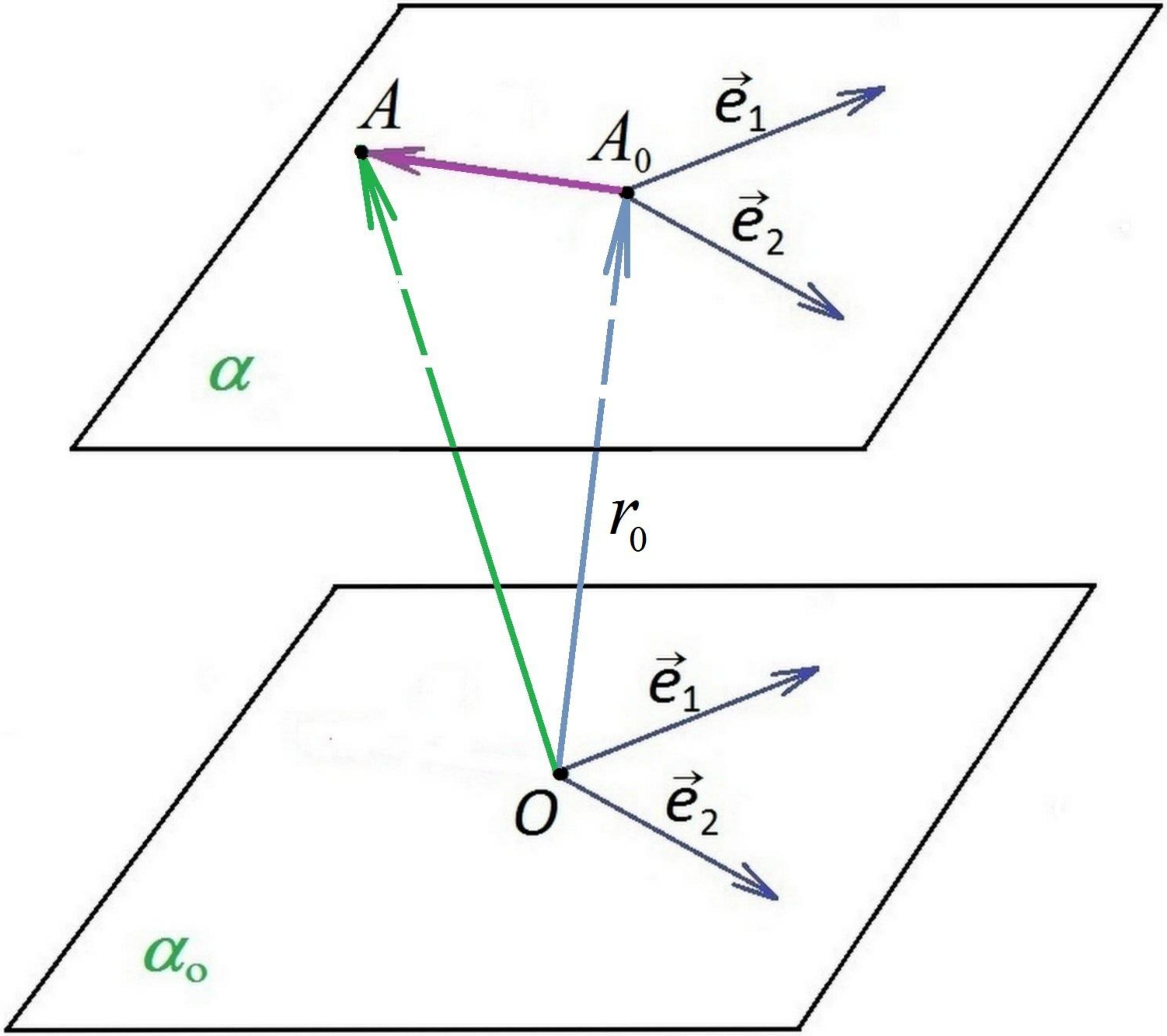
Арифметической плоскости $L_0 + r_0 \subset \mathbb{R}^3$ соответствует плоскость α в пространстве E^3, параллельная плоскости α_0 и проходящая через точку A_0, такую, что $r_{OA_0} = r_0$:

$$A \in \alpha \Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{A_0 A},\ \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0 A} \in \mathcal{L}in(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{A_0 A} \in \mathcal{L}in(e_1, e_2) = L_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_{OA} - r_{OA_0} = r_{A_0 A} \in L_0 \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_{OA_0} = L_0 + r_0 .$$

Итак, $A \in \alpha \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_0$.



A
A_0
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
α
r_0
$\vec{e}_1$
$\vec{e}_2$
O
α_0

Пусть $\mathcal{T}_A$ – арифметическая траектория точки A:

$$\mathcal{T}_A = \{\, r_{OA}(t) \mid t \in (t_1,\, t_2) \}.$$

Теорема. Движение среды Σ относительно системы S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такое двумерное подпространство L_0 в $\mathbb{R}^3$, что

$$(\forall\, A \in \Sigma)(\exists\, p_A \in \mathbb{R}^3)\,[\,\mathcal{T}_A \subset p_A + L_0\,].$$

Замечание. С геометрической точки зрения, теорема утверждает, что движение среды Σ относительно S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такая плоскость α_0, что геометрическая траектория всякой точки $A \in \Sigma$ полностью лежит в некоторой плоскости α, параллельной α_0.