

Механика деформируемого твёрдого тела

<https://vk.com/mehss>

Литература

1. Сапронова Т.Ю., Прядко И.Н.
Кинематика. Учебное пособие, 2021.
2. Маркеев А.П. *Теоретическая механика.*
Москва: ЧеРо, 1999.
3. Бухгольц Н.Н. *Основной курс
теоретической механики: в 2-х ч.*
М.: Наука, 1965.

(см. http://vk.com/t_meh)

§ 1. Пространство и время. Материальные точки. Отмеченные точки.

1. Пространство и время. Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели — *абсолютное пространство* и *абсолютное время*, существование которых постулируется. *Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого*; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Предполагается, что **абсолютное пространство** представляет собой трехмерное, однородное (*все точки пространства равноправны*) и изотропное (*все направления равноправны*) евклидово пространство. Наблюдения показывают, что для небольших по размерам областей реального физического пространства евклидова геометрия справедлива.

Абсолютное время в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. За единицу измерения времени принимается секунда. В кинематике надо еще выбрать единицу длины, например, 1 м, 1 см и т.п. Тогда основные кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение, о которых будет идти речь дальше, определяются при помощи единиц длины и времени.

2. Материальные точки. Отмеченные точки.

*Под **материальной точкой** понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы можно было пренебречь размерами частицы и ее вращением.*

Можно или нельзя принять материальный объект за материальную точку, зависит от конкретной задачи. Например, при определении положения спутника Земли в космическом пространстве очень часто целесообразно принимать его за материальную точку.

Если же рассматриваются задачи, связанные с ориентацией антенн, солнечных батарей, оптических приборов, установленных на спутнике, то его нельзя считать материальной точкой, так как в вопросах ориентации нельзя пренебрегать вращением спутника и его следует рассматривать как объект, имеющий конечные, хотя и малые по сравнению с расстоянием до Земли, размеры.

Отмеченной точкой будем называть геометрическую точку, которую каким-либо образом отметили. Например, вершина Эйфелевой башни и центр диска Луны – отмеченные точки.

Отмеченной точкой является конец отрезка длиной 1 метр, мысленно проведенного из центра некоторой прямоугольной площадки на поверхности Земли и перпендикулярного этой площадке.

Из последнего примера следует, что отмеченная точка может не быть частицей (материальной точкой).

Вообще, задание любого закона, определяющего изменение во времени координат точки относительно какой-нибудь системы отсчета, определяет отмеченную точку.

§ 2. Декартовы системы отсчета

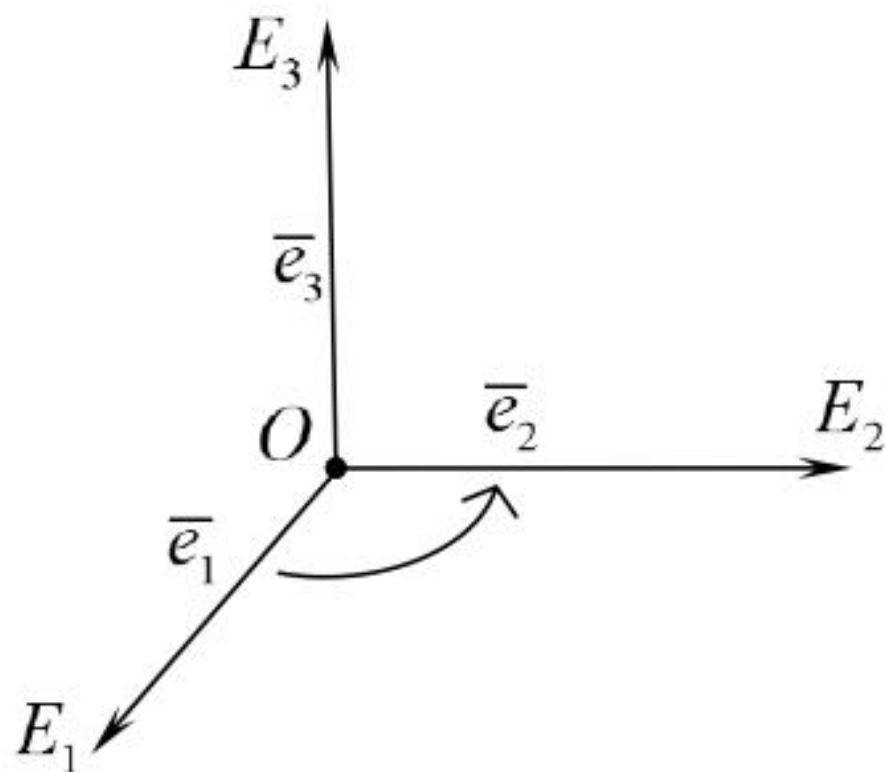
Декартовой системой отсчета (ДСО)

будем называть упорядоченную четверку отмеченных точек $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ в абсолютном пространстве E^3 , для которой в любой момент времени выполнены три условия:

1) $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = 1,$

2) $OE_i \perp OE_j \ (i \neq j),$

3) векторы $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}, \overline{OE_3}$ образуют *правую тройку*, т. е. с конца последнего из них кратчайший поворот первого до второго кажется происходящим против часовой стрелки.



Для векторов $\overline{OE_1}$, $\overline{OE_2}$, $\overline{OE_3}$ мы будем использовать обозначения $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (иногда $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ или $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$).

Положение отмеченной точки A по отношению к декартовой системе отсчета S в любой момент времени определяется ее *геометрическим радиус-вектором* \overline{OA} , который можно разложить по ортонормированному базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

$$\overline{OA} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3.$$

Коэффициенты x, y, z этого разложения представляют собой *координаты* точки A в ДСО S .

Арифметический трехмерный вектор

$$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ называют}$$

арифметическим радиус-вектором точки A
(в ДСО S),

или *координатным вектором* точки A (в
ДСО S),

или *координатным представлением*
вектора \overline{OA} (в ДСО S)

(\mathbb{R}^3 – арифметическое пространство).

Пусть V^3 – пространство геометрических (свободных) векторов. Соответствие между геометрическими и арифметическими векторами \overline{OA} и r_{OA} , задаваемое с помощью базиса $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, является изоморфизмом линейных евклидовых пространств V^3 и \mathbb{R}^3 , т.е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим линейные операции и скалярное произведение.

Геометрическим векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$
соответствуют арифметические векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Закон движения, скорость, ускорение, траектория

Рассмотрим ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и отмеченную точку A , движущуюся относительно S .

$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – арифметический радиус-вектор

точки A в ДСО S .

Пусть известны функции $f_x(t)$, $f_y(t)$, $f_z(t)$, выражающие зависимость координат точки A от времени t :

$$x = f_x(t), \quad y = f_y(t), \quad z = f_z(t). \quad (3.1)$$

Рассмотрим вектор-функцию $r(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}$.

Система уравнений (3.1) равносильна уравнению

$$r_{OA} = r(t), \quad (3.2)$$

которое называется **законом движения** точки A относительно ДСО S .

Скорость v и **ускорение** w точки A в момент t относительно ДСО S определяются равенствами:

$$v := \dot{r}(t) \left(= \frac{dr(t)}{dt} \right), \quad w := \ddot{r}(t) \left(= \frac{d^2r(t)}{dt^2} \right).$$

Множество

$$\mathcal{T} = \{r(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$$

называется **арифметической траекторией** данной точки (относительно ДСО S)

((α, β) – некоторый промежуток времени).

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее *геометрической траекторией*.

Замечание о направлении вектора скорости.

Геометрический вектор скорости, координатное

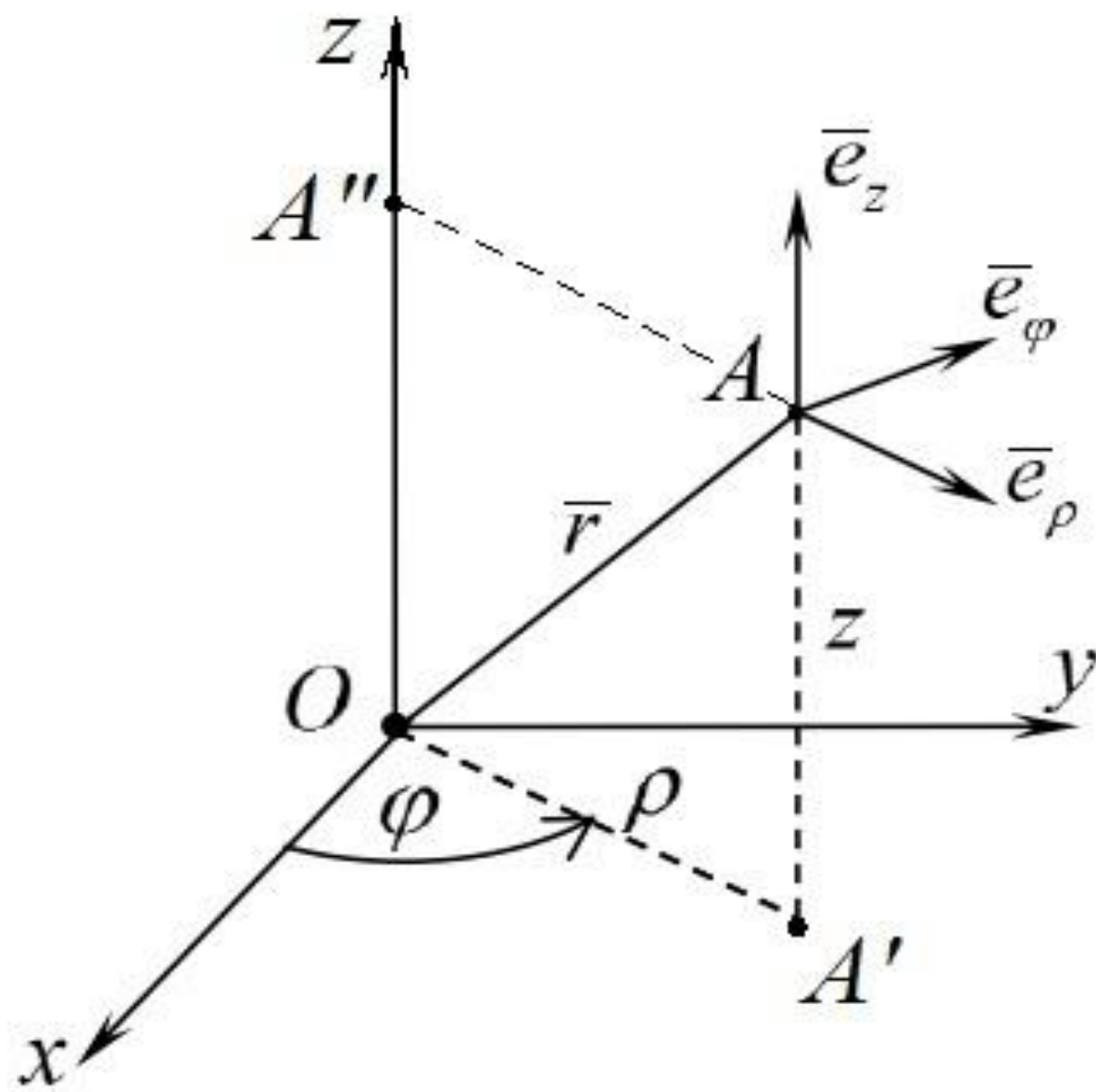
представление которого равно $\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}_x(t) \\ \dot{f}_y(t) \\ \dot{f}_z(t) \end{pmatrix},$

является *касательным вектором* к

геометрической траектории точки.

§ 4. Цилиндрическая система координат.

Рассмотрим декартову систему отсчета $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и связанную с ней ПДСК $Oxyz$. Пусть A – произвольная точка в абсолютном пространстве E^3 , A' – проекция точки A на плоскость Oxy , A'' – проекция точки A на ось Oz , φ – направленный угол между осью Oz и вектором $\overline{OA'}$ (см. рис.).



Тогда верно равенство $\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{OA''}$, которое, при переходе к соответствующим арифметическим векторам, приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''}. \quad (4.1)$$

Введем следующие обозначения : $\rho := |OA'|$,

$$e_\rho := \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $r_{OA'} = \rho e_\rho$, $r_{OA''} = ze_z$. Следовательно, в силу (4.1),

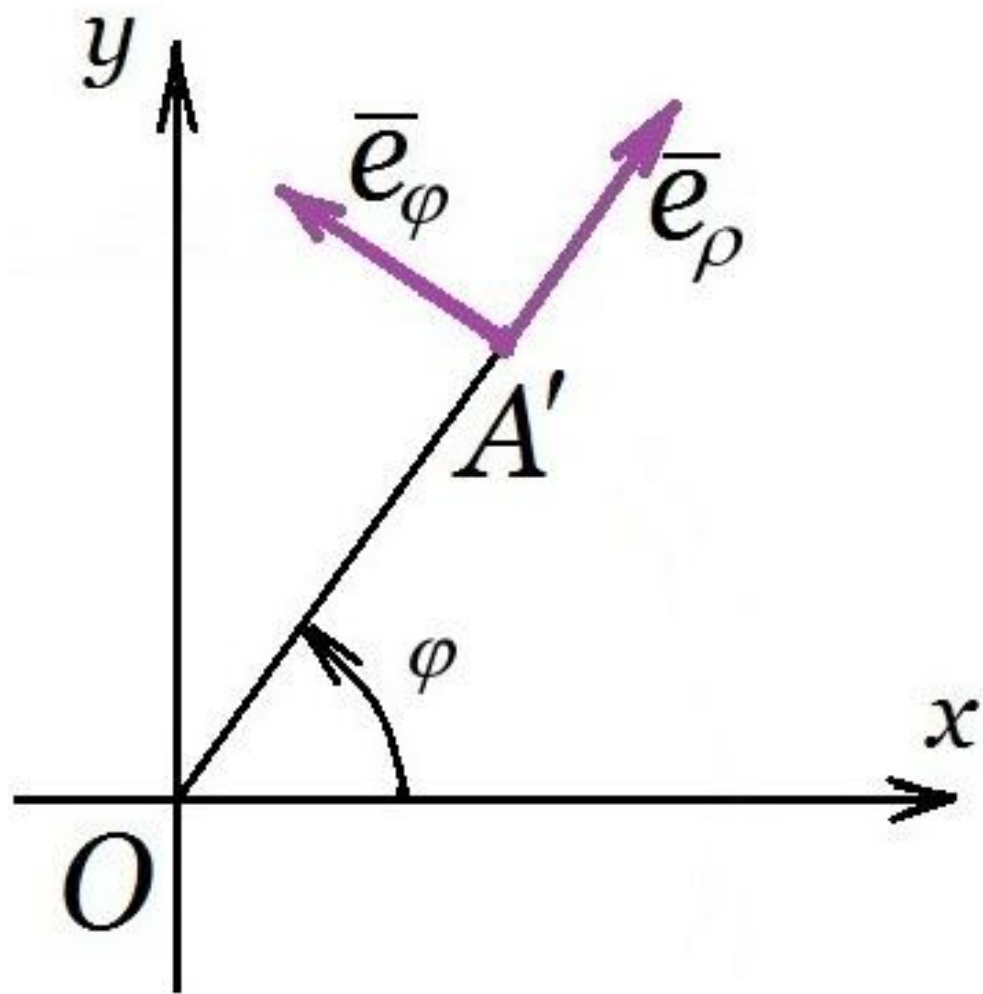
$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + ze_z. \quad (4.2)$$

Цилиндрическими координатами точки A по отношению к декартовой системе отсчета S называется упорядоченная тройка (ρ, φ, z) .

Рассмотрим еще один вектор:

$$e_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Соответствующий}$$

геометрический вектор \bar{e}_φ получается из \bar{e}_ρ поворотом на прямой угол против часовой стрелки.



Заметим, что построенные выше векторы \bar{e}_ρ , \bar{e}_φ , \bar{e}_z образуют правый ортонормированный базис (в пространстве геометрических (свободных) векторов V^3). В силу зависимости векторов \bar{e}_ρ и \bar{e}_φ от угла φ , этот базис является подвижным.

Арифметические векторы e_ρ , e_φ , e_z образуют правый ортонормированный базис в арифметическом пространстве \mathbb{R}^3 .

Пусть движение точки A задано в цилиндрической системе координат:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \quad (4.3)$$

Заметим, что при дифференцировании по переменной t имеют место следующие соотношения:

$$\dot{e}_\rho = \dot{\varphi} e_\varphi, \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_\rho. \quad (4.4)$$

Выразим скорость и ускорение точки через цилиндрические координаты ρ, φ, z и векторы e_ρ, e_φ, e_z :

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt} (\rho e_\rho + z e_z) = \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z} e_z, \quad (4.5)$$

$$w = \dot{v} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) e_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) e_\varphi + \ddot{z} e_z. \quad (4.6)$$

Поскольку векторы e_ρ, e_φ, e_z образуют правый ортонормированный базис, квадраты длин векторов v и w можно вычислить как суммы квадратов коэффициентов в разложениях (4.5), (4.6).

§ 5. Неизменяемая система, твердое тело, твердая среда

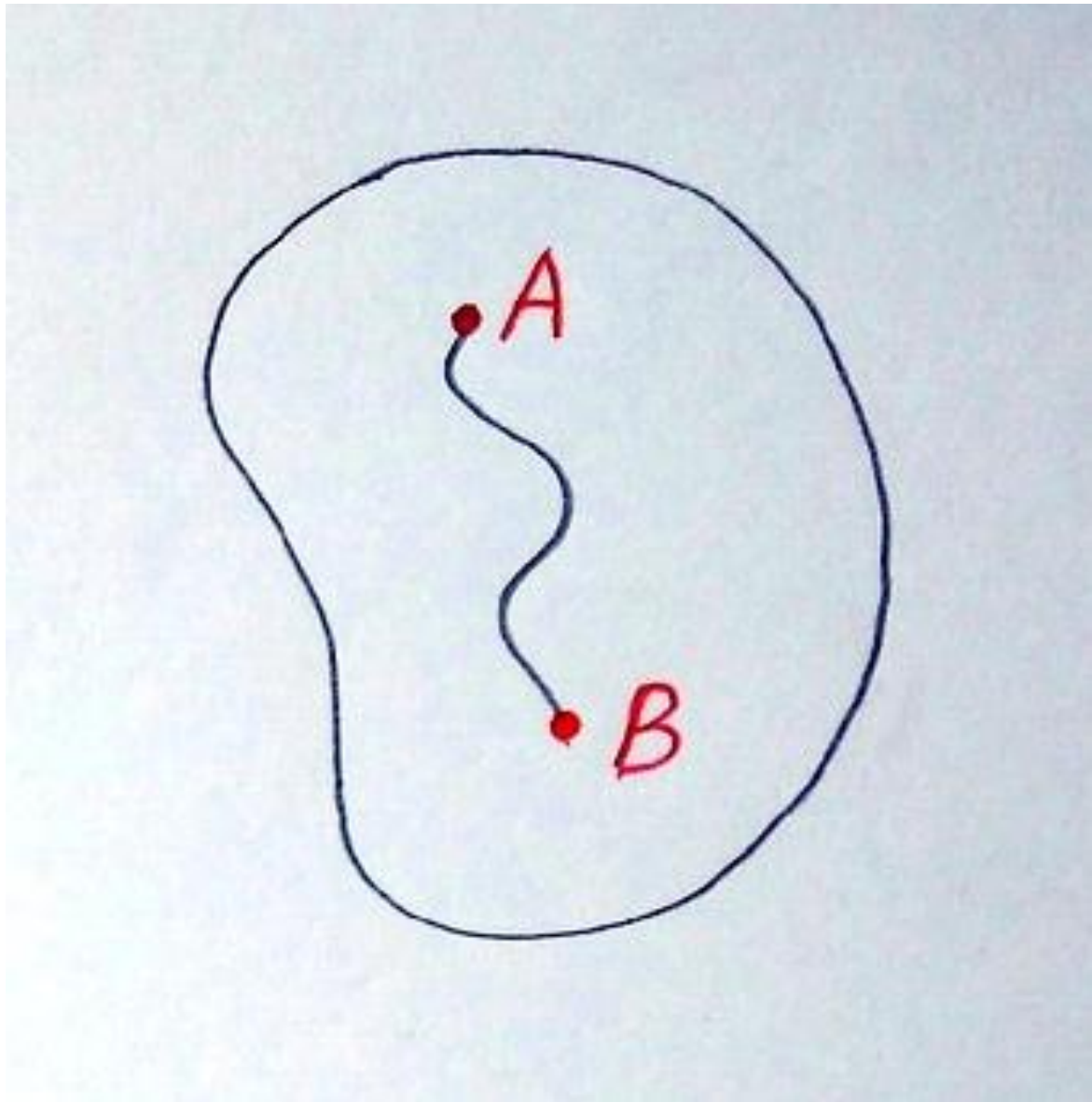
Рассмотрим некоторое множество $\{A_\alpha\}$ отмеченных точек, которое будем называть «системой».

Определение 1. Система $\{A_\alpha\}$ отмеченных точек называется *неизменяемой*, если расстояния между точками этой системы не меняются со временем.

Примеры: ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$; какая-либо система точек $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, координаты которых не изменяются со временем.

Определение 2. *Твердым телом* называется ограниченная неизменяемая система отмеченных точек.

Замечание. Иногда в определение твердого тела добавляют условие *линейной связности*: для любой пары точек из твердого тела существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и полностью лежащая в теле. В этом случае твердое тело рассматривается как континуальное множество, как «сплошная среда».



Примеры. Конечная система точек $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, координаты которых не изменяются со временем, – пример «дискретного» твердого тела (не выполняется условие линейной связности).

Шар радиуса R с центром в начале координат – пример «сплошного» твердого тела (выполняется условие линейной связности).

Определение 3. *Твердой средой* называется неизменяемая система отмеченных точек, которая в каждый момент времени заполняет собой все пространство E^3 .

Пример. Рассмотрим две декартовы системы отсчета:

«неподвижную» $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и «подвижную»

$S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$. Пусть Σ – множество отмеченных

точек, неподвижных относительно S' :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow r'_{O'M} = \text{const},$$

где $r'_{O'M} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S' .

Система точек Σ является неизменяемой и в каждый момент времени заполняет собой все пространство E^3 .

Следовательно, Σ – твердая среда. В этом случае говорят, что *твердая среда Σ неподвижна относительно*

ДСО S' , а система S' жестко связана со средой Σ .

§ 6. Векторное произведение двух векторов

1. Векторное произведение двух геометрических векторов. Пусть \vec{a} и \vec{b} – два неколлинеарных вектора. *Векторным произведением* векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} (обозначение: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), удовлетворяющий следующим двум условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$, где (\vec{a}, \vec{b}) – угол между \vec{a} и \vec{b} ,

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$,

3) тройка векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – правая.

Если \vec{a} и \vec{b} – коллинеарные векторы, то, по определению, их векторное произведение равно нулевому вектору.

Рассмотрим координатные представления векторов \vec{a} ,

\vec{b} и \vec{c} в ДСО S : $r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Тогда

верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии) :

$$r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Векторное произведение двух арифметических

векторов. Рассмотрим два арифметических вектора

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \text{ и } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \text{ Их векторное произведение } h$$

определяется следующим равенством :

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначение: $h = p \times q$.

Нетрудно убедиться, что из равенства $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ следует аналогичное равенство для координатных представлений этих векторов:

$$r_c = r_a \times r_b.$$

§ 7. Смешанное произведение трех векторов

1. Смешанное произведение трех геометрических векторов. Пусть \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} – три геометрических вектора. *Смешанным произведением* векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle,$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается скалярное произведение.

Рассмотрим координатные представления векторов

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ в ДСО } S: \quad r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии) :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Смешанное произведение трех арифметических

векторов. Для трех арифметических векторов

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad \text{их смешанное}$$

произведение определяется аналогично :

$$(h, p, q) = \langle h \times p, q \rangle.$$

Свойство смешанного произведения :

$$(h, p, q) = (p, q, h) = (q, h, p) \quad \forall h, p, q \in \mathbb{R}^3.$$

§ 8. Плоскопараллельное движение твердой среды. Определение и примеры

Пусть твердая среда Σ движется относительно неподвижной декартовой системы отсчета $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, $v_A = \dot{r}_{OA}$ – скорость точки $A \in \Sigma$ в S .

Определение. Движение среды Σ относительно системы S называется *плоскопараллельным*, если существует такое двумерное подпространство L_0 в \mathbb{R}^3 , что $(\forall A \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[v_A(t) \in L_0]$.

Подпространство L_0 называется *пространством скоростей* среды Σ .

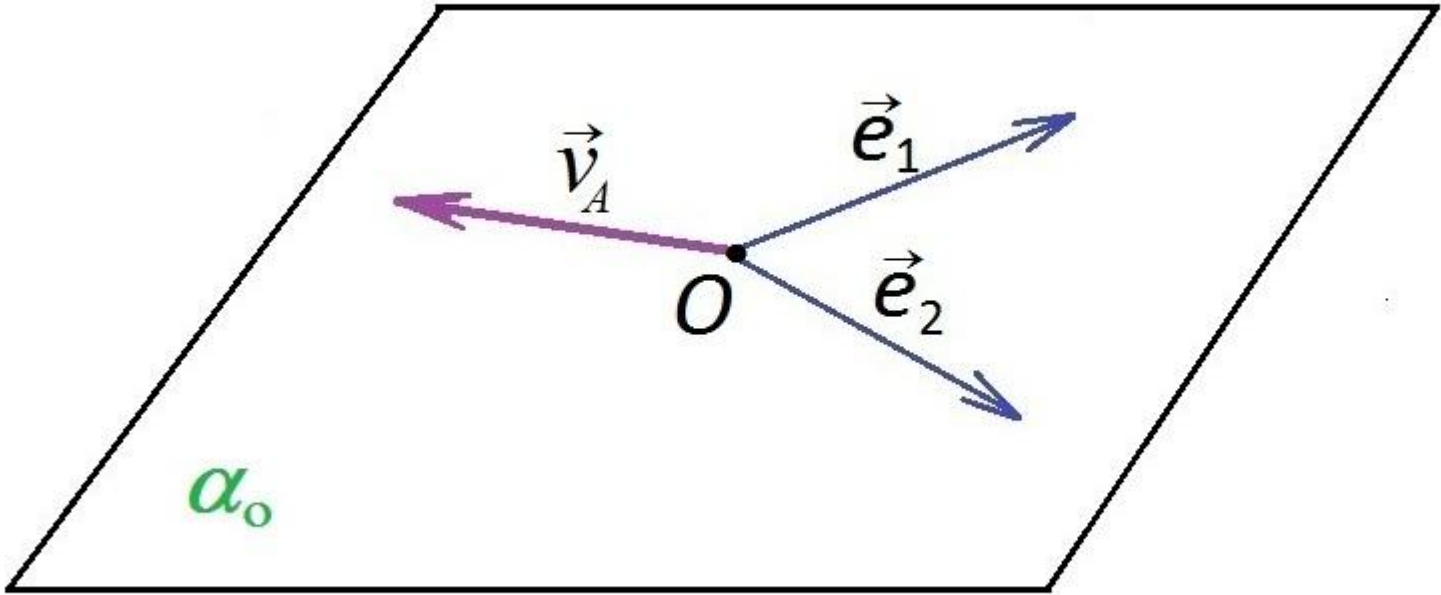
Двумерность подпространства L_0 означает, что в L_0 существуют линейно независимые векторы e_1 и e_2 , такие, что $L_0 = \mathcal{L}in(e_1, e_2)$ – линейная оболочка векторов e_1 и e_2 (то есть векторы e_1 и e_2 образуют базис в L_0). Тогда для всякой точки $A \in \Sigma$ в каждый момент времени t найдутся такие числа $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, что скорость $v_A(t) = \lambda(t)e_1 + \mu(t)e_2$.

Соответствующие геометрические векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 также линейно независимы, а следовательно, неколлинеарны.

Рассмотрим плоскость α_0 в абсолютном пространстве, проходящую через точку O и параллельную векторам \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Тогда геометрический вектор скорости точки $A \in \Sigma$

$$\vec{v}_A(t) = \lambda(t)\vec{e}_1 + \mu(t)\vec{e}_2,$$

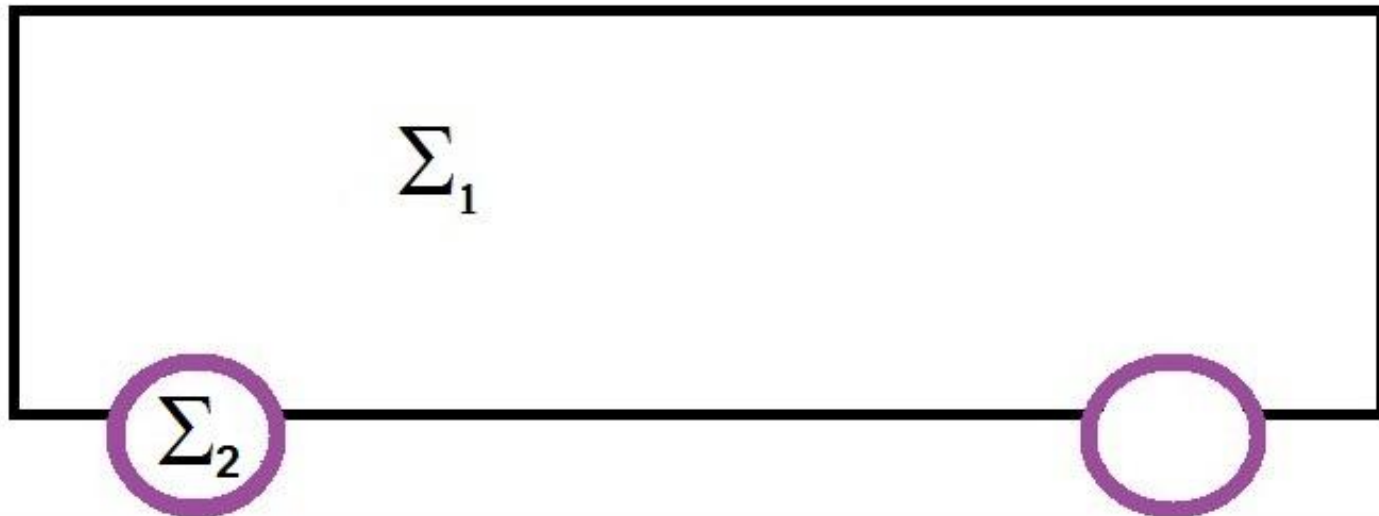
то есть вектор $\vec{v}_A(t)$ также параллелен плоскости α_0 (см. рисунок).



Плоскость α_0 называют *плоскостью скоростей* среды Σ .

Примеры. 1. Железнодорожный вагон движется по прямолинейному участку пути. В данном случае мы имеем плоскопараллельное движение разных твердых сред (см. рисунок), связанных, соответственно, с корпусом вагона (среда Σ_1) и с его колесами (среда Σ_2), так как скорости всех точек корпуса вагона и его колес «лежат» в вертикальной плоскости α_0 , параллельной рельсам и перпендикулярной поверхности земли (на данном плоском участке). При этом корпус вагона совершает движение еще более частного вида – *прямолинейное*, при котором скорости всех его точек коллинеарны фиксированной прямой (рельсам).

α_o

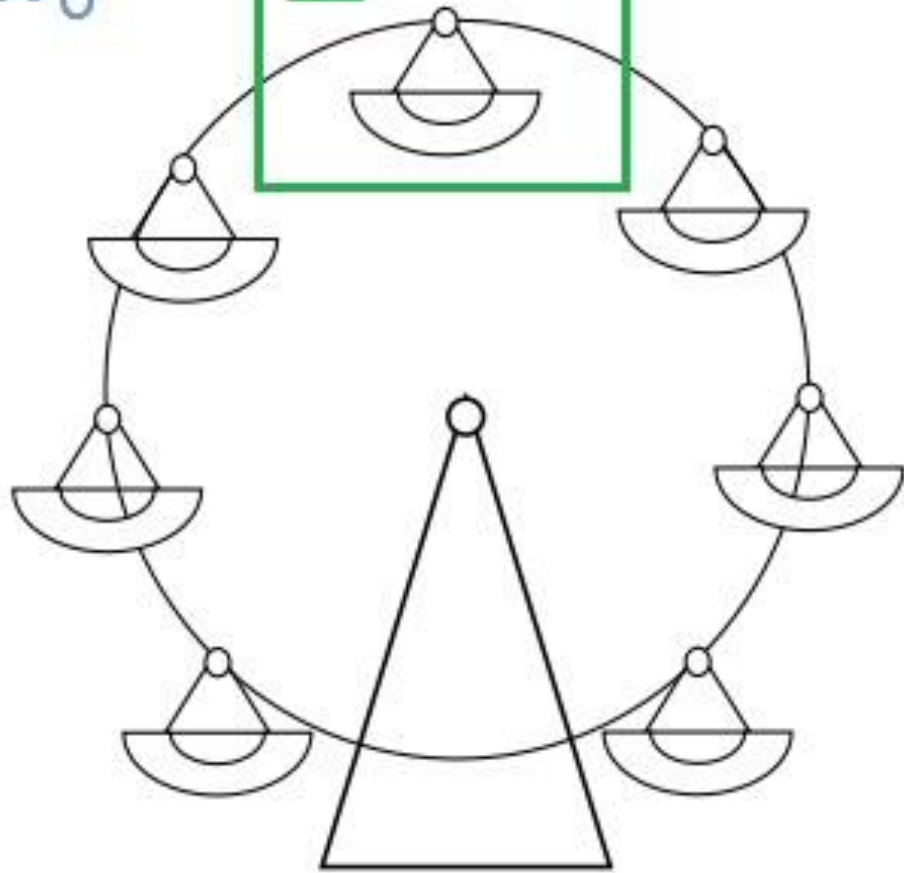


2. Движение твердой среды Σ , связанной с кабинкой «колеса обзора», является плоскопараллельным.

Плоскость скоростей α_0 – это плоскость окружности колеса (см. рисунок).

α_0

Σ



§ 9. Критерий плоскопараллельного движения твердой среды

Пусть L_0 – двумерное подпространство в \mathbb{R}^3 ,
 $r_0 \in \mathbb{R}^3$.

Множество $L_0 + r_0 = \{q + r_0 \mid q \in L_0\}$ назовем
арифметической плоскостью, *параллельной*
подпространству L_0 .

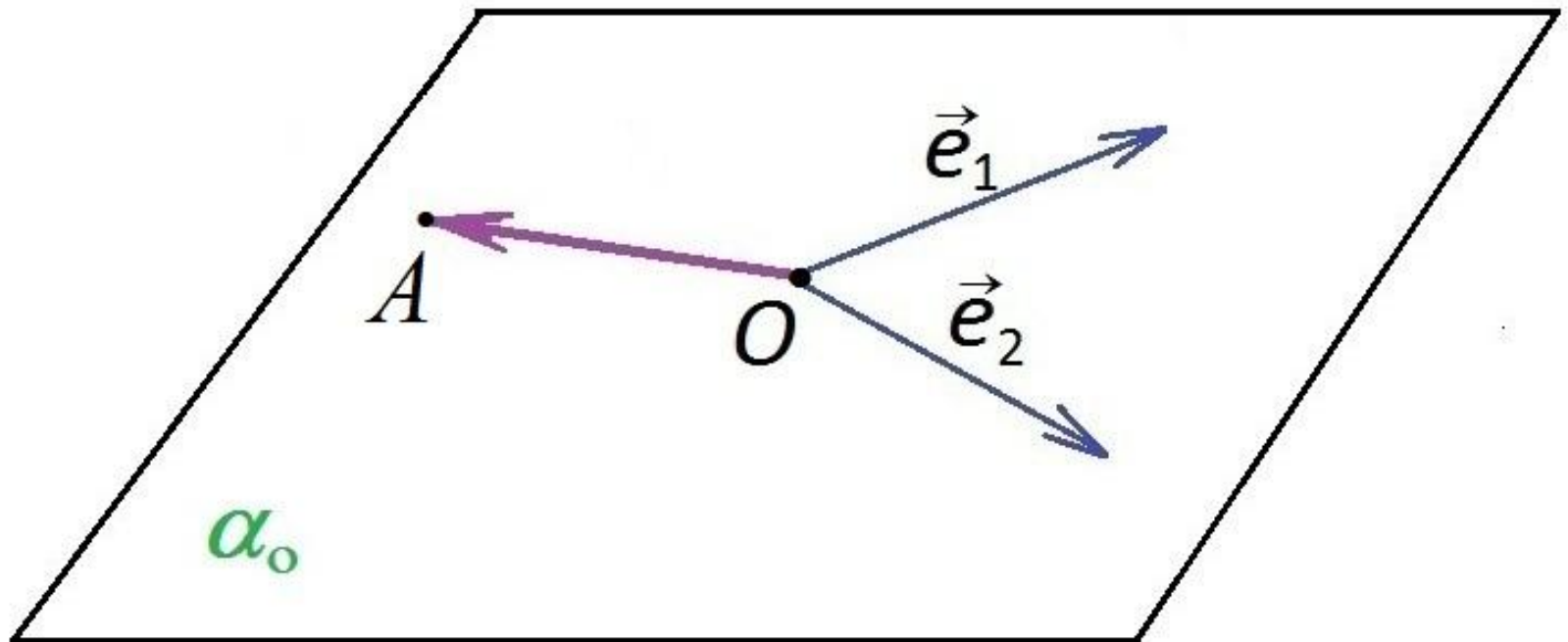
Пусть e_1 и e_2 – базисные векторы подпространства
 L_0 .

Рассмотрим неподвижную декартову систему отсчета $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ в абсолютном пространстве E^3 и плоскость α_0 в E^3 , проходящую через точку O и параллельную векторам \vec{e}_1 и \vec{e}_2 (\vec{e}_1 и \vec{e}_2 – геометрические векторы, координатные представления которых в системе S равны, соответственно, e_1 и e_2).

Пусть r_{OA} – координатный вектор точки $A \in E^3$ в системе S . Заметим, что $A \in \alpha_0 \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 A \in \alpha_0 &\Leftrightarrow \text{векторы } \overrightarrow{OA}, \vec{e}_1 \text{ и } \vec{e}_2 \text{ компланарны} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \in \mathcal{L}in(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{OA} \in \mathcal{L}in(e_1, e_2) = L_0.
 \end{aligned}$$



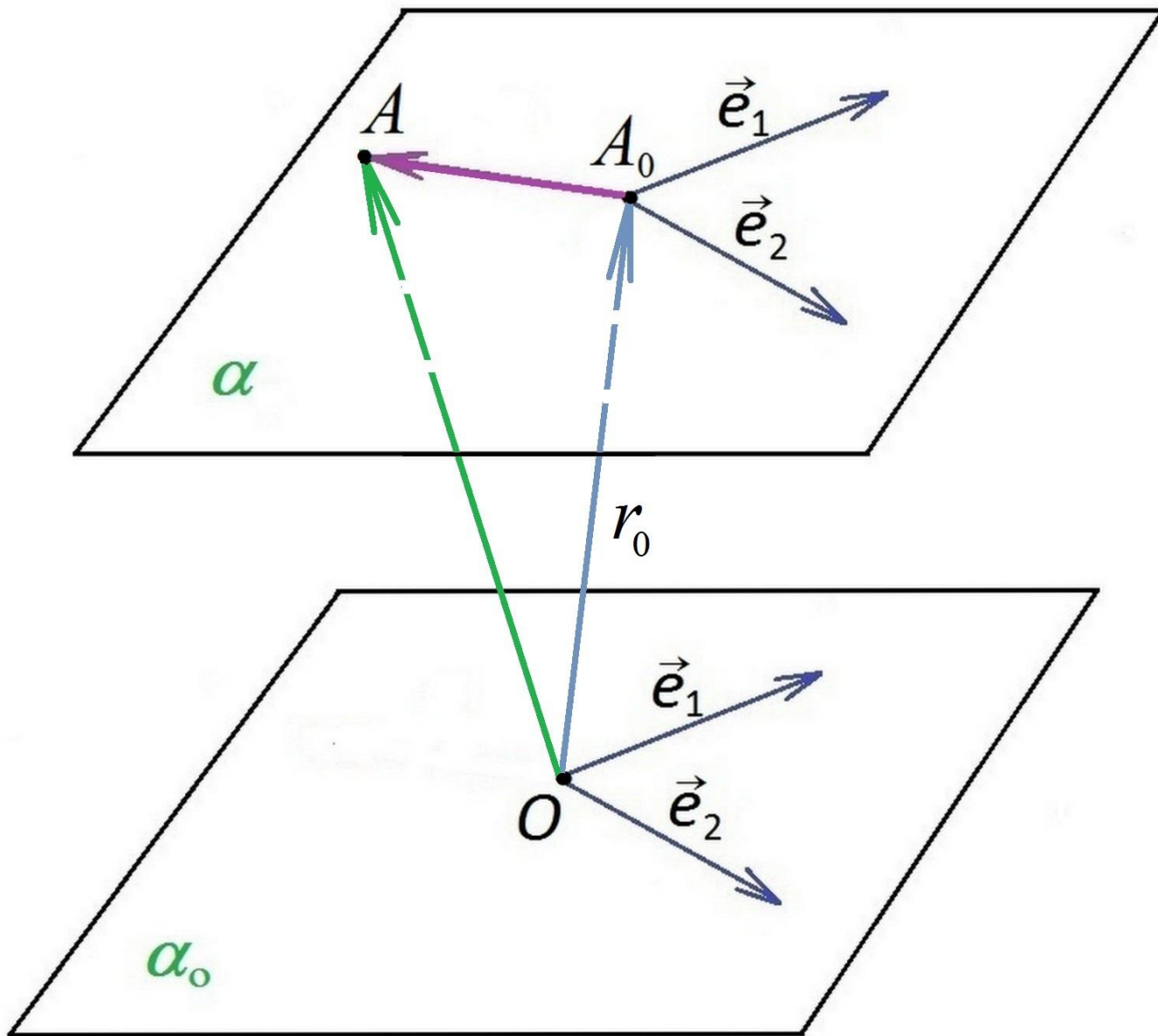
Арифметической плоскости $L_0 + r_0 \subset \mathbb{R}^3$ соответствует плоскость α в пространстве E^3 , параллельная плоскости α_0 и проходящая через точку A_0 , такую, что $r_{OA_0} = r_0$:

$A \in \alpha \Leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{A_0A}$, \vec{e}_1 и \vec{e}_2 компланарны \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_0A} \in \mathcal{L}in(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \Leftrightarrow r_{A_0A} \in \mathcal{L}in(e_1, e_2) = L_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r_{OA} - r_{OA_0} = r_{A_0A} \in L_0 \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_{OA_0} = L_0 + r_0.$

Итак, $A \in \alpha \Leftrightarrow r_{OA} \in L_0 + r_0.$



Пусть \mathcal{T}_A – арифметическая траектория точки A :

$$\mathcal{T}_A = \{ r_{O_A}(t) \mid t \in (t_1, t_2) \}.$$

Теорема. Движение среды Σ относительно системы S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такое двумерное подпространство L_0 в \mathbb{R}^3 , что

$$(\forall A \in \Sigma)(\exists p_A \in \mathbb{R}^3) [\mathcal{T}_A \subset p_A + L_0].$$

Замечание. С геометрической точки зрения, теорема утверждает, что движение среды Σ относительно S является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда существует такая плоскость α_0 , что геометрическая траектория всякой точки $A \in \Sigma$ полностью лежит в некоторой плоскости α , параллельной α_0 .

