

Свойства числовых неравенств

Число ***a*** больше числа ***b***, если разность ***a - b*** – *положительное число*.

$$a > b, \text{ если } a - b > 0$$

Число ***a*** меньше числа ***b***, если разность ***a - b*** – *отрицательное число*.

$$a < b, \text{ если } a - b < 0$$

Основные свойства числовых неравенств.

Теорема 1:

Если $a > b$, то $b < a$.

Если $a < b$, то $b > a$.

Пример:

$$10 > 3 \Rightarrow 3 < 10$$

$$1 < 100 \Rightarrow 100 > 1$$

Доказательство:

Соотношение $a > b$ означает, что $a - b > 0$. Тогда $-(a - b) < 0$.

$$\text{Т.к. } -(a - b) = -a + b = b - a \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow b < a.$$

Соотношение $a < b$ означает, что $a - b < 0$. Тогда $-(a - b) > 0$.

$$\text{Т.к. } -(a - b) = -a + b = b - a \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow b > a.$$

Основные свойства числовых неравенств.

Теорема 2:

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Пример:

$$\begin{array}{l} 5 < 9 \quad \quad 9 < 20 \\ \Rightarrow 5 < 20 \end{array}$$

Доказательство:

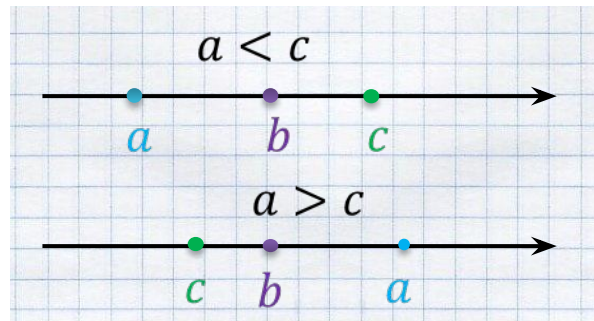
Так как $a < b$ и $b < c$, то $a - b < 0$ и $b - c < 0$.

Тогда $(a - b) + (b - c) < 0$.

$$(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c$$

$$\Rightarrow a - c < 0 \Rightarrow a < c$$

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.



Основные свойства числовых неравенств.

Теорема 3:

Если $a < b$ и c – любое число,
то $a + c < b + c$.

Доказательство:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$$

Т.к. $a < b$, то $a - b < 0$.

$$\Rightarrow (a + c) - (b + c) < 0$$

$$\Rightarrow a + c < b + c$$

Пример:

$$4 < 8$$

$$4 + (-2) < 8 + (-2) \Rightarrow 2 < 6$$

Если к обеим частям **верного неравенства** прибавить **одно и то же число**, то получится **верное неравенство**.

Основные свойства числовых неравенств.

Теорема 4:

Если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$.

Если $a < b$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$.

Доказательство:

$$ac - bc = c(a - b)$$

Т.к. $a < b$, то $a - b < 0$.

Если $c > 0$, то $c(a - b) < 0 \Rightarrow ac < bc$

Если $c < 0$, то $c(a - b) > 0 \Rightarrow ac > bc$

Пример:

$$10 < 30$$

$$3 < 5$$

$$10 \cdot 2 < 30 \cdot 2$$

$$3 \cdot (-4) > 5 \cdot (-4)$$

$$\Rightarrow 20 < 60$$

$$\Rightarrow -12 > -20$$

Если обе части **верного** неравенства **умножить** или **разделить на одно и то же положительное число**, то получится **верное** неравенство.

Если обе части **верного** неравенства **умножить** или **разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный**, то получится **верное** неравенство.

Основные свойства числовых неравенств.

Следствие:

Если a и b – положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Доказательство:

Разделим обе части неравенства $a < b$ на $ab > 0$.

$$\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b} < \frac{\cancel{b}}{a\cancel{b}} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Задание. Сравните значения выражений $k - 17y^2$ и $t - 17y^2$, зная, что $k > t$ – верное числовое неравенство.

Решение:

$$k > t$$

$$k + (-17y^2) > t + (-17y^2)$$

$$k - 17y^2 > t - 17y^2$$

Ответ: $k - 17y^2 > t - 17y^2$.

Если $a < b$ и c – любое число,
то $a + c < b + c$.

Теорема 1: Если $a > b$, то $b < a$.

Если $a < b$, то $b > a$.

Теорема 2: Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Теорема 3: Если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$.

Теорема 4: Если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$.

Если $a < b$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$.

Следствие: Если a и b – положительные числа и $a < b$, то

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$