Вероятность события и ее свойства. Правила сложения и умножения вероятностей

Преподаватель: Нургалиева А.К.

Событием называется результат некоторого опыта.

Событие называется ***случайным***, если в данном опыте оно может наступить, но может и не наступить.

Обозначение случайного события: A, B, C, ...

Событие называется ***достоверным***, если в данном опыте оно обязательно наступит.

Событие называется ***невозможным***, если в данном опыте оно наступить не может.

Событие A называется *частным случаем события* B, если при наступлении A наступает и B.

События A и B называются *равными*, если каждое из них является частным случаем другого.

Равенство событий A и B записывают: $A = B$.

Событием, противоположным событию A, называется событие $\overline{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

События называются *совместными*, если наступление одного из них не исключает наступления другого.

События называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление другого.

Вероятность события A обозначается: $P(A)$.

ВЫ ЗНАЕТЕ: Вероятность события A вычисляется по формуле:

$P(A) = \frac{m}{n}$, где m — число появлений события A при n испытаниях.

Например, вероятность события A — "выпадет "орел" и события B — "выпадет "решка" можно записать так: $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}5$, или $P(A) = 50\%$, $P(B) = 50\%$.

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность появления достоверного события равна 1.

Свойство 2. Вероятность появления невозможного события равна 0.

Свойство 3. Вероятность наступления событий, образующих полную группу, равна 1.

Свойство 4. Вероятность наступления противоположного события равна разнице между единицей и вероятностью наступления события, т. е. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Важное достоинство классического определения вероятности события состоит в том, что с его помощью вероятность события можно определить, не прибегая к опыту, а исходя из логических рассуждений.

Упражнения

10.1. При бросании игрального кубика выпадает одна из цифр от 1 до 6. Найдите вероятность события:

1) выпадет цифра 3;
2) выпадет цифра 2 или 3;
3) выпадет цифра 1 или 5;
4) выпадет нечетная цифра.

10.2. В урне 3 белых и 7 красных шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:

а) белый;
б) красный.

10.3. В урне 2 красных и 6 синих шаров. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный из урны шар окажется:

а) красный;
б) синий.

10.4. В классе 30 учащихся, из которых 6 учатся на отлично, 16 — на хорошо. Какова вероятность того, что наугад вызванный к доске учащийся:

а) отличник или ударник;
б) не является отличником?

ВЫ ЗНАЕТЕ: *Вероятность* — это характеристика степени появления некоторого события при тех или иных определенных условиях.

Вспомним утверждения о том, что:

1) если событие невозможно, то вероятность его появления равна нулю;

2) если появление события абсолютно достоверно, то его вероятность равна 1;

3) если же некоторое событие возможно, но его появление не абсолютно достоверно, то вероятностью его появления будет число, заключенное между 0 и 1.

Например, “выпадение герба” и “выпадение надписи” при бросании монеты — несовместимые события.

***Суммой А + В двух событий А и В** называют событие, состоящее в появлении события А или события В, или обоих вместе.*

В частности, если события A и B несовместимые, то $A + B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Аналогично определяется сумма нескольких событий.

Пусть события A и B — несовместимые. Обозначим вероятность появления события B через $P(B)$. Как найти вероятность $P(A + B)$ того, что наступит либо событие A, либо событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.

Теорема 1 (*сложение вероятностей несовместимых событий*).

Вероятность появления одного из двух несовместимых событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

ПРИМЕР

1. В урне находятся 30 шариков: 15 — красного цвета, 10 — синего и 5 — зеленого. Найдем вероятность того, что наугад извлеченный шарик окажется не зеленым (событие A).

Решение. Событие A наступит, если извлеченный наугад шарик окажется либо красного цвета (событие B), либо синего цвета (событие C), т. е. событие A есть сумма несовместимых событий B и C. Поэтому, применяя теорему 1, получим:

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Система событий

$$A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n \tag{1}$$

называется ***полной группой событий*** *для данного испытания, если любым исходом его является одно и только одно событие этой группы.*

Иными словами, для полной группы событий (1) должны быть выполнены следующие условия:

1) событие A_i достоверно при любом i от 1 до n;

2) события A_i и A_j попарно несовместимы, т. е. $A_i A_j = 0$ $(i \neq j)$, где 0 — событие невозможное.

Простейшим примером полной группы событий является пара событий: A и $\overline{A}$ (где $\overline{A}$ — событие, противоположное событию A).

Теорема 2. *Сумма вероятностей полной группы событий равна единице.*

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \tag{2}$$

***Произведением двух событий А и В** называют событие АВ, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.*

Например, если в ящике содержатся детали, изготовленные заводами № 1 и № 2, A — появление стандартной детали, B — деталь изготовлена заводом № 1, то AB — появление стандартной детали завода № 1.

Пусть события A и B — независимые, причем вероятности этих событий $P(A)$ и $P(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения событий A и B? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Теорема 3 (*умножение вероятностей независимых событий*).

Вероятность совместного появления двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Поясним содержание этой теоремы.

ПРИМЕР

2. Если бросить монету и игральную кость, то какова вероятность того, что монета упадет гербом вверх и вместе с тем на игральной кости выпадет пятерка?

Решение. $\frac{1}{2}$ есть вероятность появления герба и $\frac{1}{6}$ есть вероятность появления на кости пяти очков. Вероятность совмещения этих двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Упражнения

11.1. Мишень состоит из трех концентрических кругов, образующих три зоны: круг (I) и два кольца (II и III). Вероятность того, что попадание будет в зонах I, II и III, равна, соответственно, 0,45; 0,30; 0,15. Какова вероятность того, что пуля попадет в мишень?

11.2. Вероятность того, что день будет ясным: $p = 0{,}75$. Найдите вероятность q того, что день будет облачным.

11.3. На заочное отделение университета поступают контрольные работы из городов A, B и C. Вероятность поступления из города A равна 0,6, из города B — 0,1. Найдите вероятность того, что очередная работа поступит из города C.

11.4. Подбросили две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется больше пяти?