$$y=\log_a x$$

Логарифмические неравенства

Сегодня на уроке

1. Вспомним, какую функцию называют логарифмической.
2. Вспомним свойства логарифмической функции.
3. Научимся решать логарифмические неравенства.

Вспомним

Логарифмической функцией называют функцию вида $y = \log_a x$,
где a – заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел.

2. Множество значений – это множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

3. Не является ограниченной.

4. Возрастает на промежутке $(0;\ +\infty)$, если $a > 1$;
   убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$, если $0 < a < 1$.

5. Если $a > 1$, то функция принимает положительные значения при $x > 1$,
а отрицательные – при $0 < x < 1$;
если $0 < a < 1$, то функция принимает положительные значения при $0 < x < 1$,
а отрицательные – при $x > 1$.

Логарифмические неравенства

Рассматривали неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geq b$.

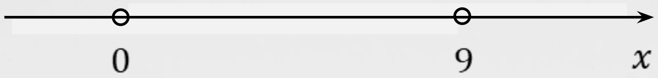
$\log_3 x < 2$,

$2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$,

$\log_3 x < \log_3 9$,

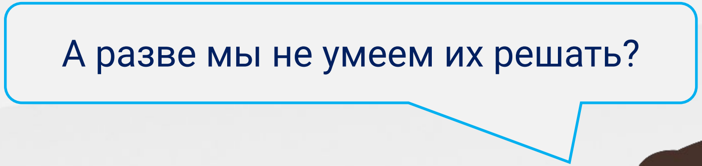
$y = \log_3 x$ определена при $x > 0$
и возрастает, так как $3 > 1$.

Тогда $\log_3 x < \log_3 9$ выполняется при $x > 0$ и $x < 9$.



$0 < x < 9$

Ответ: $0 < x < 9$.



Логарифмические неравенства

Будем решать неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве возрастания и убывания логарифмической функции.

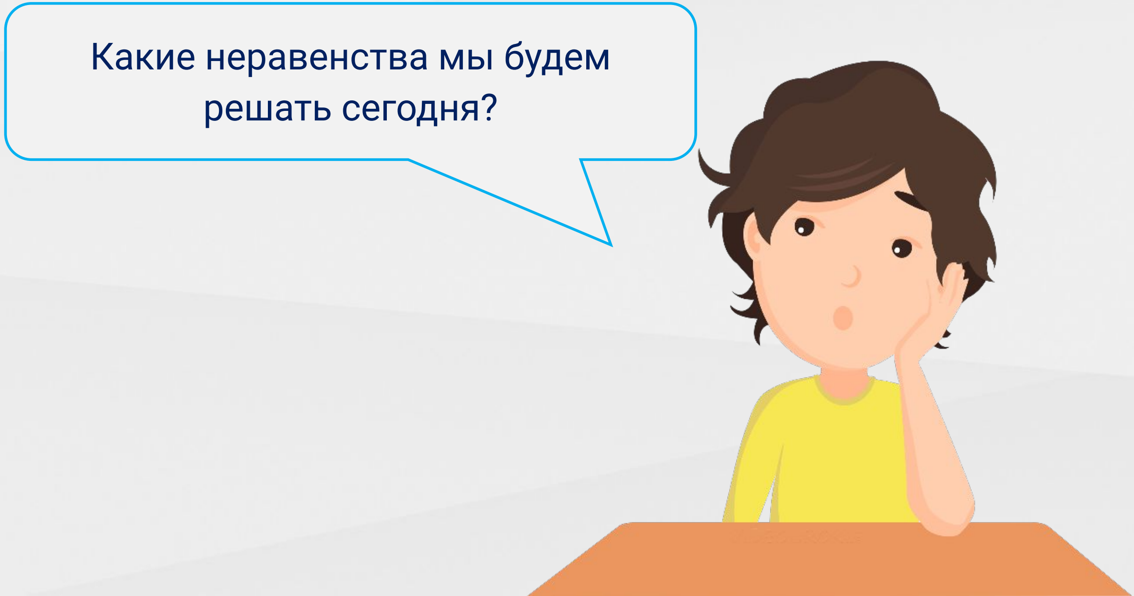
$y = \log_a x$
Возрастает на промежутке $(0;\ +\infty)$, если $a > 1$;
убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$, если $0 < a < 1$.

Если $0 < a < 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Если $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$



Логарифмические неравенства

$\log_4(x-2) < 2,$

$2 = \log_4 4^2 = \log_4 16,$

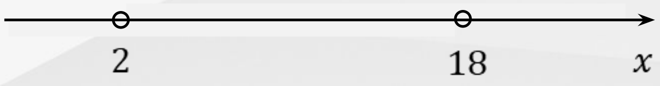
$\log_4(x-2) < \log_4 16,$

$4 > 1,$

$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-2 < 16, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x < 18. \end{cases}$

Если $\boldsymbol{a > 1}$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$



$2 < x < 18$

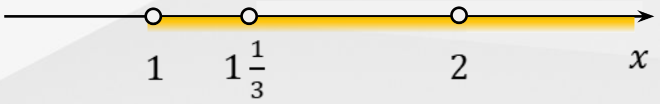
Ответ: $2 < x < 18.$

Логарифмические неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2),$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1,$$

$$\begin{cases} 3x-4>0, \\ x-2>0, \\ 3x-4>x-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x>1\frac{1}{3}, \\ x>2, \\ 2x>2, \end{cases} \quad \begin{cases} x>1\frac{1}{3}, \\ x>2, \\ x>1. \end{cases}$$

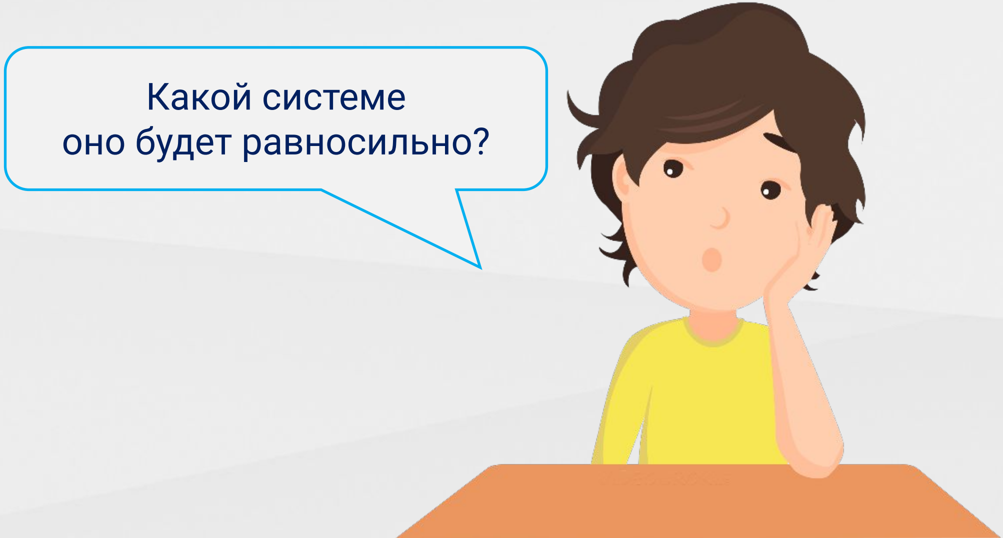


$$x > 2$$

Ответ: $x > 2$.

Если $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$



Логарифмические неравенства

$\log_{\frac{1}{8}}(x^2-4x+3) \le -1,$

$-1 = \log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{8}} 8,$

$\log_{\frac{1}{8}}(x^2-4x+3) \le \log_{\frac{1}{8}} 8,$

$0 < \frac{1}{8} < 1,$

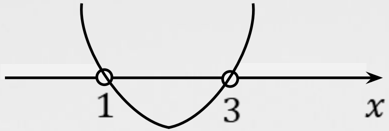
$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-4x+3 \ge 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-4x-5 \ge 0, \end{cases}$

$x^2-4x+3>0,$

$x^2-4x+3=0,$

$x_1+x_2=4, \; x_1x_2=3,$

$x_1=1, \; x_2=3.$



$x<1, \; x>3.$

$x^2-4x-5 \ge 0,$

$x^2-4x-5=0,$

$x_1+x_2=4, \; x_1x_2=-5,$

$x_1=-1, \; x_2=5.$

$x \le -1, x \ge 5.$

Если $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$:

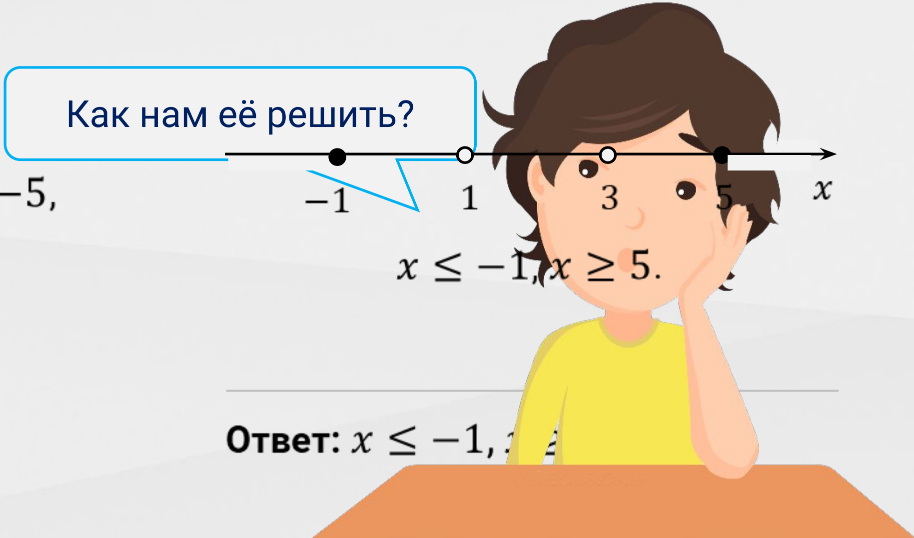
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g(x). \end{cases}$

Теорема Виета

$x^2+px+q=0,$

$x_1+x_2=-p,$

$x_1x_2=q$



$x \le -1, x \ge 5.$

Ответ: $x \le -1,$ ...

Задание

Решите неравенства:

а) $\lg(3x-7) \geq \lg(x+1)$; б) $\log_6(x-4)+\log_6(x+1) \leq 2$; в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2$.

Решение:

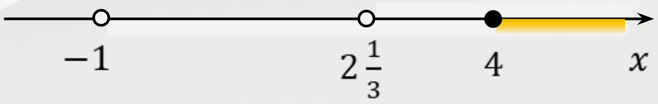
а) $\lg(3x-7) \geq \lg(x+1)$,

$10 > 1$,

$$\begin{cases} 3x-7>0, \\ x+1>0, \\ 3x-7 \geq x+1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>7, \\ x>-1, \\ 3x-x \geq 1+7, \end{cases} \quad \begin{cases} x>2\frac{1}{3}, \\ x>-1, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Если $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)>g(x). \end{cases}$$



$x \geq 4$

Ответ: $x \geq 4$.

Задание

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Решите неравенства:

а) $\lg(3x-7) \geq \lg(x+1)$; б) $\log_6(x-4) + \log_6(x+1) \leq 2$; в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2$.

Решение:

б) $\log_6(x-4) + \log_6(x+1) \leq 2,$

$\log_6\big((x-4)(x+1)\big) \leq 2,$

$2 = \log_6 6^2 = \log_6 36,$

$\log_6\big((x-4)(x+1)\big) \leq \log_6 36;$

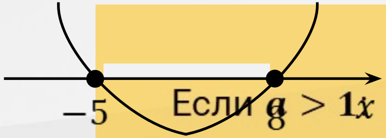
$6 > 1,$

$$\begin{cases} x-4>0, \\ x+1>0, \\ (x-4)(x+1) \leq 36, \end{cases} \quad \begin{cases} x>4, \\ x>-1, \\ x^2-3x-40 \leq 0. \end{cases}$$

$x^2 - 3x - 40 = 0,$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 169,$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{169}}{2 \cdot 1} = 8, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{169}}{2 \cdot 1} = -5.$



Если $a > 1$

$-5 \leq x \leq 8$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

$4 < x \leq 8$

Ответ: $4 < x \leq 8$.

Задание

Решите неравенства:

а) $\lg(3x-7) \geq \lg(x+1)$; б) $\log_6(x-4)+\log_6(x+1) \leq 2$; в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2$.

Решение:

в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2,$

$\lg^2 x - \lg x - 2 \geq 0, x > 0.$

Пусть $t = \lg x$, тогда

$t^2 - t - 2 \geq 0,$

$t^2 - t - 2 = 0,$

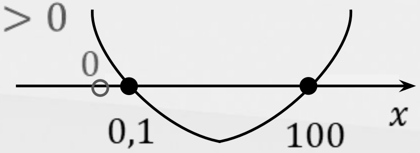
$t_1 + t_2 = 1, t_1 t_2 = -2,$

$t_1 = -1,\ t_2 = 2.$

$\lg x = -1,\ x_1 = 10^{-1} = 0{,}1;$

$\lg x = 2,\ x_2 = 10^2 = 100.$

$x > 0$



$0 < x \leq 0{,}1;\ x \geq 100.$

Теорема Виета

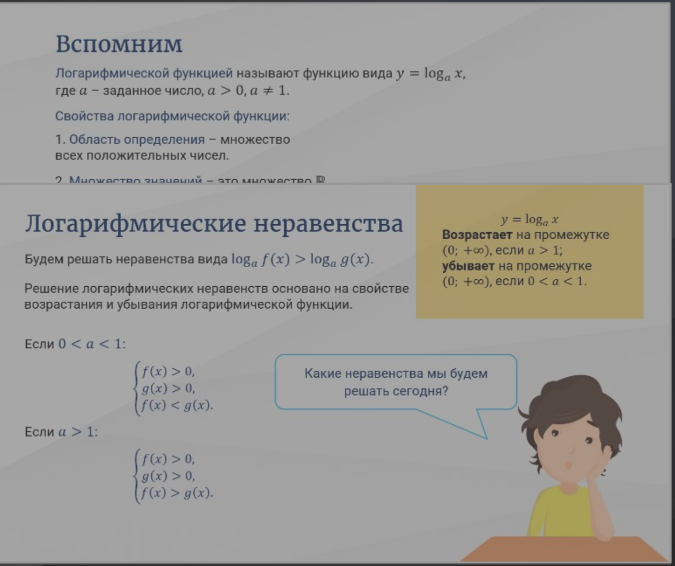
$x^2 + px + q = 0,$

$x_1 + x_2 = -p,$

$x_1 x_2 = q.$

Ответ: $0 < x \leq 0{,}1; x \geq 100.$

Итоги урока



Вспомним

Логарифмической функцией называют функцию вида $y = \log_a x$,
где a – заданное число, $a > 0, a \neq 1$.

Логарифмические неравенства

Будем решать неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве возрастания и убывания логарифмической функции.

$y = \log_a x$
Возрастает на промежутке $(0;\ +\infty)$, если $a > 1$;
убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$, если $0 < a < 1$.

Если $0 < a < 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Если $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$