

$$y = \log_a x$$

Логарифмические
неравенства

Сегодня на уроке

1. Вспомним, какую функцию называют логарифмической.
2. Вспомним свойства логарифмической функции.
3. Научимся решать логарифмические неравенства.

Вспомним

Логарифмической функцией называют функцию вида $y = \log_a x$, где a – заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел.
2. Множество значений – это множество \mathbb{R} всех действительных чисел.
3. Не является ограниченной.
4. Возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, если $a > 1$;
убывает на промежутке $(0; +\infty)$, если $0 < a < 1$.
5. Если $a > 1$, то функция принимает положительные значения при $x > 1$, а отрицательные – при $0 < x < 1$;
если $0 < a < 1$, то функция принимает положительные значения при $0 < x < 1$, а отрицательные – при $x > 1$.

Логарифмические неравенства

Рассматривали неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geq b$.

$$\log_3 x < 2,$$

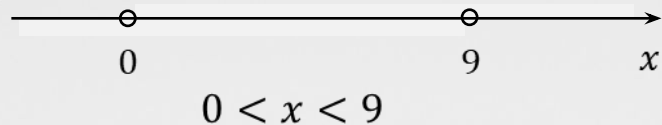
$$2 = \log_3 3^2 = \log_3 9,$$

$$\log_3 x < \log_3 9,$$

$y = \log_3 x$ определена при $x > 0$

и возрастает, так как $3 > 1$.

Тогда $\log_3 x < \log_3 9$ выполняется при $x > 0$ и $x < 9$.



Ответ: $0 < x < 9$.

А разве мы не умеем их решать?



Логарифмические неравенства

Будем решать неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве возрастания и убывания логарифмической функции.

$$y = \log_a x$$

Возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, если $a > 1$;

убывает на промежутке $(0; +\infty)$, если $0 < a < 1$.

Если $0 < a < 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Если $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Какие неравенства мы будем решать сегодня?



Логарифмические неравенства

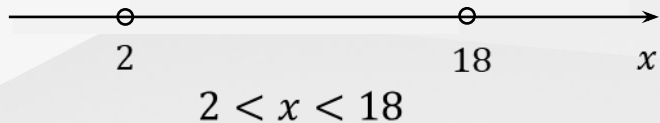
$$\log_4(x - 2) < 2,$$

$$2 = \log_4 4^2 = \log_4 16,$$

$$\log_4(x - 2) < \log_4 16,$$

$$4 > 1,$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0, & \begin{cases} x > 2, \\ x < 18. \end{cases} \\ x - 2 < 16, \end{cases}$$



Ответ: $2 < x < 18$.

Если $a > 1$:

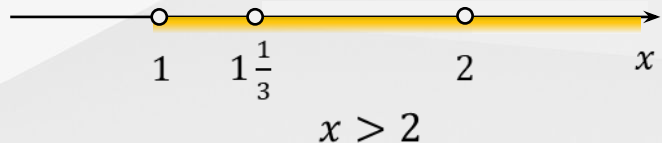
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Логарифмические неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}}(x - 2),$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1,$$

$$\begin{cases} 3x - 4 > 0, \\ x - 2 > 0, \\ 3x - 4 > x - 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1\frac{1}{3}, \\ x > 2, \\ 2x > 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1\frac{1}{3}, \\ x > 2, \\ x > 1. \end{cases}$$



Ответ: $x > 2$.

Если $0 < a < 1$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Какой системе
оно будет равносильно?



Логарифмические неравенства

$$\log_{\frac{1}{8}}(x^2 - 4x + 3) \leq -1,$$

$$-1 = \log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{8}} 8,$$

$$\log_{\frac{1}{8}}(x^2 - 4x + 3) \leq \log_{\frac{1}{8}} 8,$$

$$0 < \frac{1}{8} < 1,$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0, \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 x_2 = 3,$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$



$$x < 1, \quad x > 3.$$

$$x^2 - 4x - 5 \geq 0,$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 x_2 = -5,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 5.$$



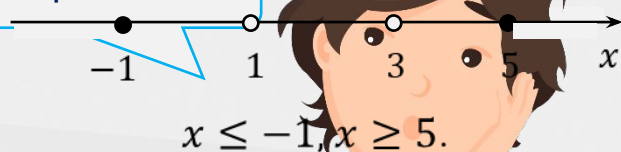
$$x \leq -1, \quad x \geq 5.$$

Если $0 < a < 1$:

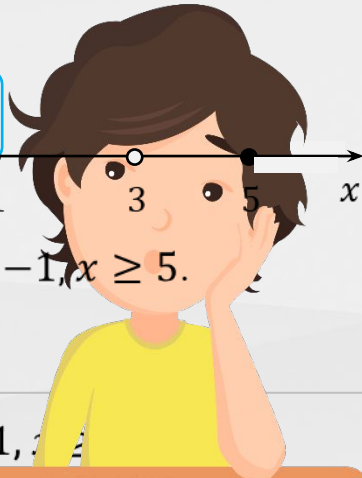
Теорема Виета

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Как нам её решить?



Ответ: $x \leq -1, x \geq 5.$



Задание

Решите неравенства:

а) $\lg(3x - 7) \geq \lg(x + 1)$; б) $\log_6(x - 4) + \log_6(x + 1) \leq 2$; в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2$.

Решение:

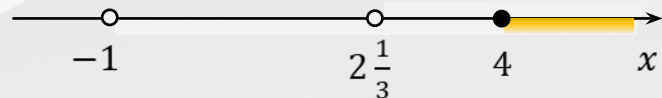
а) $\lg(3x - 7) \geq \lg(x + 1)$,

$$10 > 1,$$

$$\begin{cases} 3x - 7 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ 3x - 7 \geq x + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 7, \\ x > -1, \\ 3x - x \geq 1 + 7, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2\frac{1}{3}, \\ x > -1, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Если $a > 1$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$



$$x \geq 4$$

Ответ: $x \geq 4$.

Задание

Решите неравенства:

а) $\lg(3x - 7) \geq \lg(x + 1)$; б) $\log_6(x - 4) + \log_6(x + 1) \leq 2$; в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2$.

Решение:

$$\text{б) } \log_6(x - 4) + \log_6(x + 1) \leq 2,$$

$$\log_6((x - 4)(x + 1)) \leq 2,$$

$$2 = \log_6 6^2 = \log_6 36,$$

$$\log_6((x - 4)(x + 1)) \leq \log_6 36;$$

$$6 > 1,$$

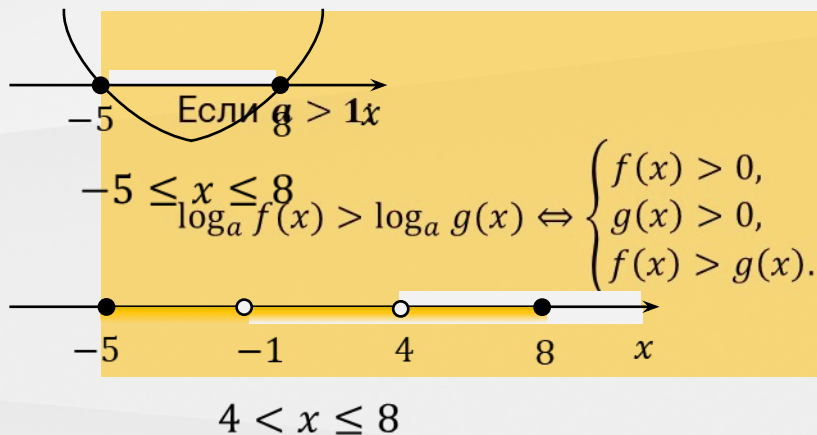
$$\begin{cases} x - 4 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ (x - 4)(x + 1) \leq 36, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x > -1, \\ x^2 - 3x - 40 \leq 0. \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0,$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 169,$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = 8, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = -5.$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$



Ответ: $4 < x \leq 8$.

Задание

Решите неравенства:

а) $\lg(3x - 7) \geq \lg(x + 1)$; б) $\log_6(x - 4) + \log_6(x + 1) \leq 2$; в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2$.

Решение:

в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2$,

$$\lg^2 x - \lg x - 2 \geq 0, x > 0.$$

Пусть $t = \lg x$, тогда

$$t^2 - t - 2 \geq 0,$$

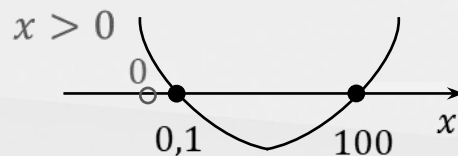
$$t^2 - t - 2 = 0,$$

$$t_1 + t_2 = 1, t_1 t_2 = -2,$$

$$t_1 = -1, t_2 = 2.$$

$$\lg x = -1, x_1 = 10^{-1} = 0,1;$$

$$\lg x = 2, x_2 = 10^2 = 100.$$



$$0 < x \leq 0,1; x \geq 100.$$

Теорема Виета

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = q.$$

Ответ: $0 < x \leq 0,1; x \geq 100$.

Итоги урока

Вспомним

Логарифмической функцией называют функцию вида $y = \log_a x$, где a – заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел.

2. Множество значений – это множество \mathbb{R} .

Логарифмические неравенства

Будем решать неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве возрастания и убывания логарифмической функции.

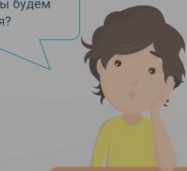
Если $0 < a < 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Если $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Какие неравенства мы будем решать сегодня?



$y = \log_a x$
Возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, если $a > 1$;
убывает на промежутке $(0; +\infty)$, если $0 < a < 1$.

Вспомним

Логарифмической функцией называют функцию вида $y = \log_a x$, где a – заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмические неравенства

Будем решать неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Решение логарифмических неравенств основано на свойстве возрастания и убывания логарифмической функции.

Если $0 < a < 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Если $a > 1$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Какие неравенства мы будем решать сегодня?



$y = \log_a x$
Возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, если $a > 1$;
убывает на промежутке $(0; +\infty)$, если $0 < a < 1$.