Элементы аналитической механики

Можно выделить 2 уже известных нам способа решения задач динамики:

1) ***Составление дифференциальных уравнений*** – приходится расчленять систему, что увеличивает число диф. уравнений и неизвестных реакций (вводятся реакции связей), определение которых не всегда требуется по условиям задачи.
2) ***Использование теорем динамики и следствий из них*** – бывает невозможно определённо сказать, какую теорему лучше использовать для более быстрого решения задачи.

Аналитическая механика дает общие методы составления диф. уравнений движения, не вводя реакций идеальных связей. Эти методы разработаны в процессе теоретических исследований различных новых механизмов и изредка используются в практических инженерных расчётах.

1. Связи

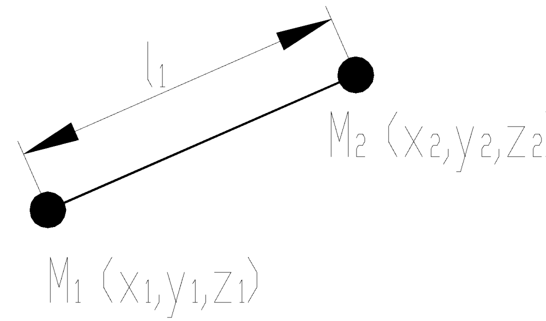
Свободная система материальных точек – это система, в которой положения отдельных её точек и их скорости могут принимать произвольные значения (в противном случае система несвободна).

Ограничения, накладываемые на координаты и (или) скорости отдельных точек называются ***связями***.

Связи записываются в виде уравнений или неравенств. Конструктивно связи могут быть выполнены в виде шарниров, стержней, нитей, направляющих, поверхностей и т.д.

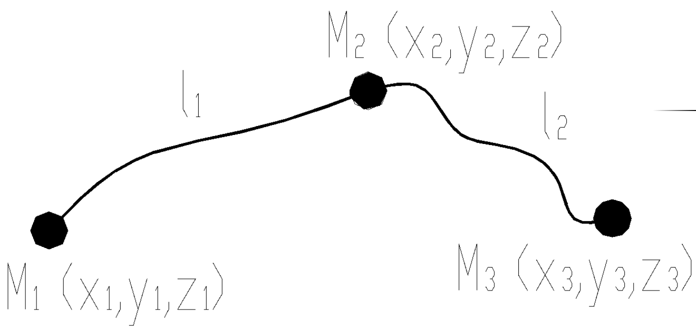
Примеры:

1) Две материальные точки соединены жёстким стержнем длиной l_1.



$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_1^2$$

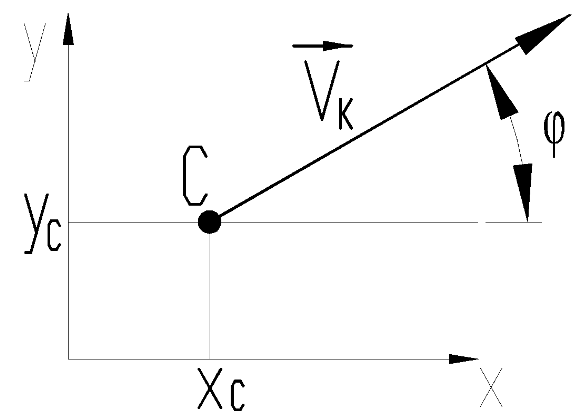
2) Три материальные точки связаны нерастяжимыми нитями длиной l_1 и l_2.



$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \le l_1^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 \le l_2^2 \end{cases}$$

3) Конёк движется по поверхности льда. Выпуклое лезвие конька касается поверхности льда в одной точке.

Положение конька в плоскости льда может быть любое, но скорость точки касания конька со льдом направлена вдоль конька.



$$\frac{\dot{y}_C}{\dot{x}_C} = tg\varphi \qquad \dot{y}_C - \dot{x}_C \cdot tg\varphi = 0$$

Классификация связей:

1) Голономные – в их уравнении связей нет производных от координат по времени *t.* Остальные связи являются *неголономными*.

2) Стационарные – если в уравнение голономной связи не входит явно время *t*. Если время *t* входит, то такая связь *нестационарная*.

3) Удерживающие – описываются при помощи уравнений. При помощи неравенств описываются *неудерживающие* связи.

2. Возможные перемещения для голономных систем

Пусть материальная точка перемещается по поверхности (уравнение связи):

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

При $t = t_0$ точка имеет координаты $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Возможный закон перемещения точки с учётом уравнения (1) можно задать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \\ z = z(\tau) \end{cases} \qquad (2)$$

Где τ – некоторый параметр. Функции (2) должны обращать уравнение (1) в тождество по параметру τ:

$$f[x(\tau), y(\tau), z(\tau)] \equiv 0 \qquad (3)$$

Вычислим полный дифференциал от тождества (3) и подставим значения координат (x_0, y_0, z_0). Получим уравнение, которому должны удовлетворять дифференциалы координат точки M.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz = 0 \qquad (4)$$

Среди всех возможных перемещений точки *M* реализуется только одно действительное, определяемое действующими силами. Чтобы отличить возможные перемещения от действительных, дифференциалы возможных перемещений обозначают: $\delta x, \delta y, \delta z$. Тогда уравнение (5) запишется в виде:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0 \qquad (5)$$

$\delta x, \delta y, \delta z$ – *вариации координат точки*.

Уравнение (5) – *варьированное уравнение связи*.

$(\delta x, \delta y, \delta z) = \delta \bar{r}$ - вектор возможных перемещений точки *M* из положения *M*₀.

Этот вектор направлен по касательной к кинематически возможной траектории точки *M*. Уравнение (5) можно записать в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\delta \bar{r} \cdot (\overline{grad\, f})_0 = 0 \qquad (6)$$

$\overline{grad\, f}$ направлен по нормали к поверхности, описываемой уравнением

$f(x, y, z) = 0$

Геометрический смысл уравнения (6) – вектор $\delta \bar{r}$ перпендикулярен к нормали, проведенной к поверхности связи. Этому условию удовлетворяют множество векторов, и все они лежат в касательной плоскости к поверхности связи $f(x, y, z) = 0$, проведённой в точке *M*.

Вектор действительного перемещения $\delta \bar{r}$ в стационарной связи удовлетворяет условию (6), т.о. он является одним из векторов возможного перемещения.

$d\bar{r} = \bar{v} \cdot dt$, где $\bar{v}$ - истинная скорость точки *M*.

$\delta \bar{r} = \overline{v^*} \cdot d\tau$, где $\overline{v^*}$ - возможная скорость точки *M*.

Если связь нестационарная, т.е. уравнение связи имеет вид $f(x, y, z, t) = 0$, то фиксируется время *t*, и в этот момент вектор $\delta \bar{r}$ удовлетворяет уравнению (6). Т.е. *для того, чтобы найти возможные перемещения в нестационарной связи, её нужно превратить в стационарную, зафиксировав время t*.

Но свойства действительных перемещений в нестационарных связях существенно различны. При истинном движении точки по нестационарной связи должно соблюдаться тождество

$$f[x(t), y(t), z(t), t] \equiv 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Таким образом, вектор действительного перемещения $d\bar{r} = (dx, dy, dz)$ не будет удовлетворять уравнению (5), т.к. $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$

Значит, *в случае нестационарной связи действительное перемещение не является одним из частных случаев возможного:* $d\bar{r} \neq \delta r$

При этом операция варьирования отличается от операции определения полного дифференциала тем, что *t* считается фиксированным, значит $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

3. Возможная работа

Возможной работой в данный момент времени t_0 называется такая работа, которую совершили бы силы $F_1(t_0), F_2(t_0), \ldots F_n(t_0)$, приложенные к точкам системы на возможном перемещении точек системы.

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \overline{F_k} \cdot \delta \overline{r_k}$$

! Очевидно, что если $\overline{F_k} \perp \delta \overline{r_k}$, то $\delta A = 0$

4. Идеальные связи

Связи называются ***идеальными***, если возможная работа реакций связи на любом возможном перемещении системы из любого её положения равна нулю.

То есть, если $\overline{R_k}$ - реакция связи, то для идеальных связей $\sum_{k=1}^{n} \overline{R_k} \cdot \delta \overline{r_k} = 0$

Из уравнения видно, что реакция должна быть перпендикулярна к любому возможному перемещению точки.

5. Принцип возможных перемещений

Пусть система материальных точек под действием всех приложенных к ней сил и реакций связей находится в равновесии. Все связи системы будем считать идеальными.

Для одной материальной точки $\overline{F_k} + \overline{N_k} = 0$ т.к. она находится в равновесии.

На любом возможном перемещении соответствующие возможные работы:

$$\delta A_к^F + \delta A_k^N = 0$$

Просуммируем такие равенства для всех точек. $\sum_1^n \delta A_к^F + \sum_1^n \delta A_k^N = 0$

Но если все связи идеальные, то второе слагаемое равно нулю, тогда

$$\sum_{1}^{n} \delta A_{к}^{F} = 0$$ **- принцип возможных перемещений**

Это уравнение можно записать в виде: $\sum (F_k \cdot \delta\ s_k \cdot \cos\alpha_k) = 0$

$$\sum (F_{kx} \cdot \delta\ x_k + F_{ky} \cdot \delta\ y_k + F_{kz} \cdot \delta\ z_k) = 0$$

α - угол между векторами силы и возможного перемещения.

$\delta\ \overline{s_k} = (\delta\ x_k, \delta\ y_k, \delta\ z_k)$ - вектор возможного перемещения

Принцип возможных перемещений даёт в общей форме условие равновесия для любой механической системы в целом, без расчленения системы на отдельные тела. В расчёте учитываются только активные силы, заранее исключаются из рассмотрения все неизвестные реакции связей, если связи идеальные.

! Если система имеет несколько степеней свободы, то уравнения надо составить для каждого из независимых перемещений в отдельности

! Принципом возможных перемещений можно пользоваться и при наличии трения, включая силы трения в число активных сил.

! Этим методом можно находить реакции связей, если отбросить связь, заменив её реакцией и рассматривать, как активную силу.

6. Принцип Даламбера для точки

Пусть на материальную точку массой *m* действуют активные силы с их равнодействующей равной $\overline{F}$, реакции связей (пассивные силы) и их равнодействующая $\overline{N}$. Если точка движется с ускорением $\overline{W}$, то

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{N}$$

$$\overline{F} - m\overline{W} + \overline{N} = 0 \qquad (1)$$

- принцип Даламбера для точки.

7. Принцип Даламбера для системы тел

Для каждой точки системы: $\overline{F_к} - m\overline{W_к} + \overline{N_к} = 0$

Сложив уравнения всех точек системы почленно, получим:

$$\sum \overline{F_к} - \sum m\overline{W_к} + \sum \overline{N_к} = 0$$

Умножив каждое слагаемое векторно на соответствующий радиус-вектор, и складывая их почленно, получим:

$$\sum M_O\left(\overline{F_к}\right) - \sum M_O\left(m\overline{W_к}\right) + \sum M_O\left(\overline{N_к}\right) = 0$$

Если в любой момент времени к каждой точке подвижной системы кроме внешних сил и реакций связей приложить соответствующие силы инерции, то систему можно рассматривать как статическую и применять к ней все уравнения равновесия статики. ***– принцип Даламбера для системы тел.***