

Степень с рациональным показателем.

Устно

Корнем n -й степени из числа a называется такое число x , которое после возведения в n -ю степень дает a .

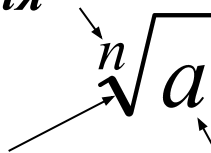
Это определение можно записать так:

$$\sqrt[n]{a} = x, \text{ если } x^n = a.$$

Например: $\sqrt[3]{1000} = 10$, так как $10^3 = 1000$.

*Арифметическим корнем n -ой степени из неотрицательного числа a называется **неотрицательное число**, n -ая степень которого равна a .*

Показатель корня



*Знак
арифметического
корня (радикал)*

*Подкоренное
выражение*

Самостоятельно

Верно ли, что $\sqrt[7]{128} = 2$?

Верно ли, что $\sqrt[3]{1\,000\,000} = 100$?

Устно

Корень нечетной степени из положительного числа положителен, из отрицательного—отрицателен, т. е. корень нечетной степени имеет тот же знак, что и подкоренное число.

Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, так как $2^3 = 8$; $\sqrt[5]{-32} = -2$, так как $(-2)^5 = -32$; $\sqrt[5]{-100\,000} = -10$, так как $(-10)^5 = -100\,000$.

Корень четной степени из отрицательного числа не существует

Свойства арифметических корней

Свойства корней n —ой степени сходны со свойствами квадратных корней

Но квадратные корни имели одинаковые показатели = 2, поэтому чтобы действовать по аналогии с квадратными корнями мы должны уравнивать показатели корней, т.е. приводить корни к одинаковым степеням. Для этого используется **основное свойство корня**:

Величина корня не изменится, если показатель степени корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же число, не равное нулю, т. е.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \text{ при } p \neq 0.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \text{ при } p \neq 0.$$

Читая то же самое тождество справа налево, получим:
показатель степени корня и подкоренного выражения можно разделить на их общий делитель.

Примеры: $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^{10}}$, $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[3n]{a^6} = \sqrt[n]{a^2}$, $\sqrt[6]{a+b} =$
 $= \sqrt[12]{(a+b)^2}$, $\sqrt[16]{(a^3+b^2)^4} = \sqrt[4]{a^3+b^2}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \text{ при } p \neq 0.$$

Данное свойство используется для сравнения корней

Примеры: 1. Что больше: $\sqrt[4]{3^3}$ или $\sqrt[8]{3^7}$?

Приведем корни к одинаковым показателям. Для этого найдем наименьшее из чисел, которое делится и на 4 и на 8. Это число 8.

$$\sqrt[4]{3^3} = 4 \cdot \sqrt[2]{3^{3 \cdot 2}} = \sqrt[8]{3^6} \longrightarrow \sqrt[8]{3^6} < \sqrt[8]{3^7}, \text{ т.к. } 3^6 < 3^7 \longrightarrow \sqrt[4]{3^3} < \sqrt[8]{3^7}$$

2. Что больше: $\sqrt[6]{3^3}$ или $\sqrt[9]{3^4}$?

Приведем корни к одинаковым показателям. Для этого найдем наименьшее из чисел, которое делится и на 6 и на 9. Это число 18

$$\sqrt[6]{3^3} = 6 \cdot \sqrt[3]{3^{3 \cdot 3}} = \sqrt[18]{3^9}; \quad \sqrt[9]{3^4} = 9 \cdot \sqrt[2]{3^{4 \cdot 3}} = \sqrt[18]{3^{12}}, \text{ т.к. } 3^9 < 3^{12} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sqrt[18]{3^9} < \sqrt[18]{3^{12}} \longrightarrow \sqrt[6]{3^3} < \sqrt[9]{3^4}$$

Самостоятельно

1. Что больше: $\sqrt[8]{13^3}$ или $\sqrt[4]{13}$?
2. Что больше: $\sqrt[9]{5}$ или $\sqrt[18]{25}$?

Проверьте себя:

$$1) \sqrt[8]{13^3} > \sqrt[4]{13}$$

$$2) \sqrt[9]{5} = \sqrt[18]{25}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

-это еще одно важное свойство корня, которое нужно знать.

Пример: $\left(\sqrt[5]{8}\right)^3 = \sqrt[5]{8^3}$

Переход от корня к степени

$$m > 0, n > 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Степень с дробным (положительным) показателем есть корень, показатель степени которого равен знаменателю дробного показателя, а подкоренное выражение представляет собой степень того же основания с показателем, равным числителю дробного показателя.

Будем рассматривать корень любой степени с $a > 0$. Тогда извлечение корня из чисел можно заменить действием возведения в степень.

Примеры:

$$1) \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}; \quad 2) \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{b^1} = b^{\frac{1}{7}}; \quad 3) \sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}}; \quad 4) \sqrt[10]{p^7} = p^{\frac{7}{10}} = p^{0,7};$$

$$5) \sqrt[4]{(a^3 + b)^5} = (a^3 + b)^{\frac{5}{4}} = (a^3 + b)^{1\frac{1}{4}}; \quad 6) \sqrt[4]{x + y^2} = \sqrt[4]{(x + y^2)^1} = (x + y^2)^{\frac{1}{4}};$$

$$7) \sqrt[4]{x^2 y^3} = \sqrt[4]{(x^2 y^3)^1} = (x^2 y^3)^{\frac{1}{4}};$$

Самостоятельно

Представьте корень в виде степени.

$$1) \sqrt[4]{x}; \quad 2) \sqrt[6]{ab^7}; \quad 3) \sqrt{b^7}; \quad 4) \sqrt[5]{3a - 2b};$$

$$5) \sqrt{b^8}; \quad 6) \sqrt[3]{3^6}; \quad 7) \left(\sqrt[3]{3}\right)^9; \quad 8) \left(\sqrt[3]{a}\right)^5;$$

Проверьте себя:

1) $x^{\frac{1}{4}}$;

2) $(ab)^{\frac{1}{6}}$;

3) $(b)^{3,5}$;

4) $(3a - 2b)^{\frac{1}{5}}$;

5) b^4 ;

6) 9;

7) 27;

8) $a^{\frac{5}{3}}$;

Под корнем четной степени всегда стоит неотрицательное число.
Под корнем же нечетной степени $(2n+1)$ может стоять любое число, в том числе и отрицательное. В этом случае, чтобы заменить корень на степень минус «-» надо вынести перед корнем.

$$\sqrt[2n+1]{-(a^m)} = -\sqrt[2n+1]{a^m} = -a^{\frac{m}{2n+1}}$$

Примеры:

$$1) \sqrt[3]{-a^4} = -a^{\frac{4}{3}}; \quad 2) \sqrt[7]{-b} = -b^{\frac{1}{7}}; \quad 3) \sqrt[3]{-8^2} = -8^{\frac{2}{3}}; \quad 4) \sqrt[3]{-p^{21}} = -p^7;$$

$$5) \sqrt[5]{-(a^3 + b)^5} = -(a^3 + b)^{\frac{5}{4}}; \quad 6) \sqrt[11]{-x^2 y^3} = -(x^2 y^3)^{\frac{1}{11}};$$

Самостоятельно

Представьте корень в виде степени.

$$1) \sqrt[7]{-x} ; \quad 2) \sqrt[3]{-ab^7} ; \quad 3) \left(\sqrt[7]{-3} \right)^9 ;$$

Проверьте себя:

$$1) - x^{\frac{1}{7}}; \quad 2) - (ab)^{\frac{7}{6}}; \quad 3) - 3^{\frac{9}{7}};$$

А если показатель отрицательный, то

$$m > 0, n > 0$$

$$\sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Примеры: $a^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{a^{\frac{5}{6}}}$; $b^{-0,25} = \frac{1}{b^{0,25}}$; $c^{-1,5} = \frac{1}{c^{1,5}}$; $14^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{14^{\frac{1}{2}}}$;

$$m^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{m^{\frac{p}{q}}}; \quad 3p^{-\frac{m}{n}} = \frac{3}{p^{\frac{m}{n}}}.$$

В общем виде данное свойство выглядит:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Сравните со свойством степени с целым отрицательным показателем.

Самостоятельно

1. Сформулируйте определение степени с отрицательным рациональным показателем и запишите его аналитически.

2. Запишите, пользуясь этим определением, следующие степени в виде дробей:

1) $3^{-\frac{1}{4}}$; 2) $10^{-0,3}$; 3) $8^{-\frac{2}{3}}$; 4) $a^{-\frac{5}{7}}$; 5) $b^{-\frac{1}{3}}$;

3. Запишите в виде степеней:

1) $\frac{1}{b^{\frac{1}{7}}}$; 2) $\frac{1}{c^{\frac{1}{5}}}$; 3) $\frac{1}{m^{0,9}}$;

Проверьте себя:

1а. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, где $a \neq 0$,

p — рациональное число.

2а. 1) $\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$; 2) $\frac{1}{10^{0,3}}$; 3) $\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\frac{1}{a^{\frac{1}{5}}}$; 5) $\frac{2}{b^{\frac{1}{3}}}$.

3а. 1) $b^{-\frac{3}{7}}$; 2) $c^{-\frac{1}{5}}$; 3) $3m^{-0,9}$.

Действия над степенями с дробными показателями выполняются по тем же правилам, что и над степенями с любыми целыми показателями, т. е. по правилам:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Примеры:

$$1) a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}};$$

Проверить

$$a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}};$$

$$2) b^{\frac{1}{6}} b^{\frac{2}{3}} b^{0,25}$$

Проверить

$$b^{\frac{1}{6}} b^{\frac{2}{3}} b^{0,25} = b^{\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + 0,25} = b^{\frac{13}{12}};$$

$$3) 2a^{\frac{1}{4}} 3a^{0,23}$$

Проверить

$$2a^{\frac{1}{4}} 3a^{0,23} = 6a^{0,25 + 0,23} = 6a^{0,48}$$

$$4) a^{\frac{7}{12}} a^{-\frac{1}{6}}$$

Проверить

$$a^{\frac{7}{12}} a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{7}{12} + \left(-\frac{1}{6}\right)} = a^{\frac{5}{12}}.$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Примеры:

1) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}}$

Проверить

$$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}};$$

2) $b^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{3}{16}}$

Проверить

$$b^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{3}{16}} = b^{\frac{2}{3} - \frac{3}{16}} = b^{\frac{23}{48}};$$

3) $c^{\frac{5}{6}} : c^{0,25}$

Проверить

$$c^{\frac{5}{6}} : c^{0,25} = c^{\frac{5}{6} - \frac{1}{4}} = c^{\frac{7}{12}}.$$

4) $a^{-\frac{13}{14}} : a^{-\frac{5}{8}}$

Проверить

$$a^{-\frac{13}{14}} : a^{-\frac{5}{8}} = a^{-\frac{13}{14} - \left(-\frac{5}{8}\right)} = a^{-\frac{13}{14} + \frac{5}{8}} = a^{-\frac{17}{56}}.$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Примеры:

1) $\left(c^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}$

Проверить

$$\left(c^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = c^{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5}} = c^{\frac{1}{3}};$$

2) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{6}{7}}$

Проверить

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{6}{7}} = a^{\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7}} = a^{\frac{9}{14}};$$

3) $\left(b^{\frac{7}{8}}\right)^{\frac{4}{3}} = b^{\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3}} = b^{\frac{7}{6}}$

Проверить

$$\left(b^{\frac{7}{8}}\right)^{\frac{4}{3}} = b^{\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3}} = b^{\frac{7}{6}}$$

4) $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{7}}$

Проверить

$$\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{7}} = a^{\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)} = a^{\frac{2}{7}}.$$

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Примеры:

1) $(8a)^{\frac{1}{3}}$

Проверить

$$(8a)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} = 2a^{\frac{1}{3}}$$

2) $(a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{4}} c^{1,5})^{-\frac{4}{3}}$

Проверить

$$(a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{4}} c^{1,5})^{-\frac{4}{3}} = (a^{\frac{2}{3}})^{-\frac{4}{3}} (b^{-\frac{1}{4}})^{-\frac{4}{3}} (c^{1,5})^{-\frac{4}{3}} = a^{-\frac{8}{9}} b^{\frac{1}{3}} c^{-2}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Примеры:

$$\left(\frac{a^{-\frac{2}{5}}}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{-3,5}$$

Проверить

$$\left(\frac{a^{-\frac{2}{5}}}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{-3,5} = \frac{\left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{-3,5}}{\left(b^{\frac{1}{7}}\right)^{-3,5}} = \frac{a^{\frac{7}{5}}}{b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{1,4}}{b^{-0,5}}$$

$$2) \left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Проверить

$$\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{64^{\frac{2}{3}}}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{(2^6)^{\frac{2}{3}}}{(5^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{6 \cdot \frac{2}{3}}}{5^{3 \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{2^4}{5^2} = \frac{16}{25}$$

Самостоятельно

1. Можно ли при выполнении действий над степенями с дробными показателями пользоваться правилами действий над степенями с целыми показателями?

2. Выполните действия:

$$1) \left(\frac{4a^2 b^{\frac{3}{4}}}{0,25a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad 2) \left(a^{\frac{2}{5}} a^{\frac{1}{4}} a^{0,7} \right)^{\frac{5}{7}}.$$

Подсказка

(Сначала производите действия в скобках, десятичную дробь замените на обыкновенную, числа старайтесь представлять в виде степени.)

3. Выполните действия:

$$1) \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} \right)^2; \quad 2) \left(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}} \right) \left(m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}} \right); \quad 3) \left(p^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{1}{4}} \right)^2.$$

Подсказка

4. Вычислите:

$$\left(4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \right)^{0,6} + 5^2 - 4^{\frac{1}{3}}.$$

Подсказка

Используйте формулы сокращенного умножения

Основание степени каждого из сомножителей, стоящих в скобках, представьте в виде степени числа 2.

Не получается? Обратитесь к преподавателю, но покажите свое решение.

Проверьте себя:

1. Можно. Правила действий над степенями с целыми и дробными показателями одни и те же.

2. 1) $4a^{\frac{5}{8}}b^{\frac{1}{4}}$; 2) $a^{\frac{27}{28}}$.

3. 1) $a + 2a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}$; 2) $m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}$; 3) $p^{\frac{1}{2}} - 2p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{1}{2}}$.

4.5

Самостоятельно

При упрощении следующих примеров, корни замените на степени, составные числа (32, 48, 81, 16) представьте в виде степени или произведения степеней или простых чисел, и только потом пользуйтесь свойствами степени.

$$1. \left(\frac{\sqrt[3]{2^{-1}}}{2^{-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{-1}}}} \cdot \sqrt[3]{2^{-8}} \right)^{-0,4}$$

Подсказка

Выполните действия в скобках, а затем замените дробь 0,4 на обыкновенную дробь

$$2. \left(2^2 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3^{\frac{7}{6}} \cdot 32^{-1}} \cdot \sqrt[3]{3^{-2}} \right)^{-8}$$

Подсказка

$$32 = 2^5$$

$$3. \left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \right) : \frac{48^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{5}{4}}}{3}$$

Подсказка

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$4. \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \quad \text{при } a=81, b=16$$

Подсказка

$$81 = 3^4$$

$$16 = 2^4$$

Не получается? Обратитесь к преподавателю, но покажите свое решение.

Проверьте себя:

1. 2

2. $\frac{16}{81}$;

3. 1,5

4. 3

Покажите конспект преподавателю.