Степень с рациональным показателем.

Устно

Корнем n-й степени из числа a называется такое число x, которое после возведения в n-ю степень дает a.

Это определение можно записать так:

$$\sqrt[n]{a} = x, \text{ если } x^n = a.$$

Например: $\sqrt[3]{1000} = 10$, так как $10^3 = 1000$.

Арифметическим корнем n—ой степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, *n*—ая степень которого равна *a*.

Показатель корня

$$\sqrt[n]{a}$$

Знак арифметического корня (радикал)

Подкоренное выражение

Самостоятельно

Верно ли, что $\sqrt[7]{128} = 2$?

Верно ли, что $\sqrt[3]{1\,000\,000} = 100$?

Устно

Корень ***нечетной степени*** *из положительного числа положителен, из отрицательного—отрицателен, т. е. корень нечетной степени имеет тот же знак, что и подкоренное число.*

Например, $\sqrt[3]{8}=2$, так как $2^3=8$; $\sqrt[5]{-32}=-2$, так как $(-2)^5=-32$; $\sqrt[5]{-100\,000}=-10$, так как $(-10)^5=-100\,000$.

Корень ***четной степени*** *из отрицательного числа не существует*

Свойства арифметических корней

*Свойства корней **n—ой степени** сходны со свойствами квадратных корней*

Но квадратные корни имели одинаковые показатели = 2, поэтому чтобы действовать по аналогии с квадратными корнями мы должны уравнивать показатели корней, т.е. приводить корни к одинаковым степеням. Для этого используется **основное свойство корня**:

Величина корня не изменится, если показатель степени корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же число, не равное нулю, т. е.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \text{ при } p \neq 0.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \text{ при } p \neq 0.$$

Читая то же самое тождество справа налево, получим: *показатель степени корня и подкоренного выражения можно разделить на их общий делитель.*

Примеры: $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^{10}}$, $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[3n]{a^6} = \sqrt[n]{a^2}$, $\sqrt[6]{a+b} = \sqrt[12]{(a+b)^2}$, $\sqrt[16]{(a^2+b^2)^4} = \sqrt[4]{a^2+b^2}$.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}} \text{ при } p\neq 0.$$

Данное свойство используется для сравнения корней

Примеры: 1. Что больше: $\sqrt[4]{3^3}$ или $\sqrt[8]{3^7}$?

Приведем корни к одинаковым показателям. Для этого найдем наименьшее из чисел, которое делится и на 4 и на 8. Это число 8.

$$\sqrt[4]{3^3}=\sqrt[4\cdot 2]{3^{3\cdot 2}}=\sqrt[8]{3^6} \longrightarrow \sqrt[8]{3^6}<\sqrt[8]{3^7},\ т.к. 3^6<3^7 \longrightarrow \sqrt[4]{3^3}<\sqrt[8]{3^7}$$

2. Что больше: $\sqrt[6]{3^3}$ или $\sqrt[9]{3^4}$?

Приведем корни к одинаковым показателям. Для этого найдем наименьшее из чисел, которое делится и на 6 и на 9 . Это число 18

$$\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6\cdot 3]{3^{3\cdot 3}}=\sqrt[18]{3^9};\ \sqrt[9]{3^4}=\sqrt[9\cdot 2]{3^{4\cdot 3}}=\sqrt[18]{3^{12}},\ т.к. 3^9<3^{12} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sqrt[18]{3^9}<\sqrt[18]{3^{12}} \longrightarrow \sqrt[6]{3^3}<\sqrt[9]{3^4}$$

Самостоятельно

1. Что больше: $\sqrt[8]{13^3}$ или $\sqrt[4]{13}$?
2. Что больше: $\sqrt[9]{5}$ или $\sqrt[18]{25}$?

Проверьте себя:

$$1)\ \sqrt[8]{13^3} > \sqrt[4]{13}$$

$$2)\ \sqrt[9]{5} = \sqrt[18]{25}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

-это еще одно важное свойство корня, которое нужно знать.

Пример: $\left(\sqrt[5]{8}\right)^3 = \sqrt[5]{8^3}$

Переход от корня к степени

$$m > 0, n > 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Степень с дробным (положительным) показателем есть корень, показатель степени которого равен знаменателю дробного показателя, а подкоренное выражение представляет собой степень того же основания с показателем, равным числителю дробного показателя.

Будем рассматривать корень любой степени с $a>0$. Тогда извлечение корня из чисел можно заменить действием возведения в степень.

Примеры:

$1)\ \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}};\quad 2)\ \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{b^1} = b^{\frac{1}{7}};\quad 3)\ \sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}};\quad 4)\ \sqrt[10]{p^7} = p^{\frac{7}{10}} = p^{0,7};$

$5)\ \sqrt[4]{(a^3+b)^5} = \left(a^3+b\right)^{\frac{5}{4}} = \left(a^3+b\right)^{1\frac{1}{4}};\quad 6)\ \sqrt[4]{x+y^2} = \sqrt[4]{\left(x+y^2\right)^1} = \left(x+y^2\right)^{\frac{1}{4}};$

$7)\ \sqrt[4]{x^2y^3} = \sqrt[4]{\left(x^2y^3\right)^1} = \left(x^2y^3\right)^{\frac{1}{4}};$

Самостоятельно

Представьте корень в виде степени.

$1)\ \sqrt[4]{x};\quad 2)\ \sqrt[6]{ab^7};\quad 3)\ \sqrt{b^7};\quad 4)\ \sqrt[5]{3a-2b};$

$5)\ \sqrt{b^8};\quad 6)\ \sqrt[3]{3^6};\quad 7)\ \left(\sqrt[3]{3}\right)^9;\quad 8)\ \left(\sqrt[3]{a}\right)^5;$

Проверьте себя:

$1)\ x^{\frac{1}{4}};$ $2)\ (ab)^{1\frac{1}{6}};$ $3)\ (b)^{3,5};$ $4)\ (3a-2b)^{\frac{1}{5}};$

$5)\ b^{4};$ $6)\ 9;$ $7)\ 27;$ $8)\ a^{\frac{5}{3}};$

Под корнем четной степени всегда стоит неотрицательное число.
Под корнем же нечетной степени ($2n+1$) может стоять любое число, в том числе и отрицательное. В этом случае, чтобы заменить корень на степень минус «-» надо вынести перед корнем.

$$\sqrt[2n+1]{-(a^m)} = -\sqrt[2n+1]{a^m} = -a^{\frac{m}{2n+1}}$$

Примеры:

1) $\sqrt[3]{-a^4} = -a^{\frac{4}{3}}$; 2) $\sqrt[7]{-b} = -b^{\frac{1}{7}}$; 3) $\sqrt[3]{-8^2} = -8^{\frac{2}{3}}$; 4) $\sqrt[3]{-p^{21}} = -p^7$;

5) $\sqrt[5]{-(a^3+b)^5} = -(a^3+b)^{\frac{5}{4}}$; 6) $\sqrt[11]{-x^2y^3} = -(x^2y^3)^{\frac{1}{11}}$;

Самостоятельно

Представьте корень в виде степени.

1) $\sqrt[7]{-x}$;   2) $\sqrt[3]{-ab^7}$;   3) $\left(\sqrt[7]{-3}\right)^9$;

Проверьте себя:

$1) - x^{\frac{1}{7}}$; $2) - (ab)^{\frac{7}{6}}$; $3) - 3^{\frac{9}{7}}$;

А если показатель отрицательный, то

$$m>0, n>0$$
$$\sqrt[n]{a^{-m}}=a^{-\frac{m}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Примеры: $a^{-\frac{5}{6}}=\frac{1}{a^{\frac{5}{6}}}$; $b^{-0,25}=\frac{1}{b^{0,25}}$; $c^{-1,5}=\frac{1}{c^{1,5}}$; $14^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{14^{\frac{1}{2}}}$;

$m^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{m^{\frac{p}{q}}}$; $3p^{-\frac{m}{n}}=\frac{3}{p^{\frac{m}{n}}}$.

В общем виде данное свойство выглядит: $a^{-p}=\frac{1}{a^{p}}$.

Сравните со свойством степени с целым отрицательным показателем.

Самостоятельно

1.Сформулируйте определение степени с отрицательным рациональным показателем и запишите его аналитически.

2. Запишите, пользуясь этим определением, следующие степени в виде дробей:

$1)\,3^{-\frac{1}{4}};\quad 2)\,10^{-0,3};\quad 3)\,8^{-\frac{2}{3}};\quad 4)\,a^{-\frac{5}{7}};\quad 5)\,b^{-\frac{1}{3}};$

3. Запишите в виде степеней:

$1)\,\dfrac{1}{b^{\frac{3}{7}}};\quad 2)\,\dfrac{1}{c^{\frac{1}{5}}};\quad 3)\,\dfrac{1}{m^{0,9}};$

Проверьте себя:

1a. $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$, где $a\neq 0$,

p — рациональное число.

2a. 1) $\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$; 2) $\frac{1}{10^{0,3}}$; 3) $\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\frac{1}{a^{\frac{5}{7}}}$; 5) $\frac{2}{b^{\frac{1}{3}}}$.

3a. 1) $b^{-\frac{3}{7}}$; 2) $c^{-\frac{1}{5}}$; 3) $3m^{-0,9}$.

Действия над степенями с дробными показателями выполняются по тем же правилам, что и над степенями с любыми целыми показателями, т. е. по правилам:

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$$

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Примеры:

1) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}};$ Проверить $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}};$

2) $b^{\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{3}}b^{0,25}$ Проверить $b^{\frac{1}{6}}b^{\frac{2}{3}}b^{0,25} = b^{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+0,25} = b^{\frac{13}{12}};$

3) $2a^{\frac{1}{4}}3a^{0,23}$ Проверить $2a^{\frac{1}{4}}3a^{0,23} = 6a^{0,25+0,23} = 6a^{0,43}.$

4) $a^{\frac{7}{12}}a^{-\frac{1}{6}}$ Проверить $a^{\frac{7}{12}}a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{7}{12}+\left(-\frac{1}{6}\right)} = a^{\frac{5}{12}}.$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

Примеры:

1) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}}$ Проверить $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}};$

2) $b^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{3}{16}}$ Проверить $b^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{3}{16}} = b^{\frac{2}{3} - \frac{3}{16}} = b^{\frac{23}{48}};$

3) $c^{\frac{5}{6}} : c^{0,25}$ Проверить $c^{\frac{5}{6}} : c^{0,25} = c^{\frac{5}{6} - \frac{1}{4}} = c^{\frac{7}{12}}.$

4) $a^{-\frac{13}{14}} : a^{-\frac{5}{8}}$ Проверить $a^{-\frac{13}{14}} : a^{-\frac{5}{8}} = a^{-\frac{13}{14} - \left(-\frac{5}{8}\right)} = a^{-\frac{13}{14} + \frac{5}{8}} = a^{-\frac{17}{56}}.$

$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

Примеры:

1) $\left(c^{\frac{5}{3}}\right)^{1\frac{1}{5}}$

Проверить

$\left(c^{\frac{5}{3}}\right)^{1\frac{1}{5}} = c^{\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}} = c^2;$

2) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{6}{7}}$

Проверить

$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{6}{7}} = a^{\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}} = a^{\frac{9}{14}};$

3) $\left(b^{\frac{7}{8}}\right)^{\frac{4}{3}} = b^{\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{3}} = b^{\frac{7}{6}}$

Проверить

$\left(b^{\frac{7}{8}}\right)^{\frac{4}{3}} = b^{\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{3}} = b^{\frac{7}{6}}$

4) $\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{7}}$

Проверить

$\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{7}} = a^{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)} = a^{\frac{2}{7}}.$

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Примеры:

1) $(8a)^{\frac{1}{3}}$

Проверить

$$(8a)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} = 2a^{\frac{1}{3}}$$

2) $\left(a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{4}} c^{1,5}\right)^{-\frac{4}{3}}$

Проверить

$$\left(a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{4}} c^{1,5}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{4}{3}} \left(b^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}} \left(c^{1,5}\right)^{-\frac{4}{3}} = a^{-\frac{8}{9}} b^{\frac{1}{3}} c^{-2}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$$

Примеры:

$$\left(\frac{a^{-\frac{2}{5}}}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{-3,5}$$

Проверить

$$\left(\frac{a^{-\frac{2}{5}}}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{-3,5} = \frac{\left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{-3,5}}{\left(b^{\frac{1}{7}}\right)^{-3,5}} = \frac{a^{\frac{7}{5}}}{b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{1.4}}{b^{-0,5}}.$$

2) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$

Проверить

$$\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{64^{\frac{2}{3}}}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(2^{6}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(5^{3}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{6\cdot\frac{2}{3}}}{5^{3\cdot\frac{2}{3}}} = \frac{2^{4}}{5^{2}} = \frac{16}{25}$$

Самостоятельно

1. Можно ли при выполнении действий над степенями с дробными показателями пользоваться правилами действий над степенями с целыми показателями?

2. Выполните действия:

1) $\left(\dfrac{4a^2b^{\frac{3}{4}}}{0{,}25a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(a^{\frac{2}{5}}a^{\frac{1}{4}}a^{0{,}7}\right)^{\frac{5}{7}}$.

Подсказка

(Сначала производите действия в скобках, десятичную дробь замените на обыкновенную, числа старайтесь представлять в виде степени.)

3. Выполните действия:

1) $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}\right)^2$; 2) $\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)\left(m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right)$; 3) $\left(p^{\frac{1}{4}}-q^{\frac{1}{4}}\right)^2$.

Подсказка

Используйте формулы сокращенного умножения

4. Вычислите:

$\left(4^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{5}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{0{,}6}+5^2-4^{\frac{1}{2}}$.

Подсказка

Основание степени каждого из сомножителей, стоящих в скобках, представьте в виде степени числа 2.

Не получается? Обратитесь к преподавателю, но покажите свое решение.

Проверьте себя:

1. Можно. Правила действий над степенями с целыми и дробными показателями одни и те же.

2. 1) $4a^{\frac{5}{8}}b^{\frac{1}{4}}$; 2) $a^{\frac{27}{28}}$.

3. 1) $a+2a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}$; 2) $m^{\frac{2}{3}}-n^{\frac{2}{3}}$; 3) $p^{\frac{1}{2}}-2p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{1}{2}}$.

4. 5

Самостоятельно

При упрощении следующих примеров, корни замените на степени, составные числа (32, 48, 81,16) представьте в виде степени или произведения степеней или простых чисел, и только потом пользуйтесь свойствами степени.

1. $$\left(\frac{\sqrt[3]{2^{-1}}}{2^{-1}\cdot\sqrt{\frac{1}{2^{-1}}}}\cdot\sqrt[3]{2^{-8}}\right)^{-0,4}.$$

Подсказка

Выполните действия в скобках, а затем замените дробь 0,4 на обыкновенную дробь

2. $$\left(2^2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3^{\frac{7}{6}}\cdot 32^{-1}\cdot\sqrt[3]{3^{-2}}}\right)^{-8}.$$

Подсказка

$32=2^5$

3. $$\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right):\frac{48^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{5}{4}}}{3}.$$

Подсказка

$48=2^4\cdot 3$

4. $$\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}-\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\quad при\ a=81,\ b=16$$

Подсказка

$81=3^4$

$16=2^4$

Не получается? Обратитесь к преподавателю, но покажите свое решение.

Проверьте себя:

1. 2
2. $\frac{16}{81}$;
3. $1{,}5$
4. 3

Покажите конспект преподавателю.