РЯДЫ ДИНАМИКИ

Ряды динамики (временные ряды) применяются для изучения изменения явлений во времени. Ряд динамики представляет собой ряд числовых значений определенного статистического показателя в последовательные моменты или периоды времени

РЯД ДИНАМИКИ

последовательность изменяющихся во времени значений статистического показателя , расположенного в хронологическом порядке

Составными элементами ряда динамики являются показатели уровней ряда и периоды времени (годы , кварталы , сутки) или моменты (даты) времени. Уровни ряда обычно обозначаются через «у» , моменты или периоды времени , к которым относятся уровни – через «t»

Пример

t	y_i
2006	15
2007	17
2008	18,5
2009	19
2010	21

Здесь **t – время;**

y_i – производство продукции, тыс. шт.

- В зависимости от способа выражения уровней ряда ряды динамики делятся на ряды :

абсолютных

относительных

средних величин

- В зависимости от того , как выражают уровни ряда (на начало месяца или за период),выделяют *моментные* и *интервальные* ряды динамики
- В зависимости от расстояния между уровнями ряды динамики бывают с *равностоящими* и *неравностоящими* уровнями во времени
- В зависимости от наличия основной тенденции изучаемого процесса

Ряды динамики подразделяются на **моментные** и **интервальные.**

Моментным называется ряд, абсолютные уровни которого характеризуют величину явления по состоянию на определенные моменты времени или даты. (Например, численность населения, уровни товарных остатков)

Интервальным называется такой ряд, абсолютные уровни которого представляют собой итоговые величины за за некоторые интервалы времени (например, производство продукции за месяц; число родившихся за месяц, год).

<u>Особенностью интервальных рядов</u> является то, что их уровни можно дробить и складывать

Выделяют также ***производные ряды динамики***, которые состоят из средних или относительных величин. Они рассчитываются на основе моментных или интервальных рядов. (Например, среднегодовая численность населения)

Основные показатели, применяемые для анализа рядов динамики

Анализ скорости и интенсивности явления во времени осуществляется с помощью статистических показателей , которые получаются в результате сравнения уровней между собой . Сравниваемый уровень называют *отчётным* , а уровень , с которым происходит сравнение – *базисным*

Различают показатели изменения уровней ряда и средние характеристики рядов динамики

Ряды динамики

Абсолютные величины

Средние величины

Относитель ные величины

Интервальны е

Интервальны еи Моментные

К показателям изменения уровней ряда относятся *абсолютный прирост, коэффициент роста и прироста, темп роста и прироста, абсолютное значение 1% прироста (роста)*

1.**Абсолютные приросты** бывают цепными и базисными. Абсолютный прирост показывает, на сколько изменился изучаемый показатель по сравнению с предыдущим или базисным периодом времени

Базисный абсолютный прирост:

$$\Delta_{Б} = Y_i - Y_0,$$

где y_0 - базисный уровень ряда

Цепной абсолютный прирост:

$$\Delta_{ц} = Y_i - Y_{i-1},$$

где Y_i - текущий уровень ряда;
Y_{i-1} - предыдущий уровень ряда

Год	y_i	$\Delta_ц$	$\Delta_б$	$k_P^ц$	$k_P^б$	$T_р^ц$	$T_р^б$	$T_{пр}^ц$	$T_{пр}^б$	$A\%^ц$
2006	15	-	0	-	1	-	100	-	0	-
2007	17	2	2	1,133	1,133	113,3	113,3	13,3	13,3	0,150
2008	18,5	1,5	3,5	1,088	1,233	108,8	123,3	8,8	23,3	0,170
2009	19	0,5	4	1,027	1,266	102,7	126,6	2,7	26,6	0,185
2010	21	2	6	1,105	1,400	110,5	140,0	10,5	40,0	0,190

2. **Коэффициент роста** показывает, во сколько раз изменился изучаемый показатель по сравнению с предыдущим периодом времени или с базисным периодом времени. Соответственно коэффициент роста может быть цепным и базисным

Цепной коэффициент роста:

$$K_{Pi}^{ц} = \frac{y_i}{y_{i-1}}$$

Базисный коэффициент роста:

$$K^{б}_{Рi} = \frac{y_i}{y_0}$$

3.***Темпы роста*** – это коэффициенты роста, выраженные в процентах (они также могут быть цепными, базисными и средними):

$$\mathbf{T_p = K_p \cdot 100\ (\%)}$$

Темп роста:

а) базисный:

$$T_p = y_i / y_0 * 100$$

б) цепной :

$$T_p = y_i / y_{i-1} * 100$$

4.Темп прироста используется для выражения величины абсолютного прироста уровней ряда динамики в относительных величинах:

$$T_{пр} = T_{р} - 100$$

Темп прироста показывает, на сколько процентов изменился изучаемый показатель по сравнению с предыдущим периодом времени или с базисным периодом времени.

Цепной темп прироста:

$$T^{ц}_{пр_i} = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{y_{i\text{-}1}} \times 100 = T^{ц}_{p_i} - 100$$

Базисный темп прироста

$$T^{б}_{ПР_i} = \frac{Y_i - Y_0}{y_0} \times 100 = T^{б}_{p_t} - 100$$

5.***Абсолютное значение*** одного процента прироста А% показывает, сколько абсолютных единиц содержится в 1% прироста

Содержание одного процента базисного прироста:

$$A\%_t^{б} = \frac{\Delta_t^{б}}{T_{пр_t}^{б}} = \frac{y_t - y_0}{\dfrac{y_t - y_0}{y_0} \times 100} = \frac{y_0}{100} =$$

$$= \frac{15}{100} = 0{,}15$$

Содержание одного процента цепного прироста:

$$A\%_t^{ц} = \frac{\Delta_t^{ц}}{T_{пр_t}^{ц}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{\dfrac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \times 100} = \frac{y_{t-1}}{100}$$

Год	y_i	$\Delta_ц$	$\Delta_б$	$k_P^ц$	$k_P^б$	$Т_р^ц$	$Т_р^б$	$Т_{пр}^ц$	$Т_{пр}^б$	$А\%^ц$
2005	**15**	**-**	**0**	**-**	**1**	**-**	**100**	**-**	**0**	**-**
2006	**17**	**2**	**2**	**1,133**	**1,133**	**113,3**	**113,3**	**13,3**	**13,3**	**0,150**
2007	**18,5**	**1,5**	**3,5**	**1,088**	**1,233**	**108,8**	**123,3**	**8,8**	**23,3**	**0,170**
2008	**19**	**0,5**	**4**	**1,027**	**1,266**	**102,7**	**126,6**	**2,7**	**26,6**	**0,185**
2010	**21**	**2**	**6**	**1,105**	**1,400**	**110,5**	**140,0**	**10,5**	**40,0**	**0,190**

Расчет среднего уровня ряда динамики

СРЕДНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДА

- Средний уровень ряда динамики рассчитывается по формулам средней арифметической или средней хронологической

1.Если ряд динамики является интервальным, то расчет среднего уровня ведется по формуле простой средней арифметической:

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ РЯДА

ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ РЯДОВ *С РАВНЫМИ ИНТЕРВАЛАМИ ВРЕМЕНИ*

Простая средняя арифметическая

$$\bar{y} = \sum y_i / n$$

где ***n*** - количество периодов времени

Пример. Имеются следующие данные о динамике производства продукции предприятием за 2006-2010 гг., тыс. шт.

2006 г.	2007 г.	2008 г.	2009 г.	2010 г.
205	213	222	229	236

Определить среднегодовое производство продукции за 2006-2010 гг.

$$\overline{Y} = \frac{205 + 213 + 222 + 229 + 236}{5} = \frac{1105}{5} = 221$$ **тыс. шт.**

2. Если ряд динамики является моментным с различными интервалами времени между датами, то для расчета среднего уровня используется средняя арифметическая взвешенная:

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{Y}_i \cdot t_i}{\sum t_i}$$

где t_i – продолжительность i-го интервала времени (интервал времени между двумя соседними значениями;

Y_i - средний уровень ряда для i-го интервала времени

Пример. Известна списочная численность персонала организации по состоянию на следующие даты (человек) :

01.01	01.03	01.06	01.09	01.01 след.год
1200	1100	1250	1500	1350

Среднесписочная численность персонала за год составляет:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1200+1100}{2}2 + \frac{1100+1250}{2}3 + \frac{1250+1500}{2}3 + \frac{1500+1350}{2}4}{12} =$$

$$= \frac{31300}{24} \approx 1304 \text{ чел.}$$

С неравными интервалами времени

Эта формула иногда дается как взвешенная средняя хронологическая

$$\bar{y} = \sum \left[\left(y_i + y_{i+1} \right) t_i \right] / 2 \sum t_i$$

где t_i – период времени между двумя соседними значениями

3.Если ряд динамики является моментным с равноотстоящими уровнями, то используется средняя хронологическая простая:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1},$$

где *n*-количество дат

Пример. Известны товарные остатки магазина на 1-е число каждого месяца (тыс. руб.) :

01.01	01.02	01.03	01.04
180	140	160	200

Средний уровень товарных остатков за первый квартал составил:

$$\bar{y} = \frac{\frac{180}{2} + 140 + 160 + \frac{200}{2}}{3} = 163$$ **тыс. руб.**

- Средний абсолютный прирост определяется как простая средняя арифметическая величина из цепных абсолютных приростов и показывает , на сколько в среднем изменялся показатель в течение изучаемого периода времени

Средний абсолютный прирост

показывает, на сколько в среднем изменялся изучаемый показатель при переходе от предыдущего периода времени к смежному последующему периоду времени

$$\overline{\Delta} = \frac{\Sigma \Delta_i}{s} = \frac{\Sigma (Y_i - Y_{i-1})}{s} = \frac{Y_n - Y_1}{n-1},$$

где n – число уровней ряда динамики;

S = n - 1 – количество цепных приростов

$$\bar{\Delta} = \frac{2 + 1,5 + 0,5 + 2}{5 - 1} = 1,5$$

$$\bar{\Delta} = \frac{21 - 15}{5 - 1} = 1,5$$

Год	y_i	$\Delta_ц$	$\Delta_б$	$k^ц_{Pi}$	$k^б_{Pi}$	$T^ц_{пр}$	$T^б_{пр}$	$T^ц_{пр_i}$	$T^б_{пр_i}$	$A\%^ц_i$
2006	15	-	0	-	1	-	100	-	0	-
2007	17	2	2	1,133	1,133	113,3	113,3	13,3	13,3	0,150
2008	18,5	1,5	3,5	1,088	1,233	108,8	123,3	8,8	23,3	0,170
2009	19	0,5	4	1,027	1,266	102,7	126,6	2,7	26,6	0,185
2010	21	2	6	1,105	1,400	110,5	140,0	10,5	40,0	0,190

- Среднегодовой коэффициент роста определяется как средняя геометрическая из цепных коэффициентов роста и показывает , сколько в среднем составлял рост показателя

- Если цепные коэффициенты роста определялись для рядов с равностоящими интервалами, то применяется простая средняя геометрическая величина

Средний коэффициент роста рассчитывается по формуле средней геометрической из цепных коэффициентов роста:

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{k_2^{ц} \times k_3^{ц} \times k_4^{ц} \times \ldots \times k_n^{ц}}$$

$$\bar{k} = \sqrt[5-1]{1{,}133 \times 1{,}088 \times 1{,}027 \times 1{,}105} = 1{,}088$$

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[4]{\frac{21}{15}} = 1,088$$

$$\bar{k} = \sqrt[b-a]{\frac{y_b}{y_a}} = \sqrt[2008-2004]{\frac{21}{15}} = 1,088$$

Год	y_i	$\Delta_ц$	$\Delta_б$	$k^{ц}_{Pi}$	$k^{б}_{Pi}$	$T^{ц}_{пр}$	$T^{б}_{пр}$	$T^{ц}_{пр_i}$	$T^{б}_{пр_i}$	$A\%^{ц}_{i}$
2006	**15**	**-**	**0**	**-**	**1**	**-**	**100**	**-**	**0**	**-**
2007	**17**	**2**	**2**	**1,133**	**1,133**	**113,3**	**113,3**	**13,3**	**13,3**	**0,150**
2008	**18,5**	**1,5**	**3,5**	**1,088**	**1,233**	**108,8**	**123,3**	**8,8**	**23,3**	**0,170**
2009	**19**	**0,5**	**4**	**1,027**	**1,266**	**102,7**	**126,6**	**2,7**	**26,6**	**0,185**
2010	**21**	**2**	**6**	**1,105**	**1,400**	**110,5**	**140,0**	**10,5**	**40,0**	**0,190**

С неравными интервалами времени

Взвешенная средняя геометрическая

$$\bar{k} = \sqrt[\sum t_i]{k_1^{t1} * k_2^{t2} * k_3^{t1} * \ldots * k_n^{1n}}$$

где ***ki*** – коэффицент роста;

ti – период времени между двумя соседними значениями

- Среднегодовой темп роста определяется умножением среднегодового коэффициента роста на 100 и показывает , сколько процентов в среднем составлял рост показателя

Средний темп прироста

Показывает, на сколько процентов увеличивается (или уменьшается) уровень по сравнению с предыдущем в среднем за единицу времени:

$$\overline{T_{пр}} = \overline{T_p} - 100$$

$$\overline{T_{np}} = 108{,}8\% - 100\% = 8{,}8\%$$

Проблема сопоставимости уровней рядов динамики

Смыкание рядов динамики

Поскольку ряды динамики формируются на протяжении длительных периодов времени, их уровни часто оказываются несопоставимыми

Причины

1. Изменение цен
2. Изменение методики расчета показателей
3. Изменение «границ» (организа-ционных, административных)

Для обеспечения сопоставимости данных часто применяется метод смыкания рядов динамики. Для смыкания ряда динамики необходимо иметь переходное звено. (***Переходное звено*** – это период времени, для которого изучаемый показатель рассчитан как по старой методике (в старых границах), так и по новой методике (в новых границах).

Для переходного звена рассчитывается коэффициент, действие которого распространяется на все предшествующие периоды времени

Добыча нефти млн.т.	2006	2007	2008	2009	2010
До слияния	6600	6700	6900	-	-
После слияния	-	-	7500	7800	7900

$$К = \frac{7500}{6900} = 1,087$$

$$y_{07} = 6700 \times 1{,}087 = 7283$$

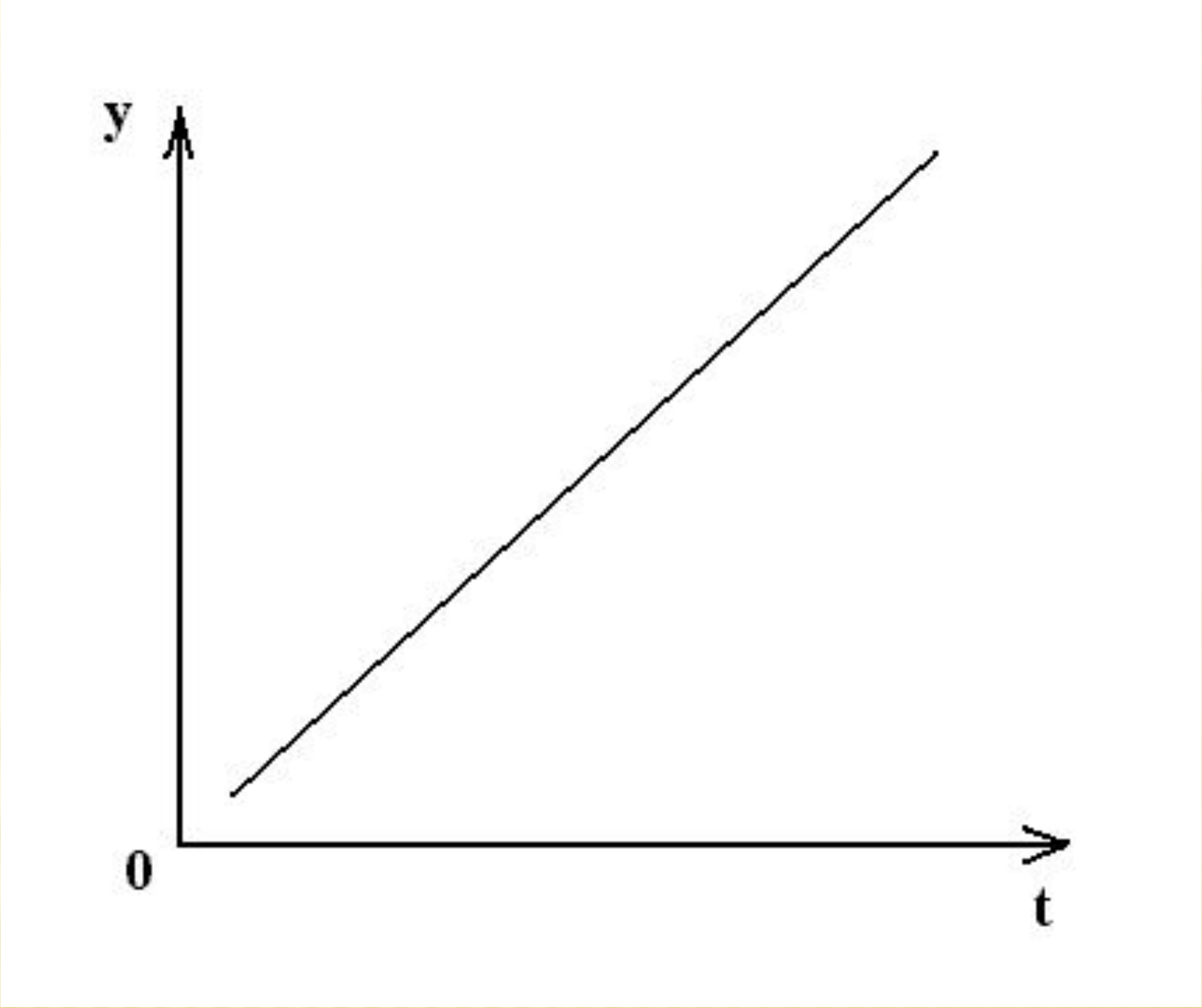
$$y_{06} = 6600 \times 1{,}087 = 7174$$

Добыча нефти млн.т.	2006	2007	2008	2009	2010
До слияния	6600	6700	6900	-	-
После слияния	-	-	7500	7800	7900
Сопоставимый ряд	7174	7283	7500	7800	7900

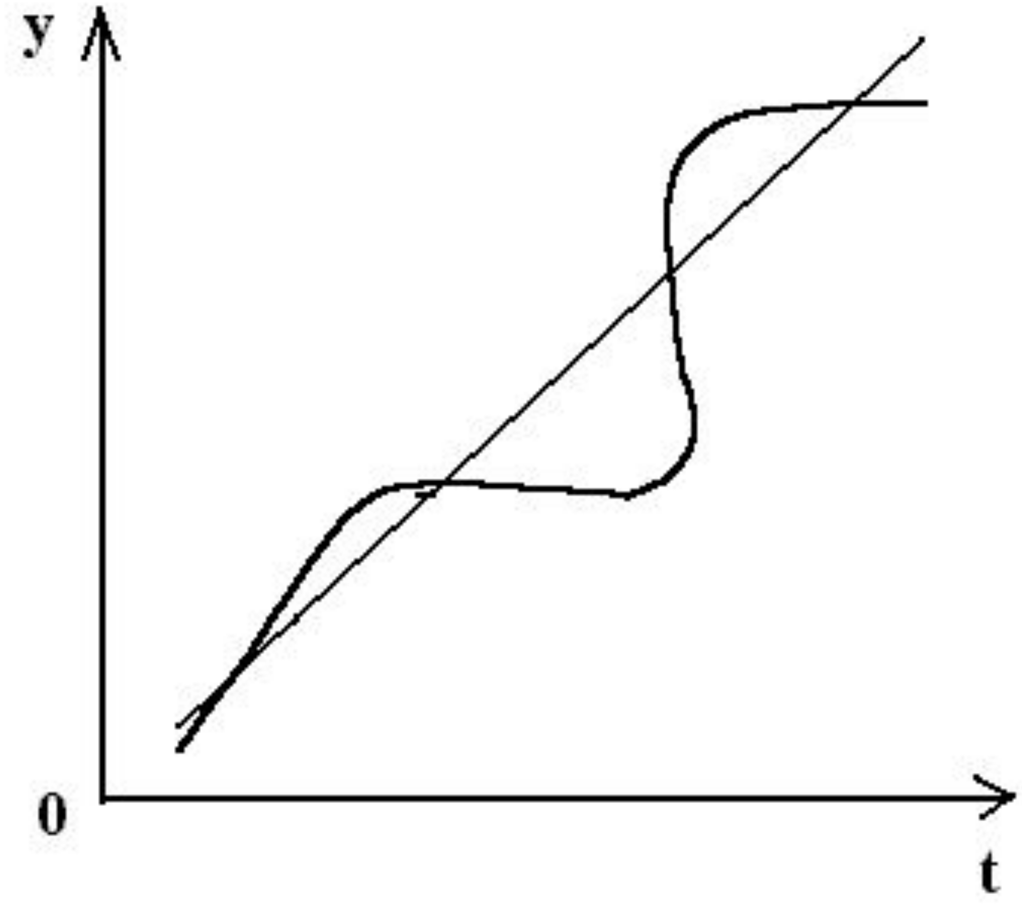
Анализ основной тенденции рядов динамики

Уровни рядов динамики формируются под воздействием большого числа факторов. Их можно разделить на 3 группы

1. ***Определяющие*** факторы – факторы, которые оказывают постоянное и сильное воздействие на изучаемый показатель. Они определяют основную тенденцию (тренд) ряда динамики


y
0
t

2. ***Сезонные*** факторы – факторы, которые вызывают сезонные колебания относительно основной тенденции


y
0
t

3. ***Случайные*** факторы – факторы, которые вызывают случайные колебания уровней ряда (например, погодный фактор)

Метод укрупнения интервалов

Метод укрупнения интервалов – замена исходных уровней ряда средними величинами, которые рассчитываются для укрупненных интервалов

Месяц	y_t	Квартальные суммы	Среднемес. величина по кварталам
1	5.1		
2	5.4	15.7	5.23
3	5.2		
4	5.3		
5	5.6	16.7	5.57
6	5.8		
7	5.6		
8	5.9	17.6	5.87
9	6.1		
10	6.0		
11	5.9	18.1	6.03
12	6.2		

Метод скользящей средней

Метод скользящей средней– замена исходных уровней ряда средними величинами, которые рассчитываются для последовательно смещающихся интервалов времени

Год	y_t	Пятичленная скользящая		Четырех-членная скользящ. сумма	Центрированная скользящая	
		сумма	средняя		сумма	средняя
2002	4.5	-	-		-	-
2003	4.3	-	-		-	-
2004	5.2	25	5	19,3	19.9	4.98
2005	5.3	26.5	5.3	20,5	21.35	5.34
2006	5.7	28.2	5.64	22,2	22.6	5.65
2007	6	28.9	5.78	23	23.3	5.83
2008	6	29.3	5.86	23,6	23.6	5.9
2009	5.9	-	-	23,6	-	-
2010	5.7	-	-		-	-

Аналитическое выравнивание рядов динамики

Уровни ряда рассматриваются как некоторая функция от времени:

$$\hat{y}_t = f(t)$$

Процедура выравнивания в этом случае сводится:

- к выбору вида функции;
- к определению параметров функции;
- к получению выравненных значений уровней ряда на основе функции

Рассмотрим данный метод на примере линейного уравнения (тренда):

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t,$$

где a и b – параметры;

t – время

Линейный тренд лучше всего использовать в тех случаях, когда предварительный анализ показывает, что уровни ряда изменяются с примерно одинаковой скоростью, т.е. когда цепные абсолютные приросты примерно равны между собой

Параметры a и b определяются при помощи метода наименьших квадратов (МНК)

Применение метода МНК дает следующую систему уравнений для определения параметров:

$$a \cdot \sum t + b \cdot \sum t^2 = \sum (y_t \cdot t)$$

$$a \cdot n + b \cdot \sum t = \sum y_t$$

Данную систему уравнений можно существенно упростить, если пронумеровать время таким образом, чтобы

$$\sum t = 0$$

Если ряд содержит **нечетное число уровней**, то центральный уровень ряда нумеруется нулем. Уровни в сторону убывания времени нумеруются -1; -2; -3…, в сторону возрастания времени 1; 2; 3…

Если ряд содержит **четное число уровней**, то ближайшие к центру уровни ряда нумеруются: -1 и 1, далее нумерация как для ряда с нечетным числом уровней только с шагом 2: …-5; -3; -1; +1; +3; +5…

$$a \cdot n = \sum y_t \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sum y_t}{n}$$

$$b \cdot \sum t^2 = \sum (y_t \cdot t) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sum (y_t \cdot t)}{\sum t^2}$$

Год	y_t	$\Delta_t^{ц}$	t	t^2	$y_t \cdot t$	$\hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$
2006	800	-	-2	4	-1600	798.2	0.24
2007	857	57	-1	1	-857	857.7	0.49
2008	915	58	0	0	0	917.2	4.84
2009	976	61	1	1	976	976.7	0.49
2010	1038	62	2	4	2076	1036.2	3.24
Итого:	4586	-	0	10	595	4586.0	12.3

$$a = \frac{4586}{5} = 917{,}2$$

$$b = \frac{595}{10} = 59{,}5$$

$$\hat{y}_t = 917{,}2 + 59{,}5 \cdot t$$

Год	y_t	$\Delta_t^ц$	t	t^2	$y_t \cdot t$	$\hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$
2006	800	-	-2	4	-1600	798.2	0.24
2007	857	57	-1	1	-857	857.7	0.49
2008	915	58	0	0	0	917.2	4.84
2009	976	61	1	1	976	976.7	0.49
2010	1038	62	2	4	2076	1036.2	3.24
Итого:	4586	-	0	10	595	4586.0	12.3

Выравнивание по параболе второго порядка:

$$\hat{y} = a + b \cdot t + c \cdot t^2,$$

где **b** – скорость изменения уровней ряда динамики

c – ускорение

Выравнивание по параболе второго порядка производится, когда предварительный анализ показывает, что вторые разности примерно равны между собой

$$\Delta_t^{(1)} = y_t - y_{t-1}$$ - первая разность;

$$\Delta_t^{(2)} = \Delta_t^{(1)} - \Delta_{t-1}^{(1)}$$ - вторая разность

y_t	$\Delta_t^{(1)}$	$\Delta_t^{(2)}$
110	-	-
117	7	-
126	9	2
137	11	2
150	13	2
115	15	2
182	17	2

Для определения параметров применяется метод наименьших квадратов:

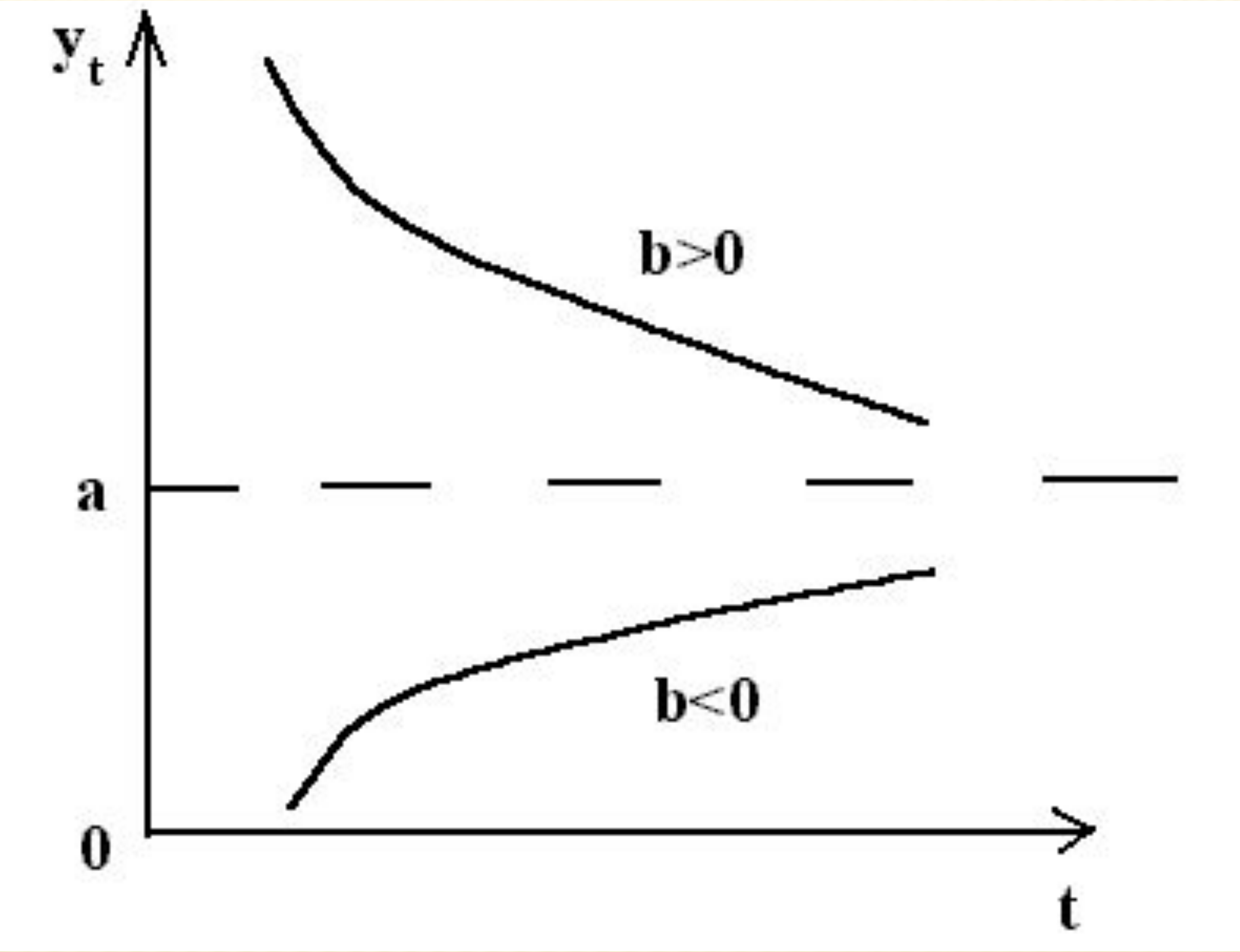
$$\mathbf{a \cdot n + b \cdot \sum t + c \cdot \sum t^2 = \sum y_t}$$

$$\mathbf{a \cdot \sum t + b \cdot \sum t^2 + c \cdot \sum t^3 = \sum (y_t \cdot t)}$$

$$\mathbf{a \cdot \sum t^2 + b \cdot \sum t^3 + c \cdot \sum t^4 = \sum (y_t \cdot t^2)}$$

Выравнивание по гиперболе применяется в тех случаях, когда в развитии ряда динамики происходит насыщение

$$\hat{y} = a + \frac{b}{t}$$



y
t
b>0
a
b<0
0
t

Для определения параметров используется МНК:

$$a \cdot n + b \cdot \sum \frac{1}{t} = \sum y_t$$

$$a \cdot \sum \frac{1}{t} + b \cdot \sum \frac{1}{t^2} = \sum \frac{y_t}{t}$$

Выравнивание ряда динамики при помощи показательных функций или экспоненты применяется, когда предварительный анализ показывает: уровень ряда динамики меняется с приблизительно одинаковыми цепными коэффициентами роста. При этом коэффициент b интерпретируется как средний коэффициент роста

$$\hat{y}_t = a \cdot b^t$$

Для определения параметров функция приводится предварительно к линейному виду при помощи логарифмирования левой и правой частей уравнения

$$\lg \hat{y} = \lg a + t \cdot \lg b$$

При этом мы находим не **a** и **b**,
а **lga** и **lgb**

$$n \cdot \lg a + \sum t \cdot \lg b = \sum \lg y_t$$

$$\sum t \cdot \lg a + \sum t^2 \cdot \lg b = \sum (\lg y_t \cdot t)$$