Элективный курс по алгебре

В МИРЕ ГРАФИКОВ

Автор курса: учитель математики высшей категории МОУ СОШ№1 г.Фурманова

Смалева Елена Владимировна

Адрес учебного заведения:

155523, Ивановская область, город Фурманов,

ул. Тимирязева, д. 42

Телефон (49341)2-50-75; E-mail: fursosh1@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Симметрия в геометрических преобразованиях графиков функций

Графики функций вида $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$

График функции $y=|f(|x|)|$

Графики «функций» $|y|=f(x)$, *при* $f(x)\geq 0$; $|y|=|f(x)|$

Графики функций вида $y=|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|$ *и* $y=|||x-a|-b|-c|$

Графический метод решения некоторых задач с параметрами

Построение графиков «функций», аналитические выражения которых содержат знак модуля, выраженных неявно

Построение множества точек плоскости, задаваемого соотношениями

Симметрия снежинки

Я хочу сказать вам лично,
Что снежинка –симметрична!
И зеркальна, и центральна,
А не просто так банальна!

На главную
Назад
Далее

Симметрия в геометрических преобразованиях графиков функций

Термин *«симметрия»* по-гречески означает «соразмерность, пропорциональность, одинаковость в расположении частей».

Математическое строгое понятие о симметрии сформировалось сравнительно недавно –в XIX веке. В наиболее простой трактовке современное определение симметрии выглядит примерно так: *симметричным называется такой объект, который можно как-то изменять, получая в результате то же, с чего начали.*

Мы будем называть симметрией фигуры *любое преобразование, переводящее фигуру в себя, т.е. обеспечивающее ее самосовмещение.*

Виды симметрии на плоскости:

- ***осевая***
- ***центральная***
- ***трансляционная:***

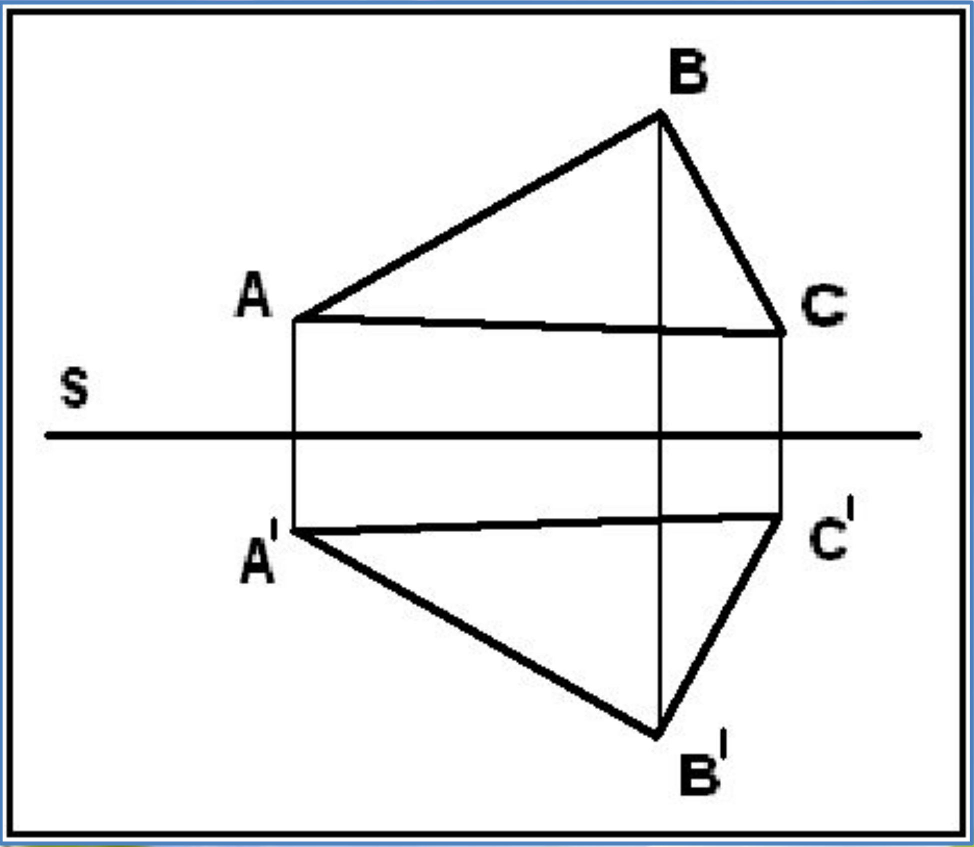
поворот;

параллельный перенос,

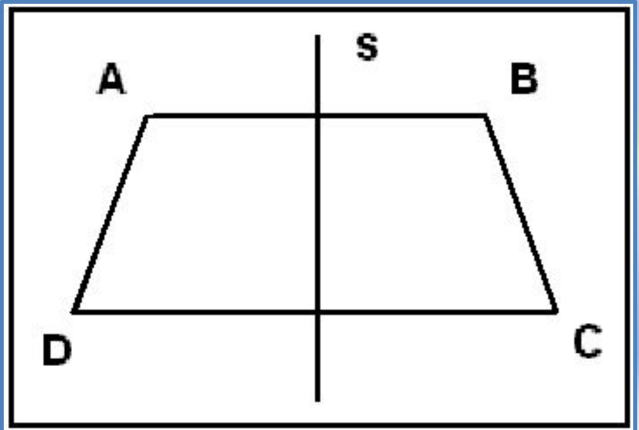
скользящая симметрия.

Осевая Симметрия

Преобразование, при котором каждая точка А фигуры (или тела) преобразуется в симметричную ей относительно некоторой оси s точку А' , при этом отрезок АА ' ⊥ s, называется осевой симметрией.



Если точка А лежит на оси s, то она симметрична самой себе, т. е. А совпадает с А ' .
В частности, если при преобразовании симметрии относительно оси s фигура F переходит сама в себя, то она называется симметричной относительно оси s, а ось s называется её осью симметрии.



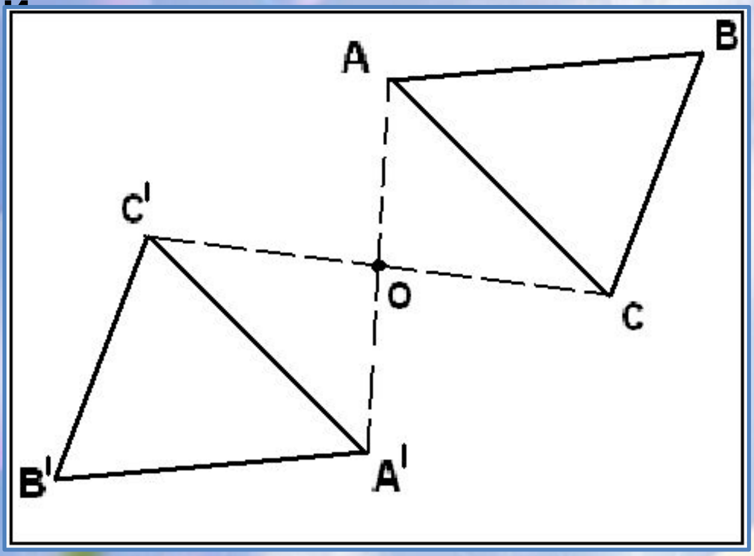
На главную

Назад

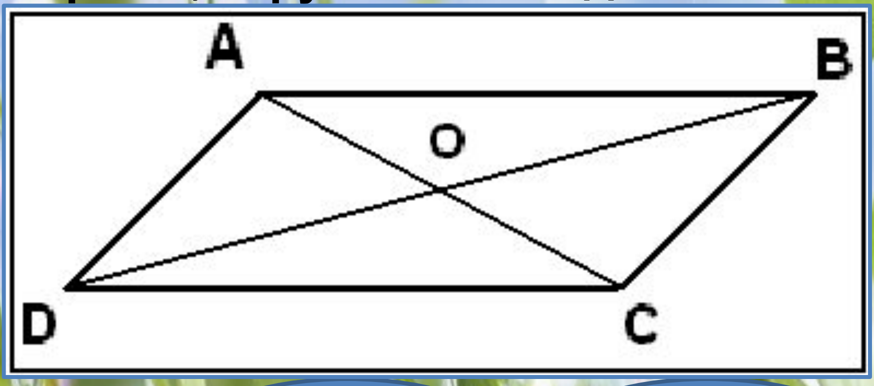
Далее

Центральная симметрия

Преобразование, переводящее каждую точку А фигуры (тела) в точку А ', симметричную ей относительно центра О, называется преобразованием центральной симметрии или просто центральной симметрией.



Точка О называется центром симметрии и является неподвижной. Других неподвижных точек это преобразование не имеет. Если при преобразовании центральной симметрии относительно центра О фигура F преобразуется в себя, то она называется симметричной относительно центра О. При этом центр О называется центром симметрии фигуры F. Примерами фигур, обладающих центром симметрии, являются параллелограмм, окружность и т.д.



На главную

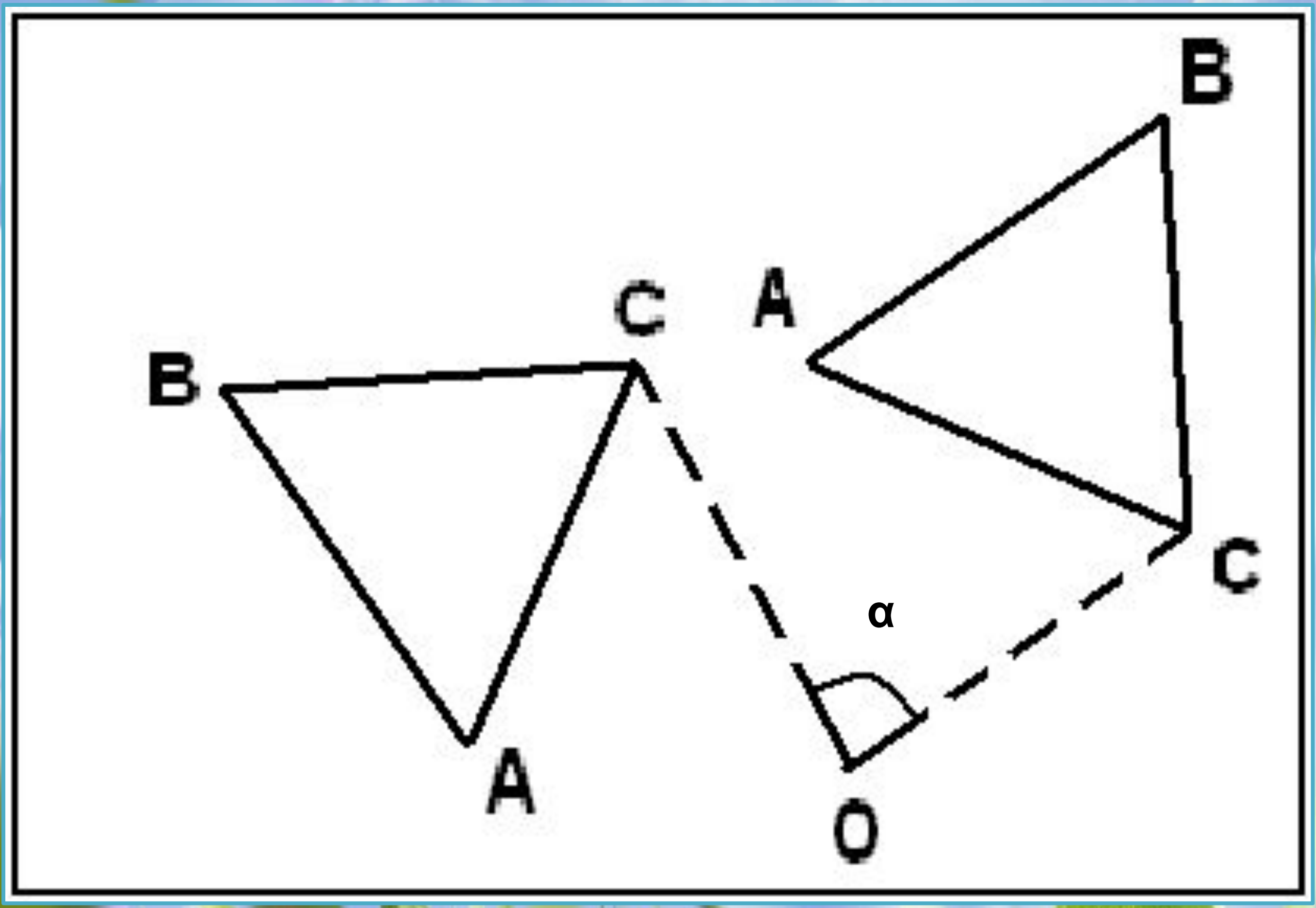
Назад

Далее

Трансляционная симметрия

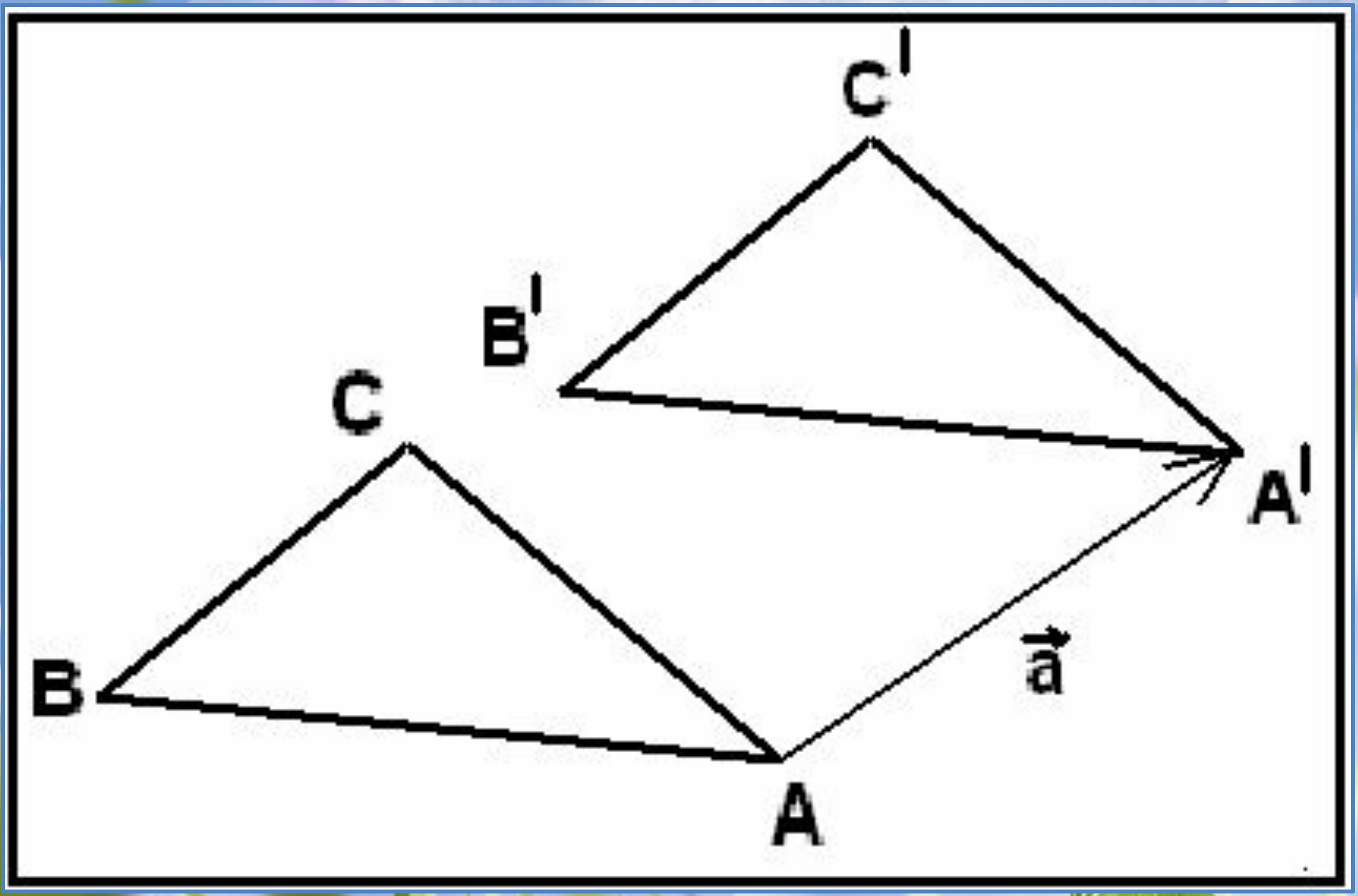
Поворот

Преобразование, при котором каждая точка А фигуры (тела) поворачивается на один и тот же угол α вокруг заданного центра О, называется вращением или поворотом плоскости. Точка О называется центром вращения, а угол α – углом вращения. Точка О является неподвижной точкой этого преобразования. Центральная симметрия есть поворот на 180°.



Параллельный перенос

Преобразование, при котором каждая точка фигуры (тела) перемещается в одном и том же направлении на одно и тоже расстояние, называется параллельным переносом. Чтобы задать преобразование параллельного переноса, достаточно задать вектор $\vec{a}$.



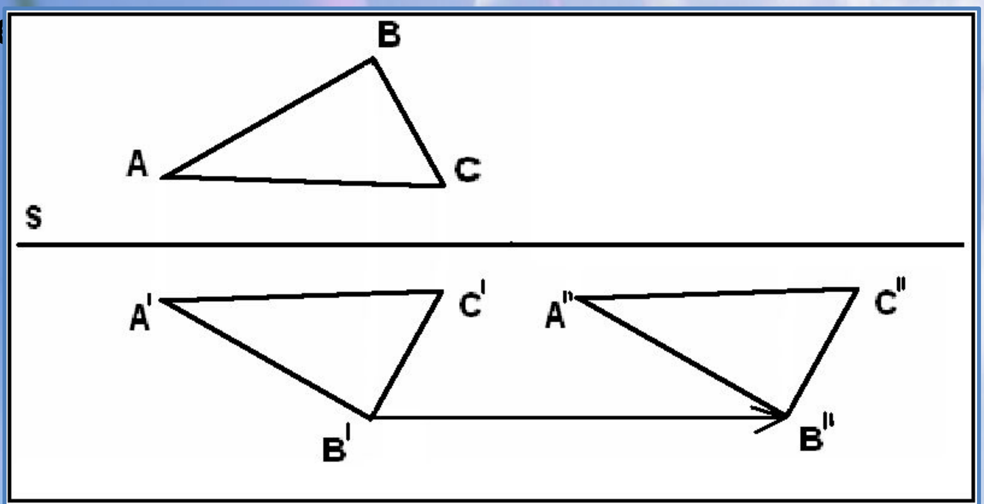
На главную

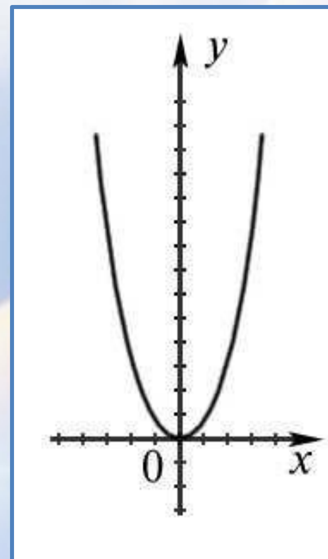
Назад

Далее

Скользящая симметрия

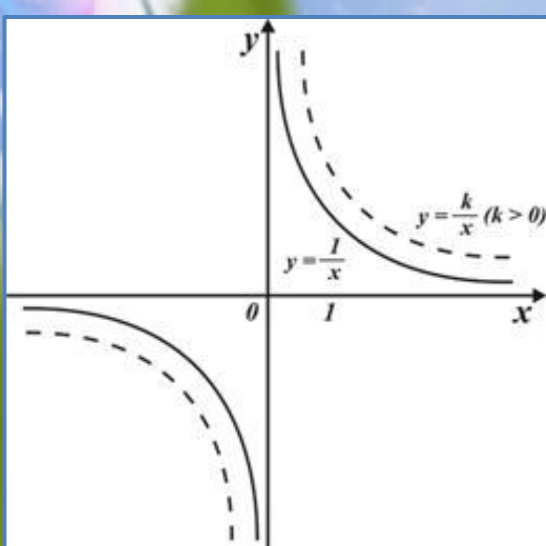
Скользящей симметрией называется такое преобразование, при котором последовательно выполняются осевая симметрия и параллельный пе

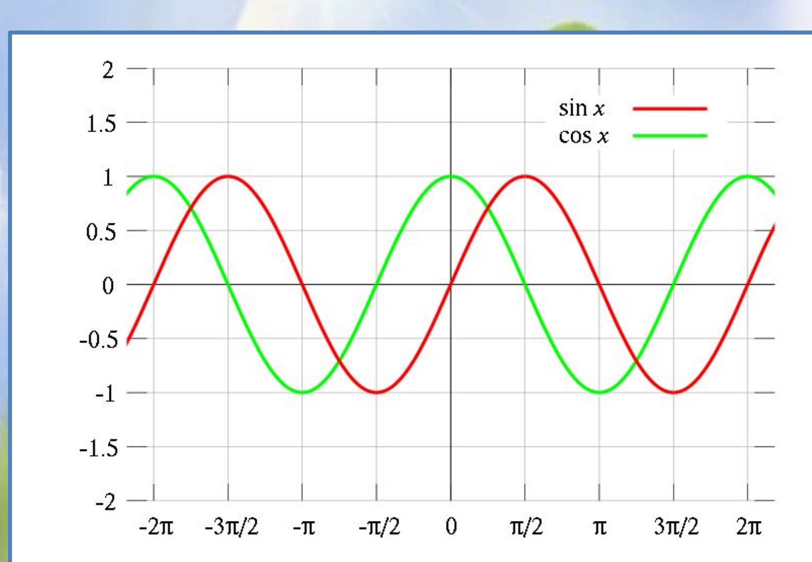




Все перечисленные преобразования будем называть преобразованиями симметрии.

При построении графиков функции симметрия встречается довольно часто.





На главную
Назад
Далее

Множество действительных чисел называется симметричным относительно точки x=0 числовой оси, если вместе с любой точкой x ему принадлежит точка (-x).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Функция $y=f(x)$ **с симметричной относительно начала координат областью определения** $D(f)$ **называется:**

-**четной, если для любого** $x \in D(f)$ **выполняется равенство**

$$f(-x)=f(x);$$

-**нечетной, если для любого** $x \in D(f)$ **выполняется равенство**

$$f(-x)=-f(x).$$

Для того чтобы построить график четной функции, достаточно построить график функции при x≥0 и полученную часть графика отобразить симметрично относительно оси oy.

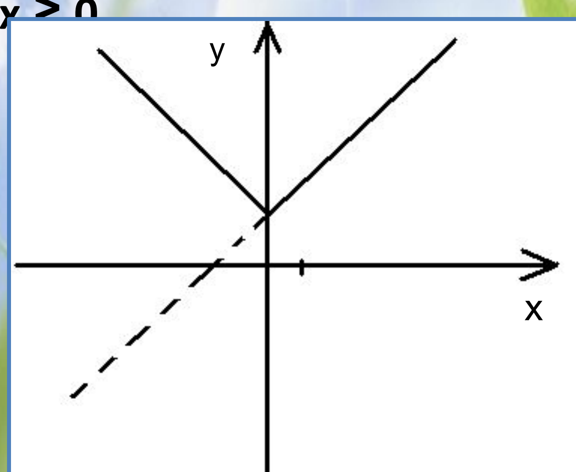
***Пример**: Построить график функции* $y=|x|+1$

$D(y)=R$; $y(-x)=|-x|+1=|x|+1=y(x)$

Функция $y=|x|+1$ **– чётная.**

1) **Строим график функции** $y=|x|+1$ **при x ≥ 0,т.е.** $y=x+1$.

2) **Симметрично относительно оси oy отражаем часть графика при x ≥ 0.**



На главную
Назад
Далее

Графики функций вида y=|f(x)|, y=f(|x|)

1. Построение графика функции вида y=|f(x)|

Чтобы построить график функции вида y=|f(x)|, надо сначала построить график функции y=f(x), а затем участки этого графика, лежащие выше оси абсцисс, оставить без изменения, а участки, лежащие ниже оси ох, зеркально отразить относительно этой оси.

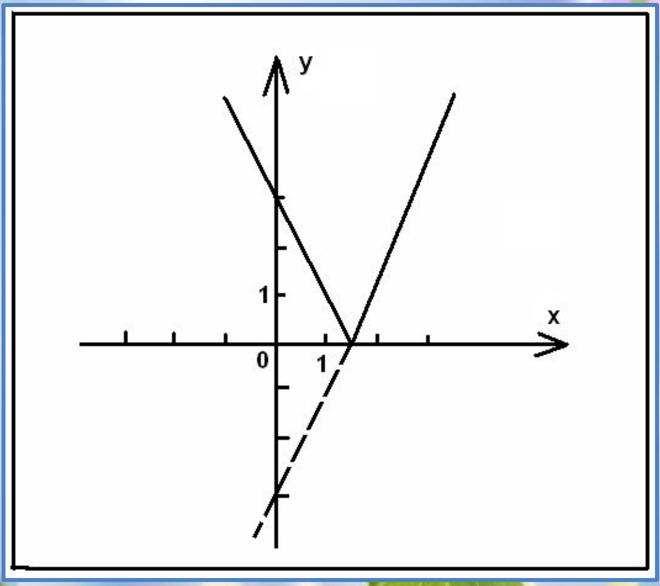
Так как f(|-x|)=f(|x|), то функция y=f(|x|) четная и для построения ее графика следует удалить точки графика функции f(x), находящиеся слева от оси оу, а все точки, лежащие на оси оу и справа от нее, отобразить симметрично относительно оси оу.

Пример 1.

Постройте график функции y=|2x-3|:

1)Строим график функции y=2x-3

2)Из графика функции y=2x-3 получаем график функции y=|2x-3|, отобразив симметрично относительно оси ох часть графика, лежащую под осью.



На главную

Назад

Далее

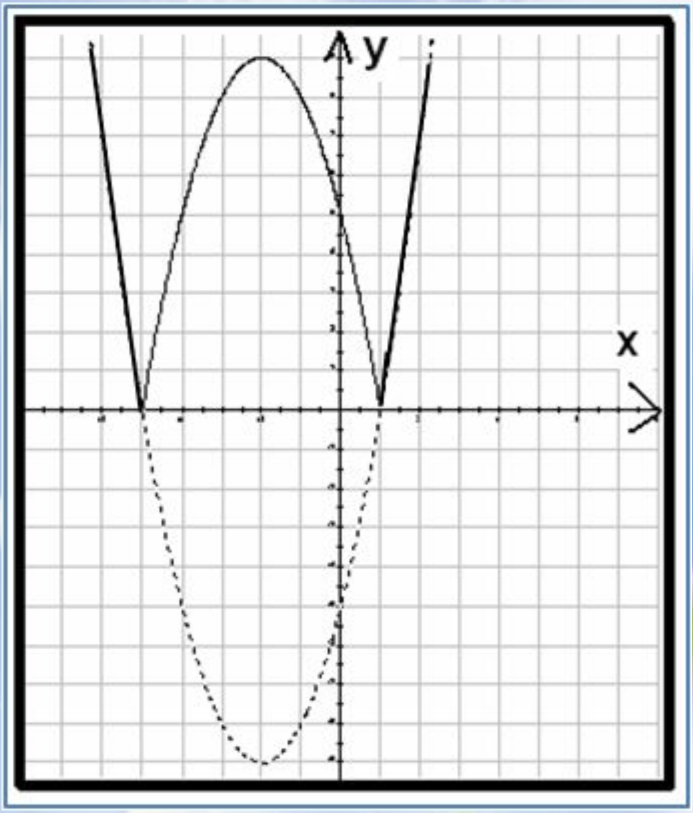
Пример *2:* **Постройте график функции $y=|x^2+4x-5|$:**

1)Строим график функции $y=x^2+4x-5$; $D(y)=R$; графиком является парабола; $y=(x+2)^2-9$;

(-2;-9)- координаты вершины;

x=-2 – ось симметрии.

2)Из графика функции $y=x^2+4x-5$ получаем график функции $y=|x^2+4x-5|$, отобразив симметрично оси ох ту часть графика, которая лежит ниже этой оси.



Взять на заметку!

- **Каких чисел точно не будет в множестве значений функции $y=|f(x)|$?**
- **В каких координатных четвертях расположен график функции $y=|f(x)|$?**

На главную

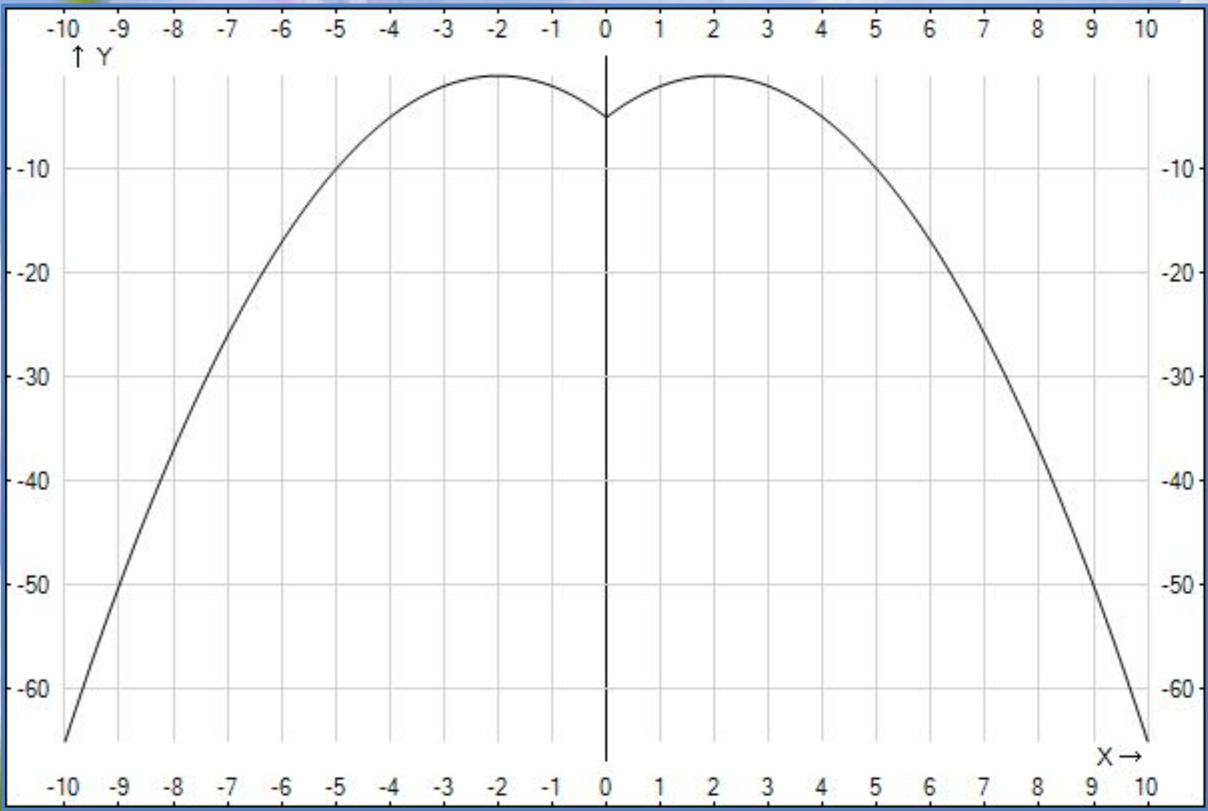
Назад

Далее

2. Построение графика функции вида $y=f(|x|)$.

Так как $f(|-x|)=f(|x|)$, то функция $y=f(|x|)$ четная и для построения ее графика следует удалить точки графика функции $f(x)$, находящиеся слева от оси OY, а все точки лежащие на оси OY и справа от неё, отобразить симметрично относительно оси OY.

Пример *1:* Построить график функции $y=-x^2+4|x|-5$



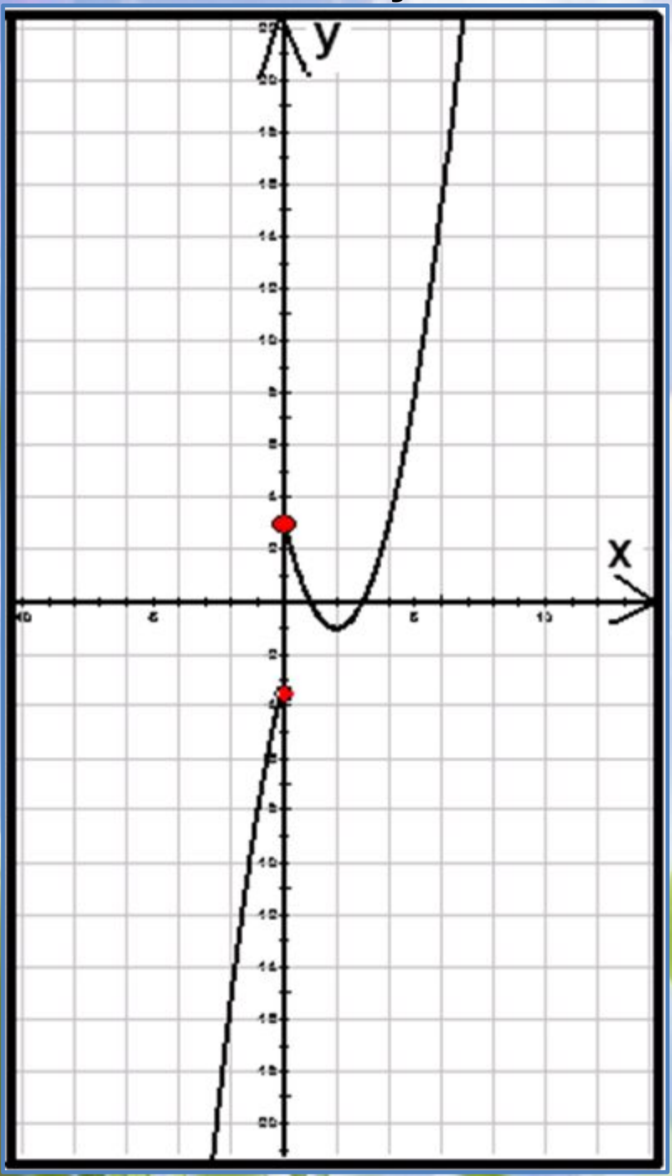
На главную

Назад

Далее

Пример *2:* **Построить график функции** $y=x(x^2-4x+3)/|x|$:

Очевидно, что следует рассматривать два случая: x>0 и x<0. Имеем: y=x²-4x+3, если x>0 и y=-x²+4x-3, если x<0. График данной функции состоит из двух соответствующих парабол.



На главную

Назад

Далее

График функции y=|f(|x|)|

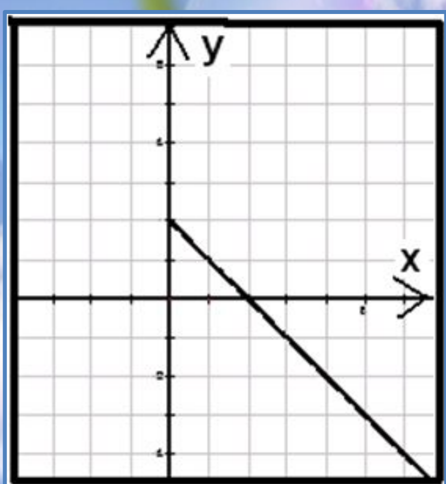
Чтобы построить график функции вида y=|f(|x|)| нужно:

1)Построить график функции y=f(x) для x≥0.

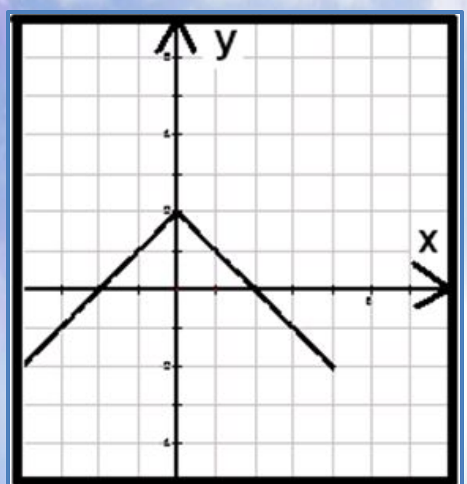
2)Отобразить построенную часть графика симметрично относительно оси ординат.

3)Участки полученного графика, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отразить относительно этой оси.

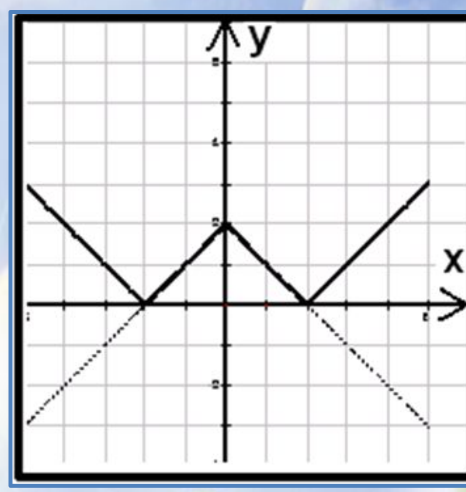
Пример: Построить график функции y=|2-|x||.



y=2-x при x≥0



y=2-|x|



y=|2-|-x||

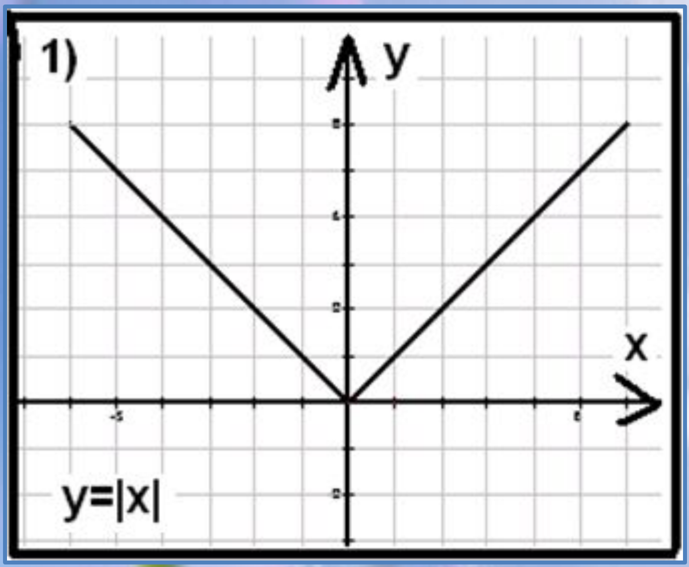
Отметим, что данный и ему подобные графики можно построить другими способами. Рассмотрим один из них.

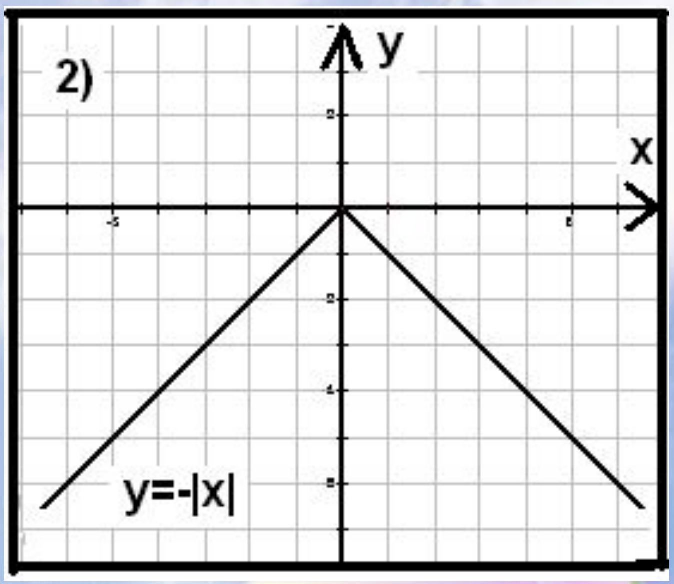
На главную

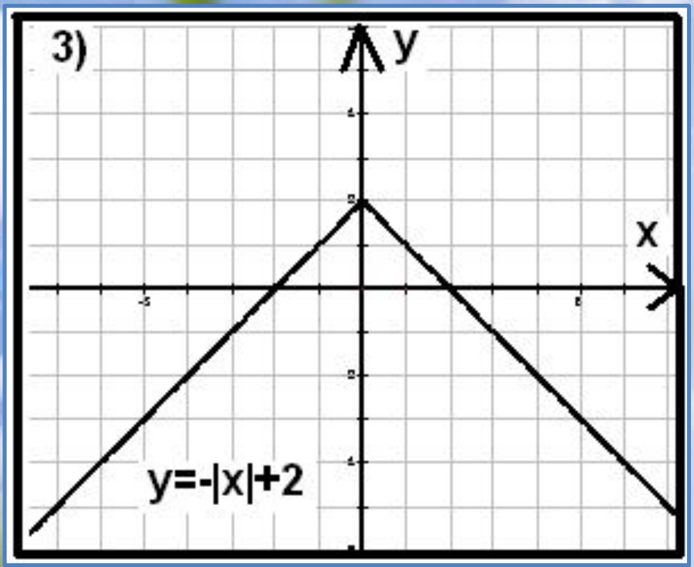
Назад

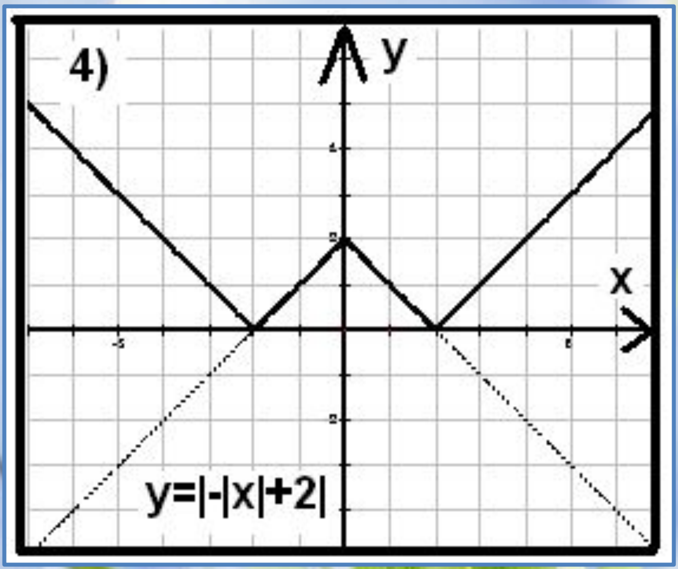
Далее

Второй способ.









На главную

Назад

Далее

Графики «функций» $|y|=f(x)$ при $f(x)\geq 0$; $|y|=|f(x)|$

1. Построение графиков «функций» вида $|y|=f(x)$ при $f(x)\geq 0$.

По определению абсолютной величины $y=\pm f(x)$, где $f(x)\geq 0$. Строго говоря, y нельзя назвать функцией x, так как каждому значению аргумента x будут соответствовать два значения «функции»: $+f(x)$ и $-f(x)$, поэтому далее в аналогичных случаях будем брать слово «функция» в кавычки или называть зависимостью.

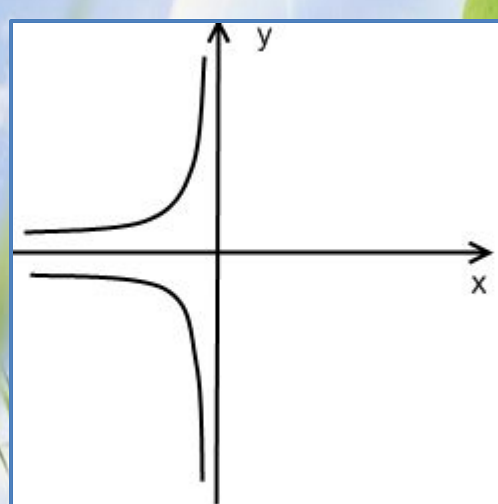
Алгоритм построения:

1) Установить, для каких x выполняется условие $f(x)\geq 0$.

2) На найденных промежутках значений x построить график функции $y=f(x)$.

3)Выполнить зеркальное отражение графика относительно оси ох.

Пример 1 : $|y|=4/x$



На главную

Назад

Далее

2.Построение графиков «функций» вида |y|=|f(x)|.

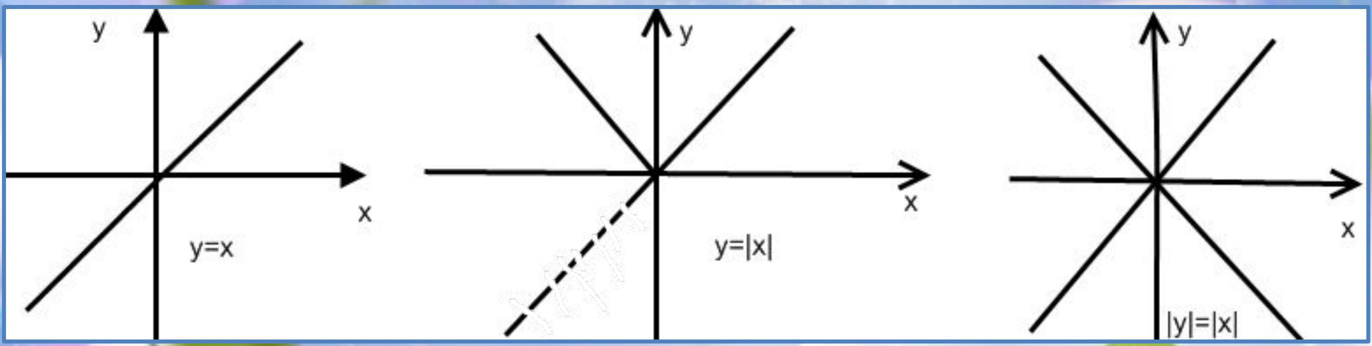
Очевидно, что y=±|f(x)|, т.е. график «функции» будет симметричен относительно оси абсцисс.

Соответствующая последовательность действий:

1) Построить график функции y=|f(x)|.

2) Осуществить его зеркальное отражение относительно оси ox.

Пример 2: |y|=|x|



На главную

Назад

Далее

Графики функций вида $y=|x-x_1|+|x-x_2|+\ldots+|x-x_n|$ и $y=|||x-a|-b|-c|$

Чтобы построить график функции вида $y=|||x-a|-b|-c|$ и $y=|x-x_1|+\ldots+|x-x_n|$, можно найти точки «перелома» функции, а затем провести ряд тождественных преобразований на каждом из промежутков, ограниченных точками «перелома». Однако бывает целесообразнее использовать способ, связанный с геометрическим преобразованием графиков функций.

Пример *1:*

Построить график функции $y=|x-1|+|x-2|$.

Рассмотрим последовательность действий.

1) Найти абсциссы точек «перелома» графика функции. В данном случае используем для этого условия:

$x-1=0 \qquad x-2=0$

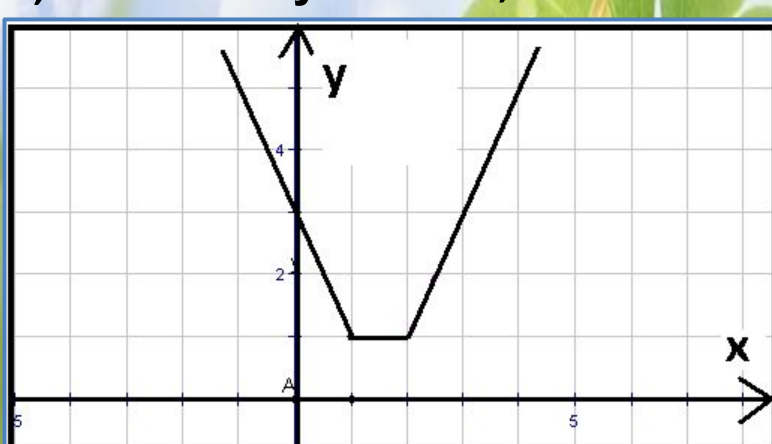
$x=1 \qquad x=2$

2)Рассмотреть далее функцию на каждом из полученных промежутков: (-∞; 1); [1;2]; [2;+∞)

Если $x<1$,то
$y=-x+1-x+2$,
$\underline{y=-2x-3.}$

Если $1\le x<2$, то
$y=x-1-x+2$,
$\underline{y=1.}$

Если $x\ge 2$, то
$y=x-1+x-2$,



Итак,

$$y=\begin{cases} -2x+3, & \text{если } x<1,\\ 1, & \text{если } 1\le x<2,\\ 2x-3, & \text{если } x\ge 2. \end{cases}$$

На главную

Назад

Далее

Графический метод решения некоторых задач с параметрами

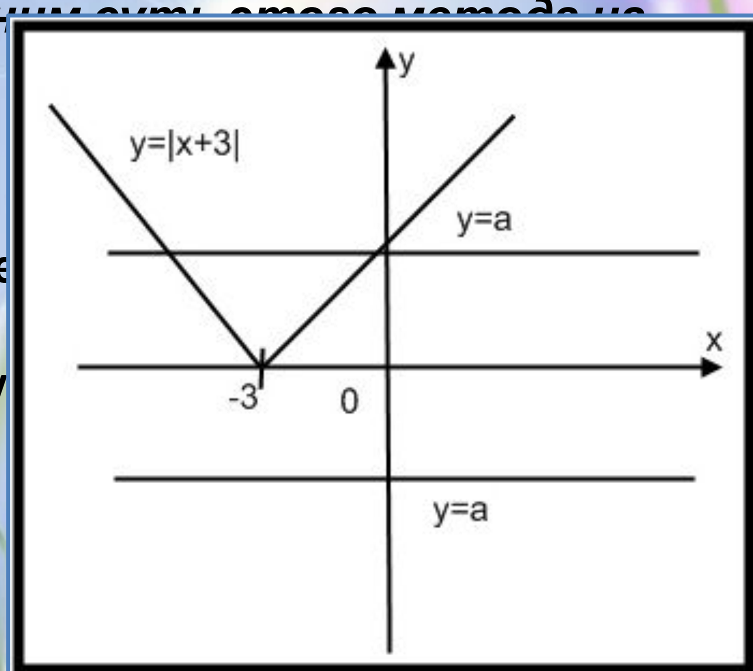
Одним из наиболее трудных на экзаменах являются задачи, в которых требуется найти все значения параметров, при которых выполнено некоторое условие. Если хотя бы одно из допустимых значений параметра не исследовано, задача не считается решенной полностью. Нельзя дать универсальных указаний по решению задач с параметрами. Но для уравнений и неравенств первой и второй степени с параметрами при заданном условии можно использовать графический метод решения, как наиболее наглядный. Поясним суть этого метода на конкретных примерах.

Пример 1:

Сколько корней имеет уравнение |x+3|=a?

Решение:

1)Построим в одной системе координат графики функций y=|x+3| и y



2) Прямая y=a не пересекает данный график при a<0, имеет с ним одну общую точку при a=0, имеет с ним две точки пересечения при a>0.

Ответ: корней нет при a<0, один корень при a=0, два корня при a>0.

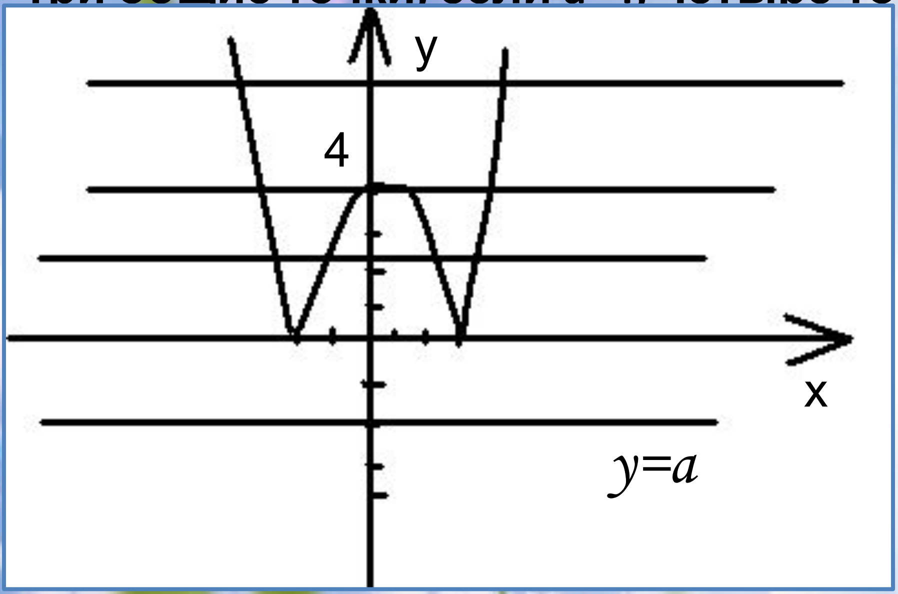
На главную
Назад
Далее

Пример *2.* **Найдите число решений уравнения $|x^2-2x-3|=a$,**
в зависимости от параметра a.

Решение:

1) Построим график функции $y=|x^2-2x-3|$. (Можно выделить полный квадрат: $x^2-2x-3=(x-1)^2-4$).

2) Уравнение $|x^2-2x-3|=a$ имеет столько решений, сколько раз прямая $y=a$ пересекает график функции $y=|x^2-2x-3|$. На рисунке видно, что графики не имеют общих точек, если $a<0$; имеют две общие точки , если $a=0$ и $a>4$; имеют три общие точки, если $a=4$; четыре точки, если $0<a<4$.



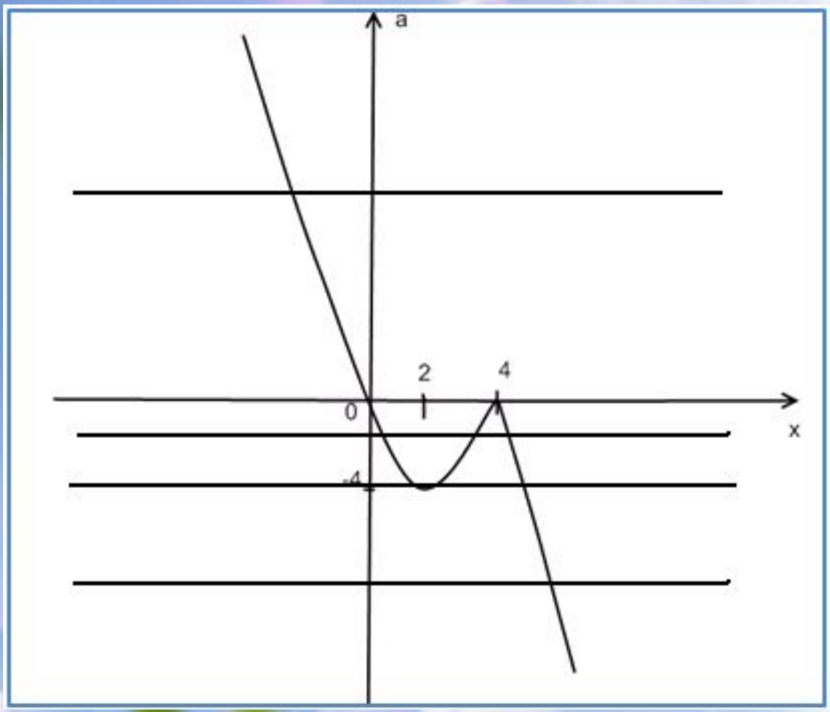
Ответ: корней нет при $a<0$;
два корня при $a=0$ и $a<4$;
три корня при $a=4$;
четыре корня при $0<a<4$.

На главную
Назад
Далее

Пример *3:* **Решить уравнение $x|x-4|+a=0$.**

Решение:

Строим график функции $f(x) = -x|x-4| = \begin{cases} -x^2+4x, & x \ge 4; \\ x^2-4x, & x<4. \end{cases}$



При a <-4 уравнение имеет один корень, являющийся большим корнем уравнения $-x^2+4x=a$; $x^2-4x+a=0$, x=$\sqrt{4-a}$

При a=-4 уравнение имеет два корня, один из которых x=2, а второй больший корень уравнения $-x^2+4x=-4$, $\sqrt{2}$.е. x=2+2

При -4<a<0 уравнение имеет три корня, д$\sqrt{(4+a)}$оторых являются корнями уравнения $x^2-4x-a=0$: x=2± $\sqrt{4-a}$а третий больший корень уравнения $-x^2+4x=a$, т.е. x=2+ .

При a=0 уравнение имеет два корня: x=0 и$\sqrt{(4+a)}$

При a>0 уравнение и$\sqrt{4-a}$т один корень, яв$\sqrt{4+a}$щийся мень$\sqrt{4-a}$и корнем ур$\sqrt{4+a}$ения $x^2-4x=a$, т.е.x=2- .

Ответ: при a<-4 x=2+ ; при -4≤a≤0 x=2± , x=2+ ;при a>0 x=2-

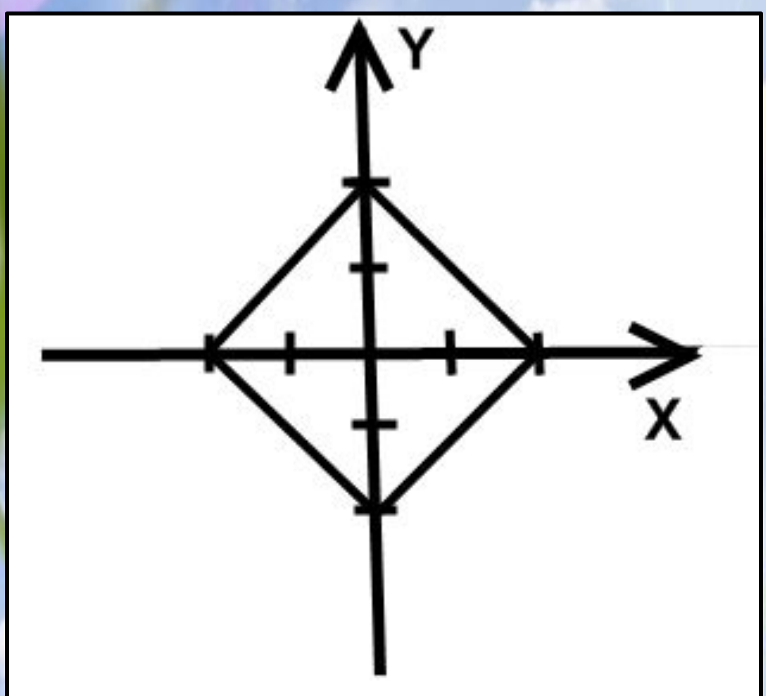
На главную | Назад | Далее

Построение графиков «функций», аналитические выражения которых содержат знак модуля, выраженных неявно

Пример 1: Построить график «функции» |x|+|y|=2

1. Построим график функции y= 2-x - график прямая.

2. Далее осуществляем последовательное двукратное отображение графика относительно оси ох, а затем относительно оси оу.



На главную

Назад

Далее

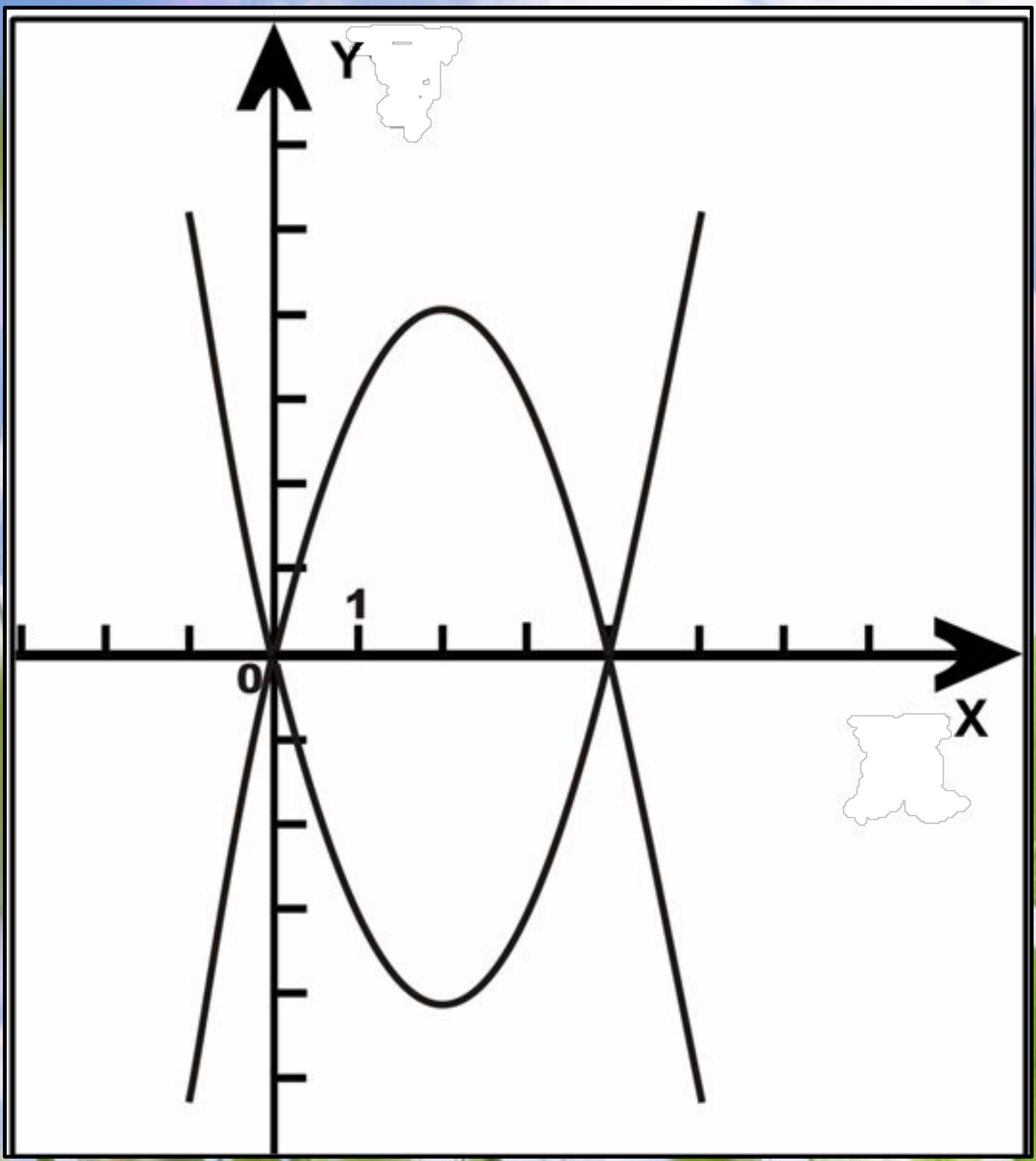
Пример 2: Построить график «функции» $|y|=|X^2-4X|$

1. Построим график квадратичной функции $y=x^2-4x$ - график парабола.

$y=(x^2-4x+4)-4=(x-2)^2-4$

Сдвиг на 2 клетки вправо и на 4 вниз.

2. Далее преобразуем данный график путем отображения его относительно оси OX.



На главную

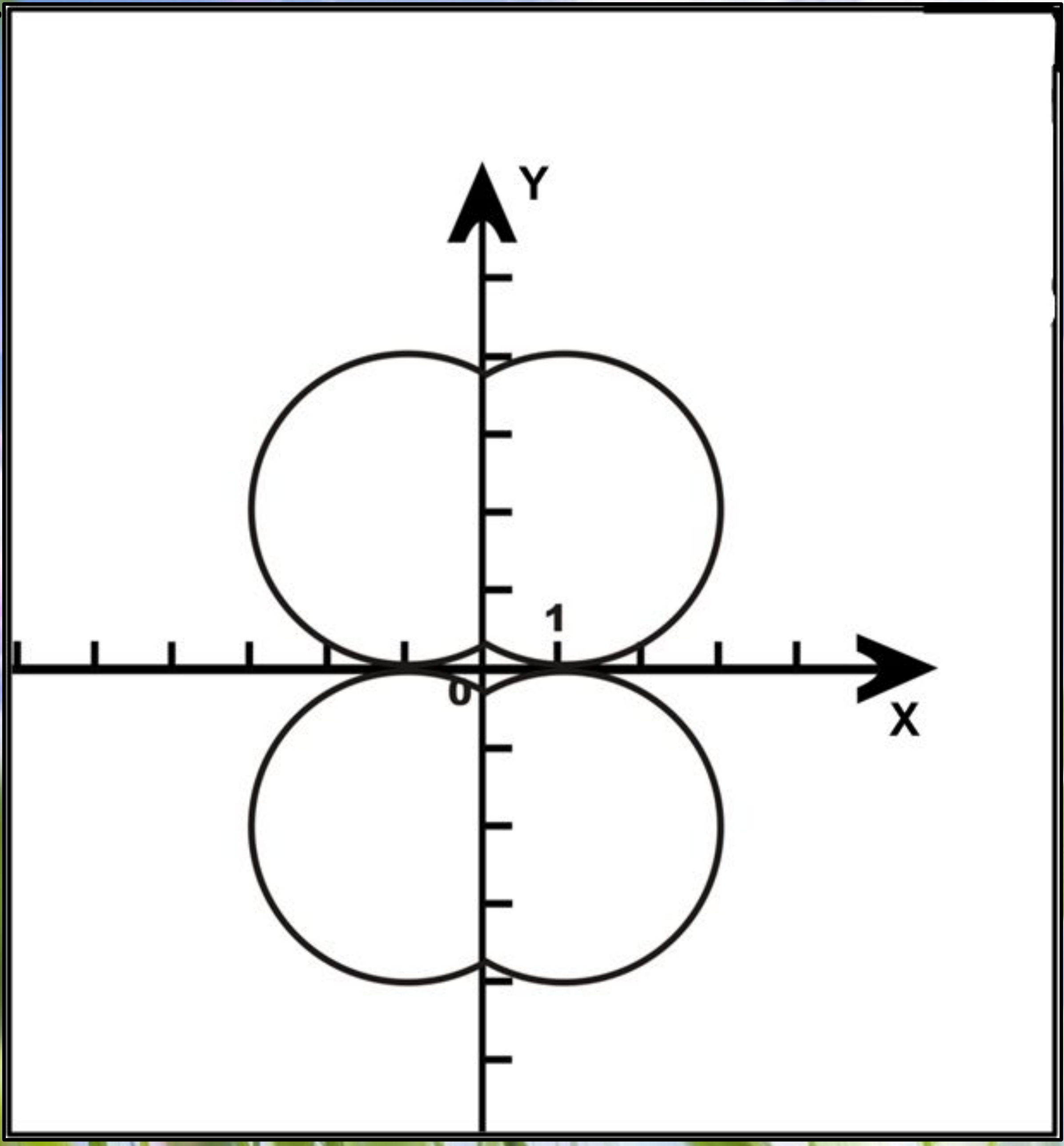
Назад

Далее

Пример *3:* **Построить график «функции» $(|x|-1)^2+(|y|-2)^2=4$**

1. Построим график функции (x-1)+(y-2)=4 –график окружность с центром в точке (1;2) и радиусом 2.

2. Далее преобразуем данный график путем отображения его относительно оси ОХ, а затем оси OY.



На главную

Назад

Далее

Задание 1: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ |x|+y=1 \end{cases}$$

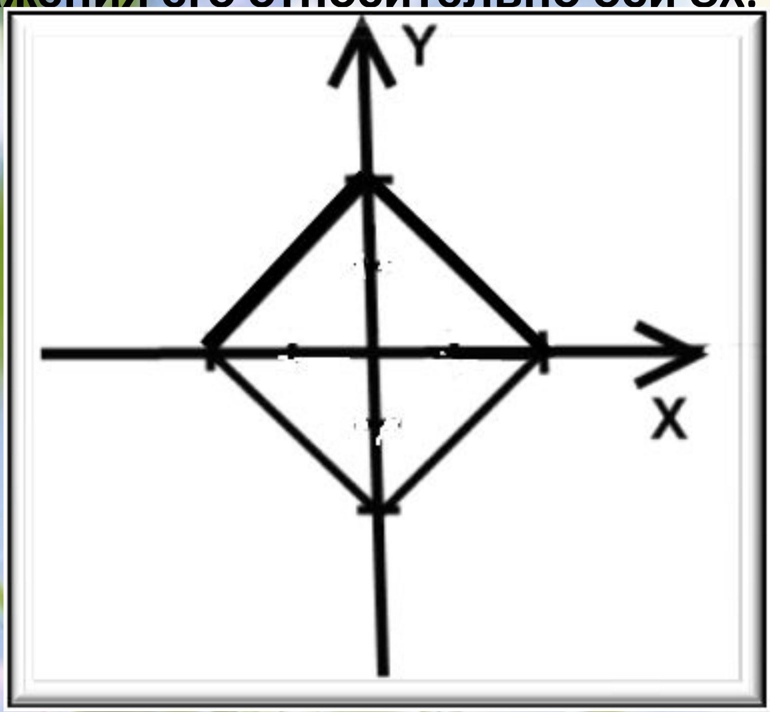
1. Решим систему уравнений с помощью графика.
2. Построим в одной системе координат графики функции:

а) $|y|=1-|x|$:

1. Построим график функции $y=1-x$ - график прямая.
2. Далее преобразуем данный график путем отображения его относительно оси OX, а затем оси OY.

б) $y=1-|x|$:

1. Построим график функции $y=1-x$ - график прямая.
2. Далее преобразуем данный график путем. отображения его относительно оси OX.



Ответ: $y=1-|x|$, где $x \in [-1;1]$.

На главную

Назад

Далее

Задание 2: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ y=5+|x-1| \end{cases}$$

Задание 2:

1. Построим в одной системе координат графики функции:

а) x-1 + y-5 =1:

1. Построим график функции y=7-x - график прямая.

2. Далее преобразуем данный график путем отображения его относительно оси OX, а затем оси OY.

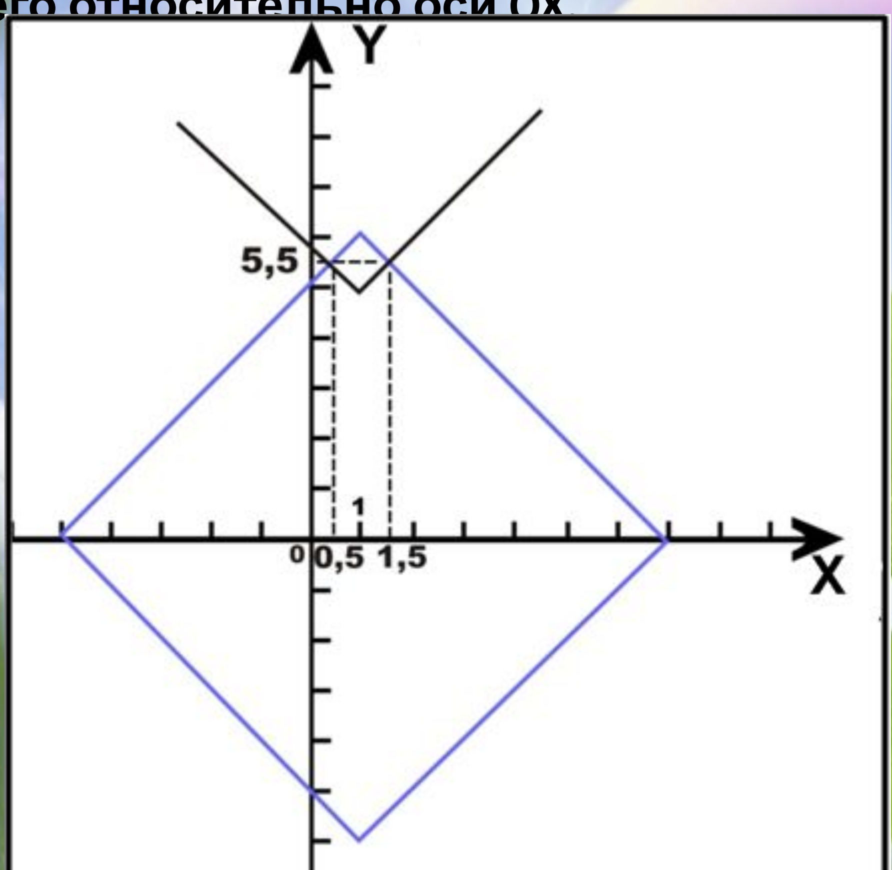
б) y=5+ x-1 :

1. Построим график функции y=4+x- график прямая

2. Далее преобразуем данный график путем отображения его относительно оси OX.

Ответ: (1,5 ; 5,5)

(0,5 ; 5,5)



На главную

Назад

Далее

Построение множества точек плоскости, задаваемого соотношениями

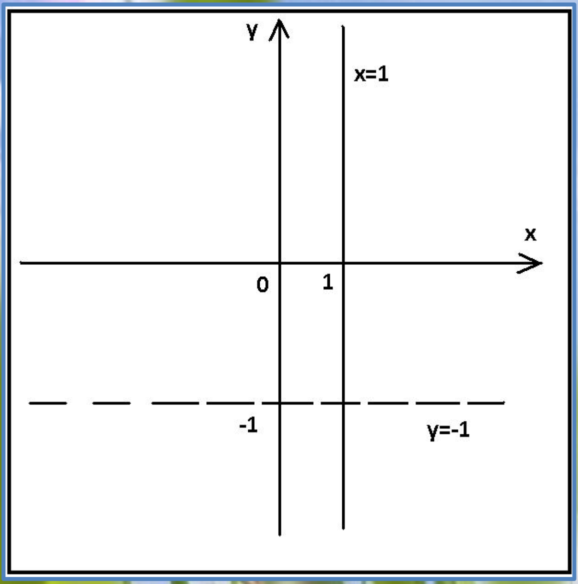
Пример *1:*

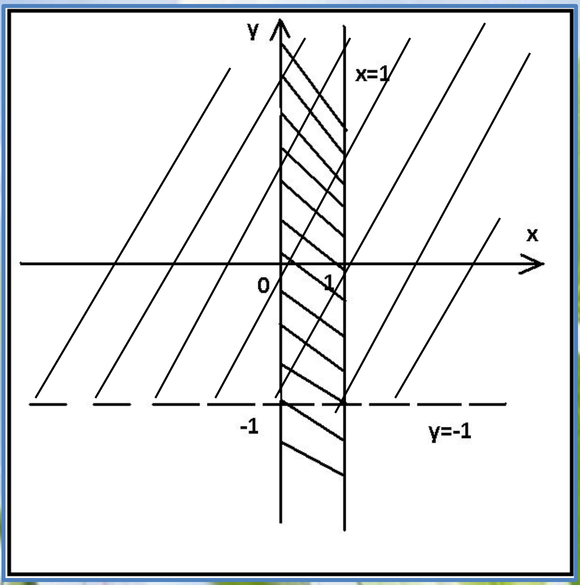
Построить множество точек плоскости, заданных системой неравенств:

$$\begin{cases} 0<x\leq 1 \\ y>-1 \end{cases}$$

Решение

1) **Построим прямые x=1; x=0; y=-1. Эти прямые служат границами заданного множества.**
2) **Определяем части плоскости, которые удовлетворяют неравенствам: x>0; x≤1; y>-1.**
3) **Искомое множество точек показано двойной штриховкой.**





На главную

Назад

Далее

ИСтОчНикИ ИнфОрмацИи

1) Математика для поступающих в десятый лицейский класс: Варианты конкурсных заданий: Учебное пособие / Под общ. ред. профессора В.Я. Райцина; сост. Л.А.Приходько. Издательство «Экзамен», 2006.- 196 с. (Серия «Поступаем в лицей»).

2) А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов. Илекса,2003.-320 с.

3) П.Ф.Севрюков,А.Н.Смоляков Школа решения задач с параметрами М.:Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2011.-212с.

4) http://www.detiseti.ru

Презентацию выполнила Правдина Анастасия, победитель конкурса учебно-исследовательских работ по математике в рамках областного научного конкурса «ИНТЕЛЛЕКТУАЛ» 2011г., финалист V международного конкурса «Математика и проектирование» 2011г.

На главную