

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

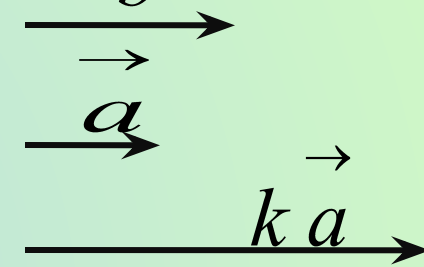
Геометрия 9 класс

Лемма: Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны и $\vec{a} \neq 0$, то существует такое число k , что

$$\vec{b} = k\vec{a}$$

Доказательство:

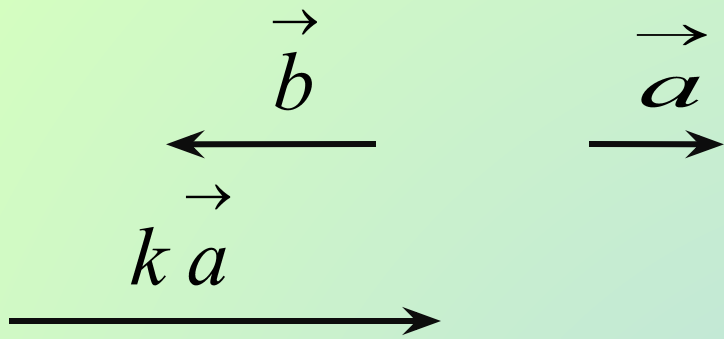
1) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$. Возьмём число $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$; т.к. $k \geq 0$,



то векторы $k\vec{a}$ и \vec{b} сонаправлены. Кроме

того их длины равны $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Поэтому $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$



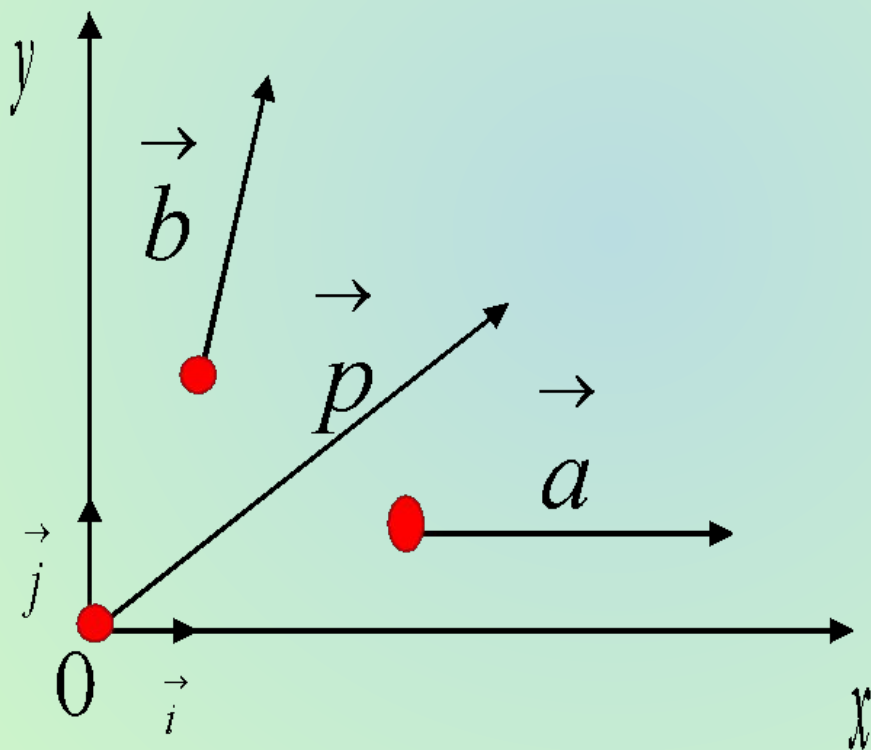
2) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$. Возьмём число $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$,

т. к. $k < 0$, то векторы $k\vec{a}$ и \vec{b} не сонаправлены.

Их длины также равны $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}|$

$= |\vec{b}|$ Поэтому $\vec{b} = k\vec{a}$

Пусть \vec{a} и \vec{b} – данные вектора. Вектор $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$,
 x и y – некоторые числа, тогда говорят \vec{p} разложен по
векторам \vec{a} и \vec{b} . x и y – коэффициенты разложения.



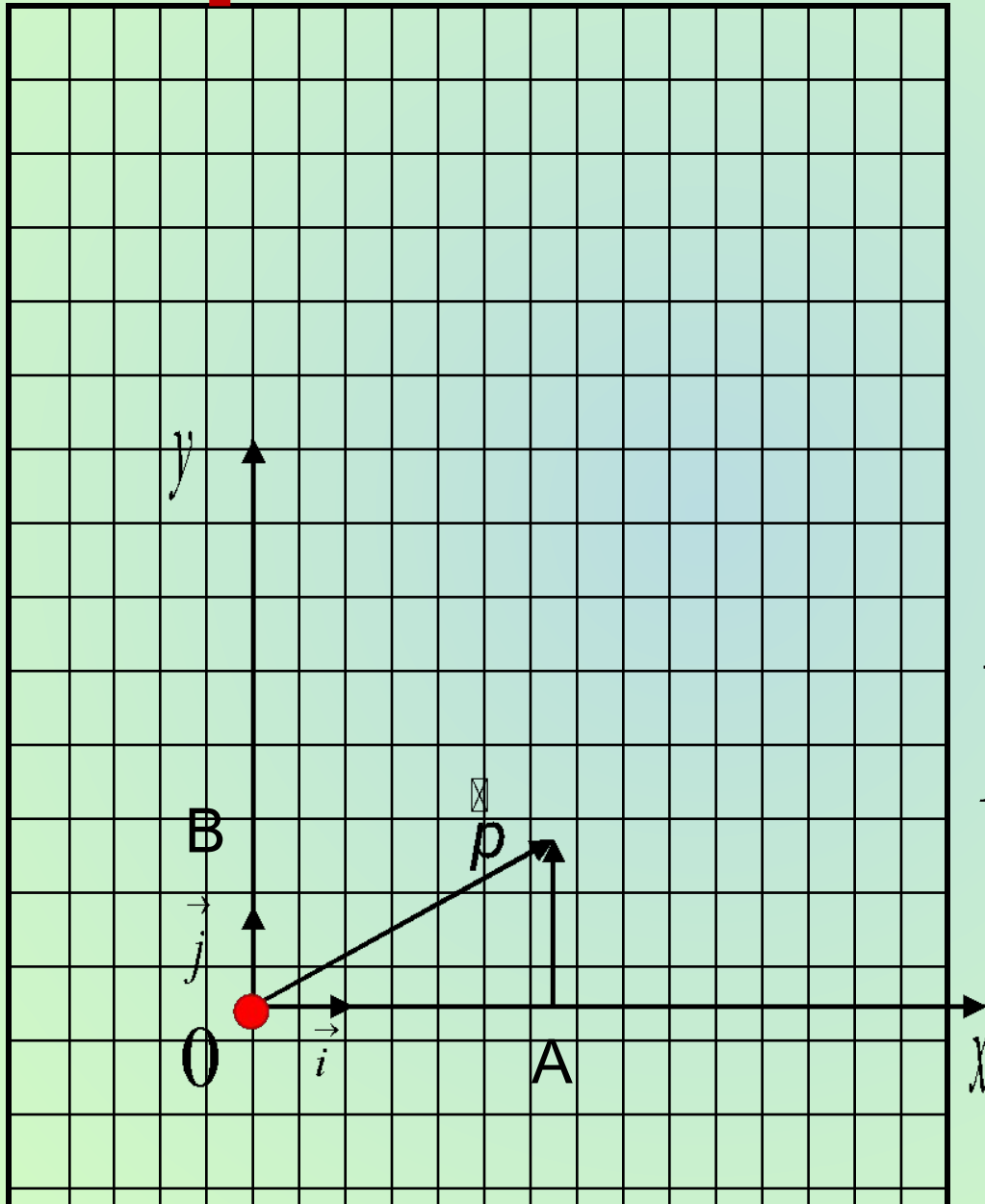
Теорема: Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство: Пусть \vec{a} и \vec{b} - неколлинеарные векторы. Докажем, что любой вектор \vec{p} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} .

Тогда $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x - некоторое

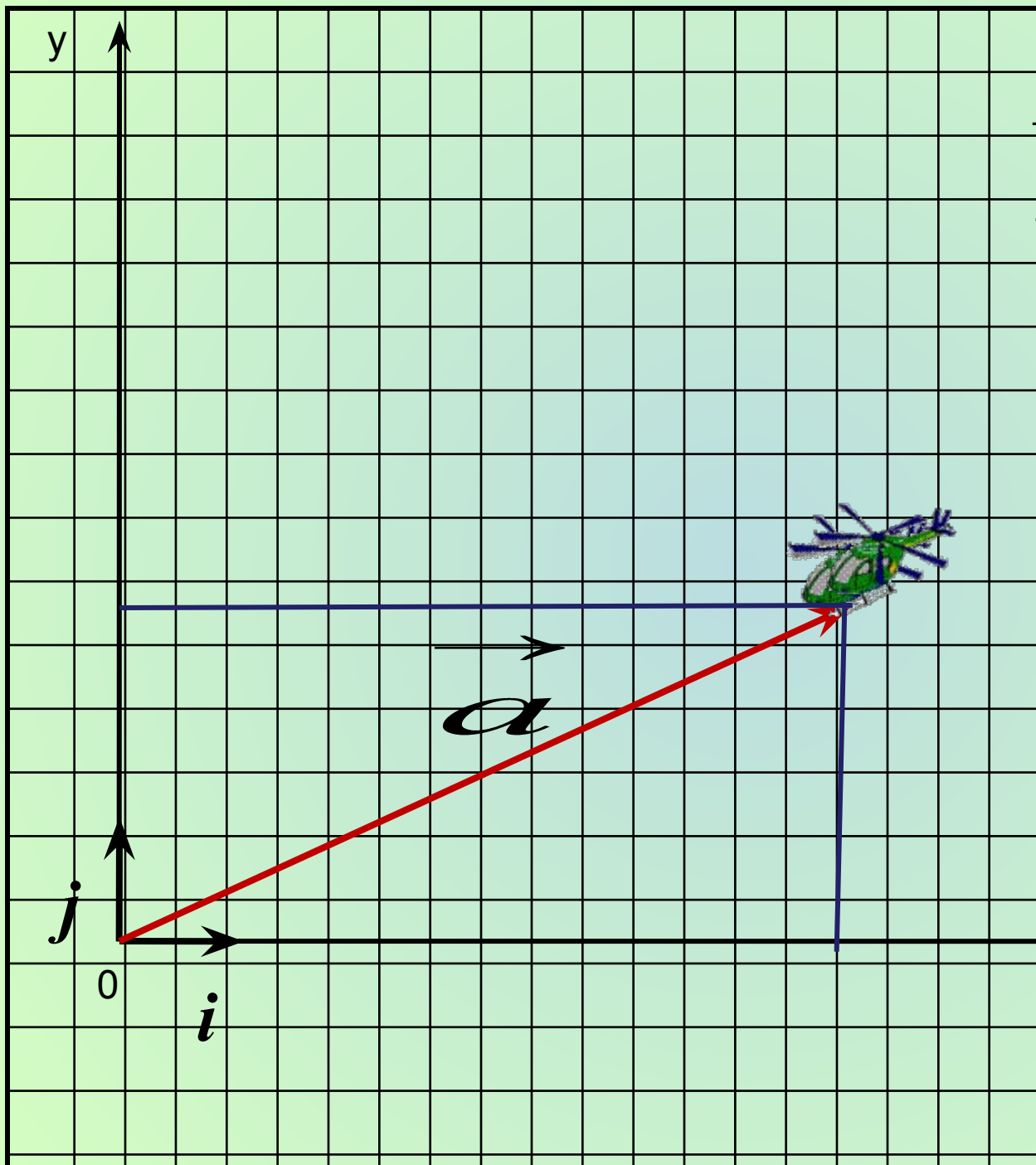
число
 $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, т.е. \vec{p} разложен по векторам \vec{a} и \vec{b} .

Координаты вектора



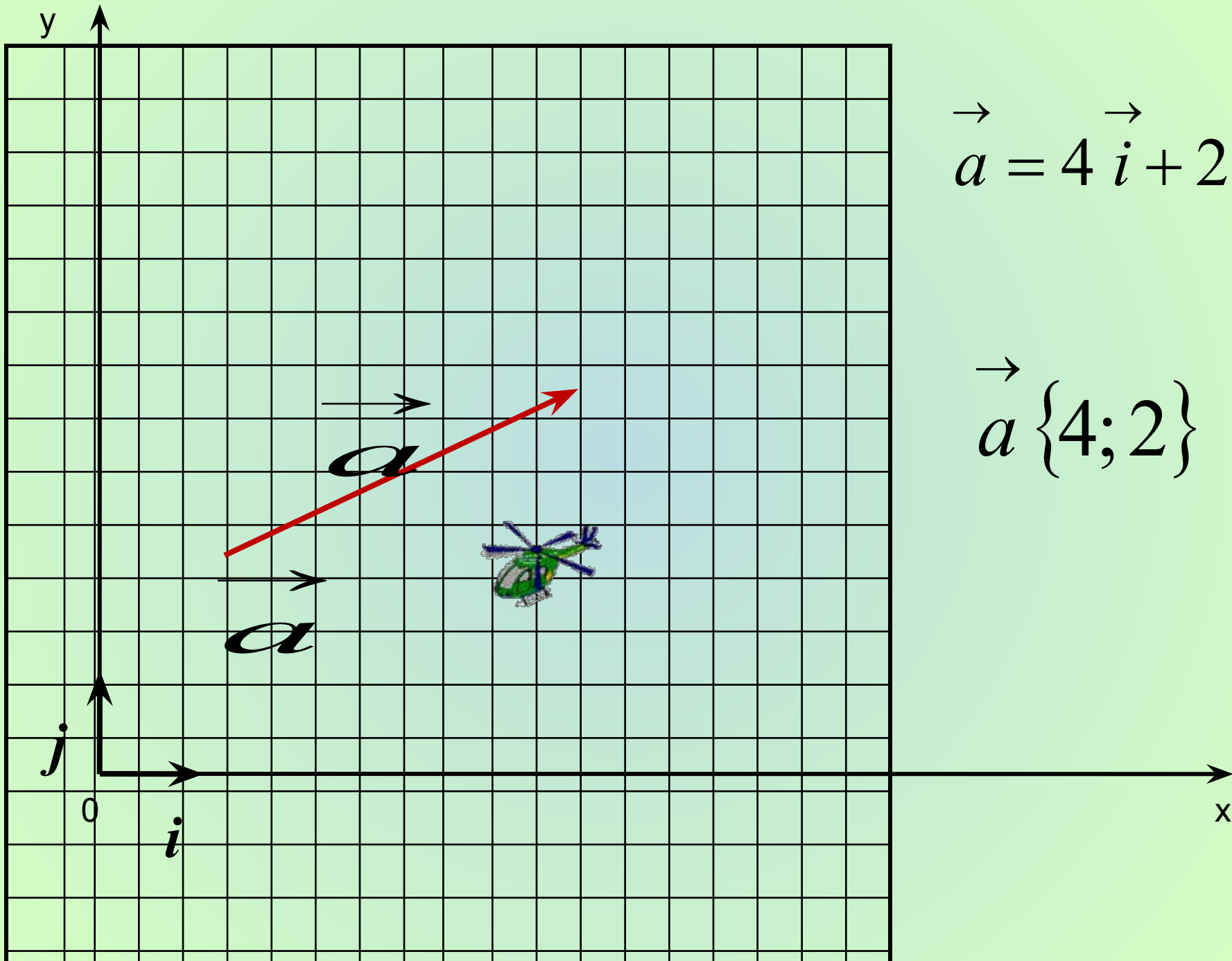
$$\vec{p} \{x; y\}$$

$$\vec{p} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$



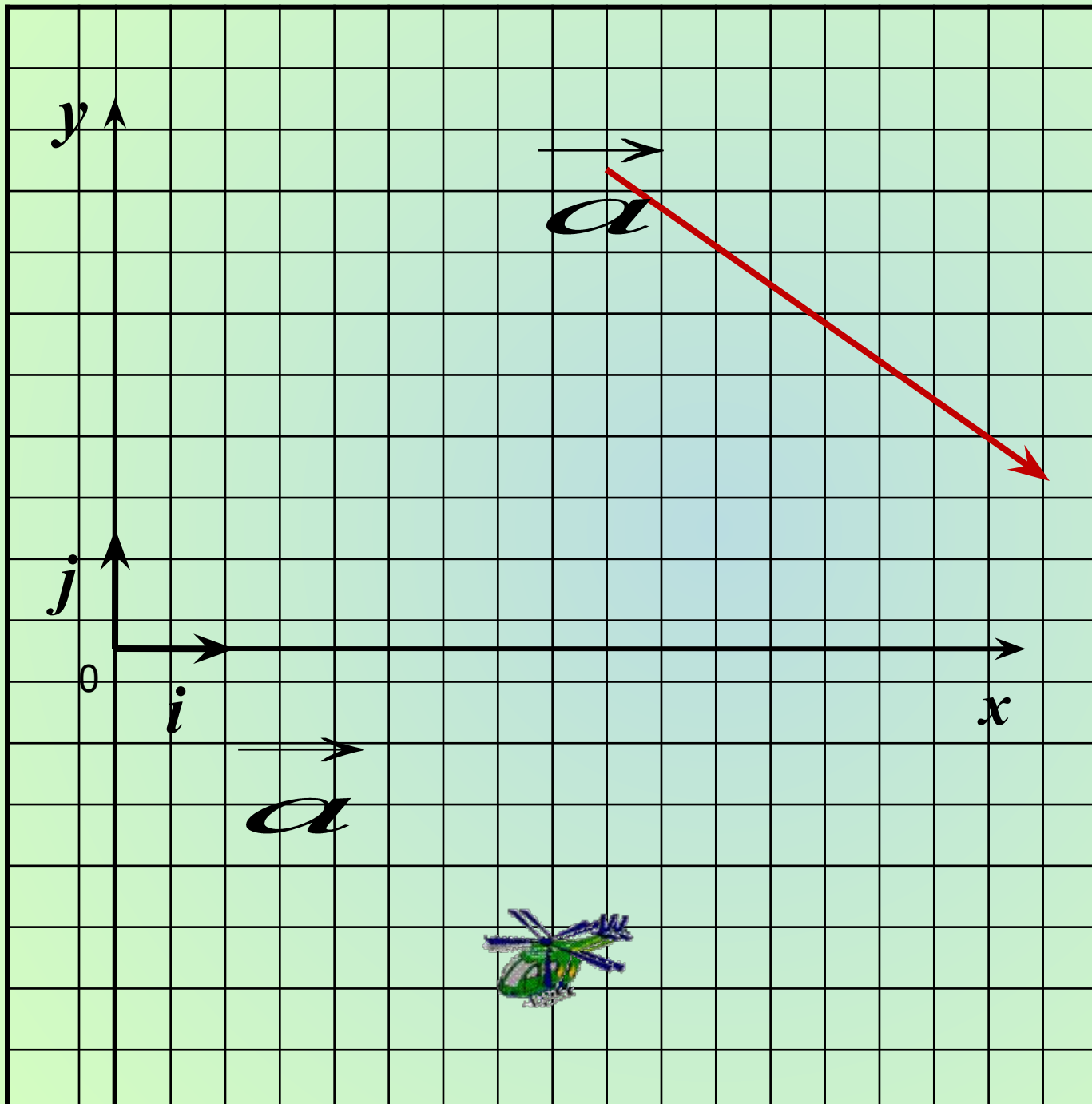
$$\vec{a} = 7 \vec{i} + 3 \vec{j}$$

$$\vec{a} \{7; 3\}$$



$$\vec{a} = 4 \vec{i} + 2 \vec{j}$$

$$\vec{a} \{4; 2\}$$



$$\vec{a} = 4 \vec{i} - 3 \vec{j}$$

$$\vec{a} \{4; -3\}$$

1⁰. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$

2⁰. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$

3⁰. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. $k\vec{a} = kx_1\vec{i} + ky_1\vec{j}$