МНОГОГРАННИКИ И ТЕЛА С КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

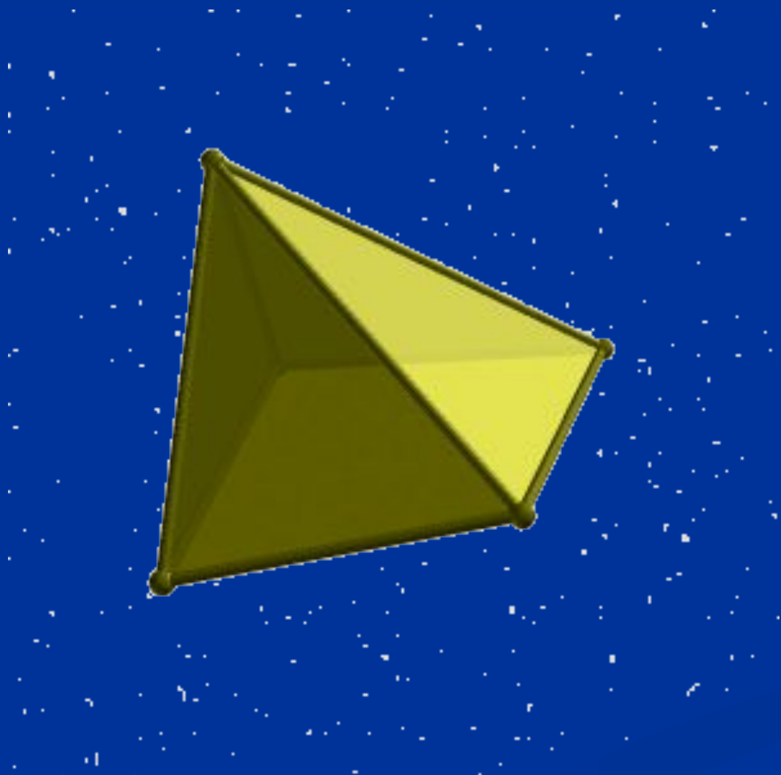
Геометрические тела условно можно подразделить на два класса: многогранники и тела с кривыми поверхностями.

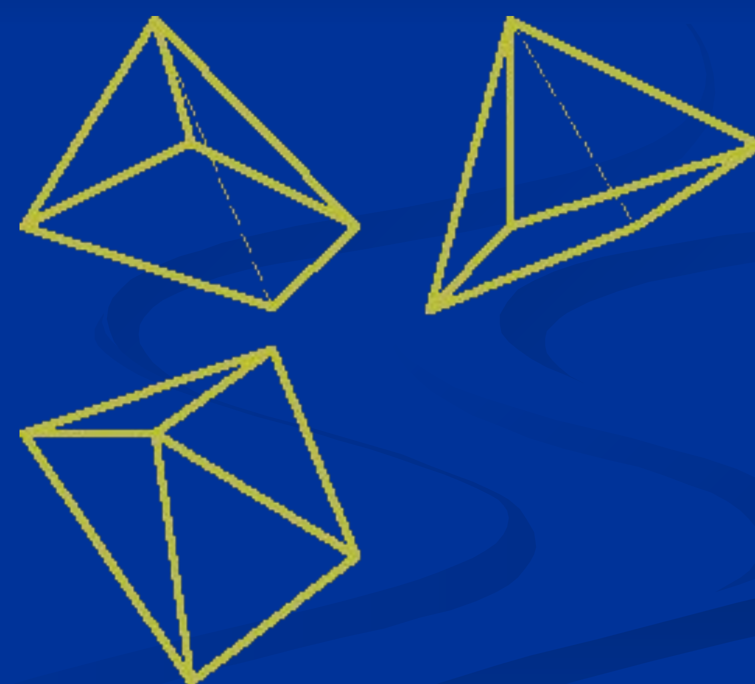
Многогранник представляет собой тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками (гранями). Пересекаясь друг с другом, грани образуют ребра, а те в свою очередь на сходящихся концах – вершины.

Многогранник называется **выпуклым**, если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой грани, и **правильным**, если все его грани, плоские и многогранные углы равны между собой.

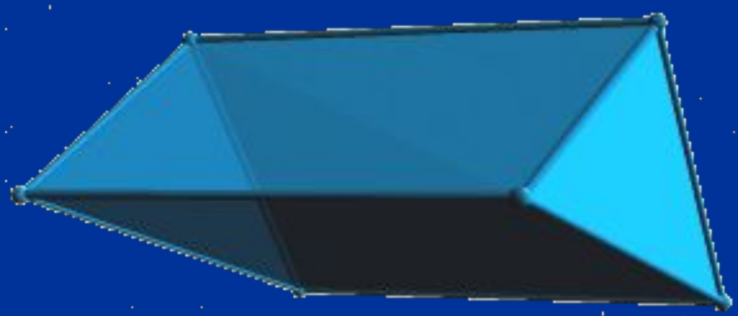
Кривую поверхность можно представить как траекторию движения некоторой линии (образующей) в пространстве. Образующая может быть прямой или кривой линией. Если поверхность образуется движением прямой, то она называется **линейчатой**, если – кривой, то **нелинейчатой**. Примерами простейших линейчатых поверхностей являются конус и цилиндр.

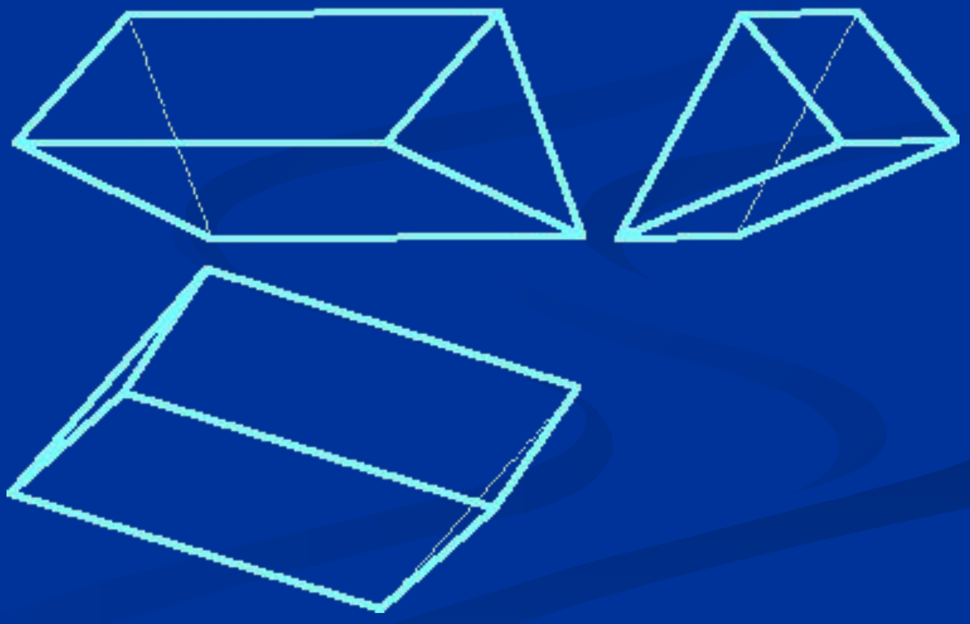
1. *Пирамида* - это многогранник, одна грань которого - многоугольник, а остальные грани - треугольники с общей вершиной. Пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр многоугольника. Пирамида называется усеченной, если вершина её отсекается плоскостью



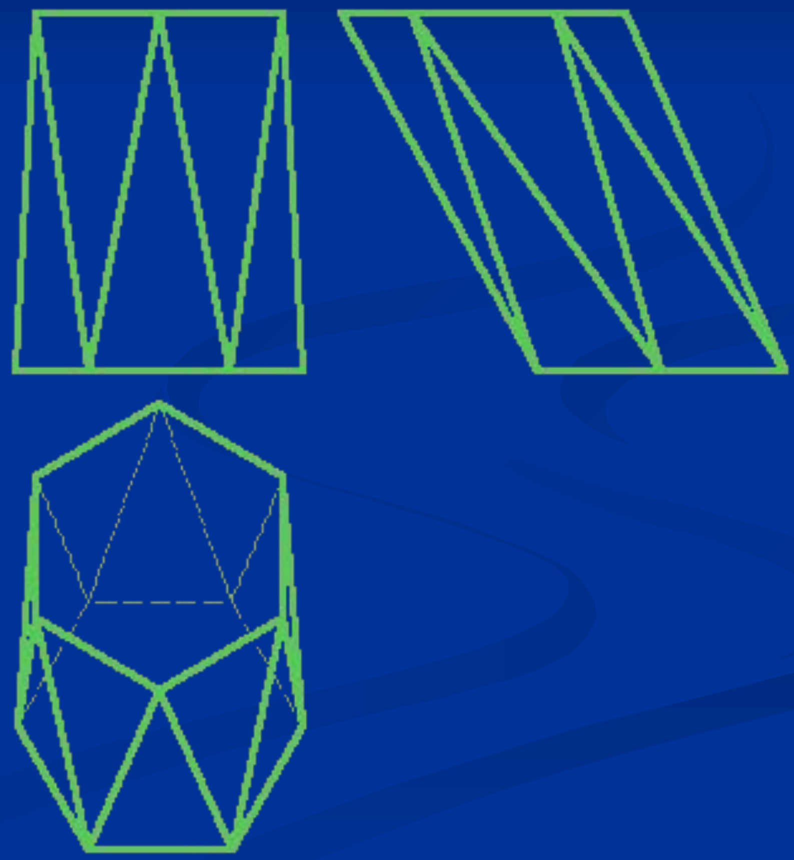


2. *Призма* - многогранник, две грани которого (основания призмы) представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами, а все другие грани параллелограммы. Призма называется прямой, если её ребра перпендикулярны плоскости основания. Если основанием призмы является прямоугольник, призму называют параллелепипедом





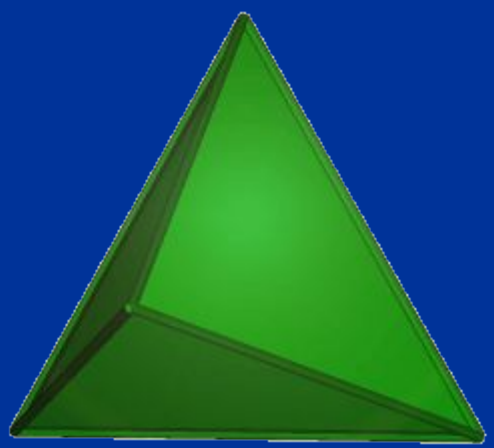
3. ***Призматоид*** - многогранник, ограниченный двумя многоугольниками, расположенными в параллельных плоскостях (они являются его основаниями); его боковые грани представляют собой треугольники или трапеции, вершины которых являются и вершинами многоугольников оснований

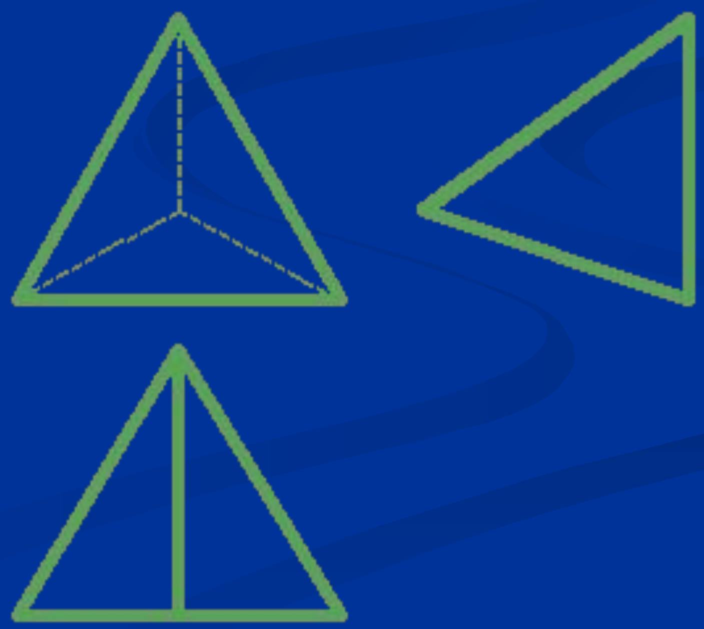


4. *Тела Платона.* Многогранник, все грани которого представляют собой правильные и равные многоугольники, называют *правильными*. Углы при вершинах такого многогранника равны между собой.

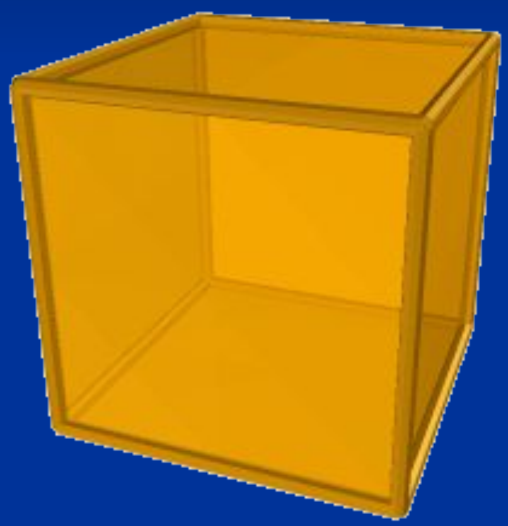
Существует пять типов правильных многогранников. Эти многогранники и их свойства были описаны более двух тысяч лет назад древнегреческим философом Платоном, чем и объясняется их общее название.

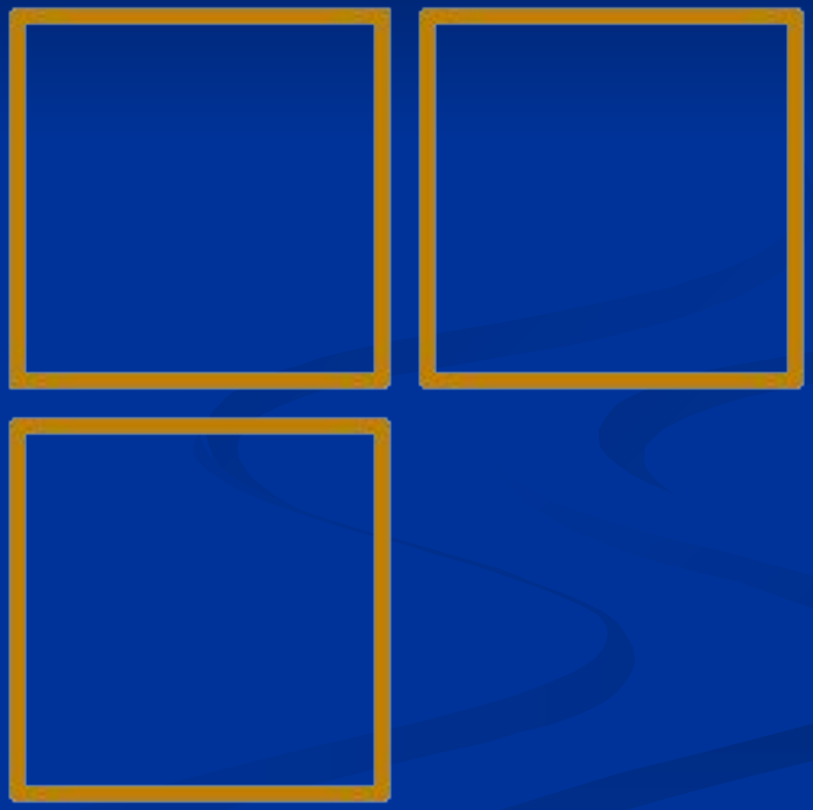
Каждому правильному многограннику соответствует другой правильный многогранник с числом граней, равным числу вершин данного многогранника. Число ребер у обоих многогранников одинаково. *Тетраэдр* - правильный четырехгранник. Он ограничен четырьмя равносторонними треугольниками (это - правильная треугольная пирамида).



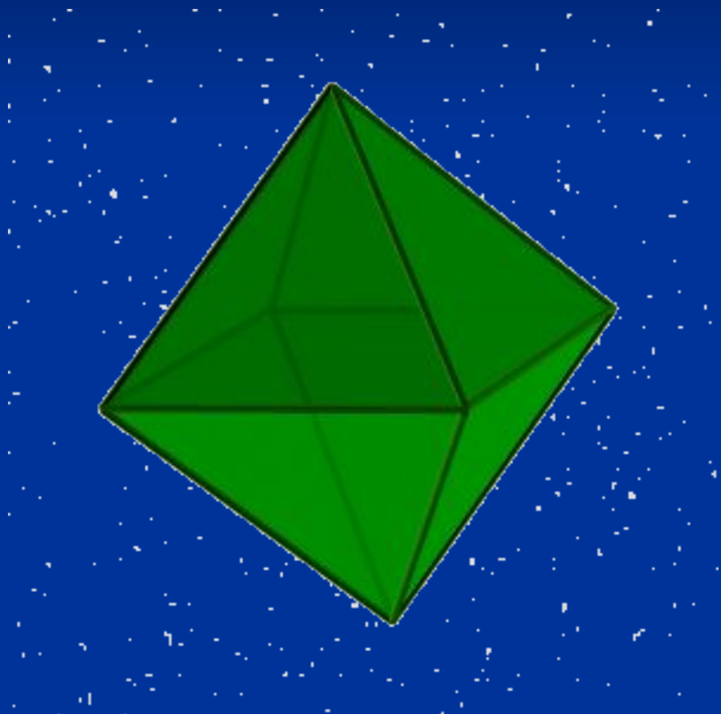


Гексаэдр **- правильный шестигранник. Это куб, состоящий из шести равных квадратов.**

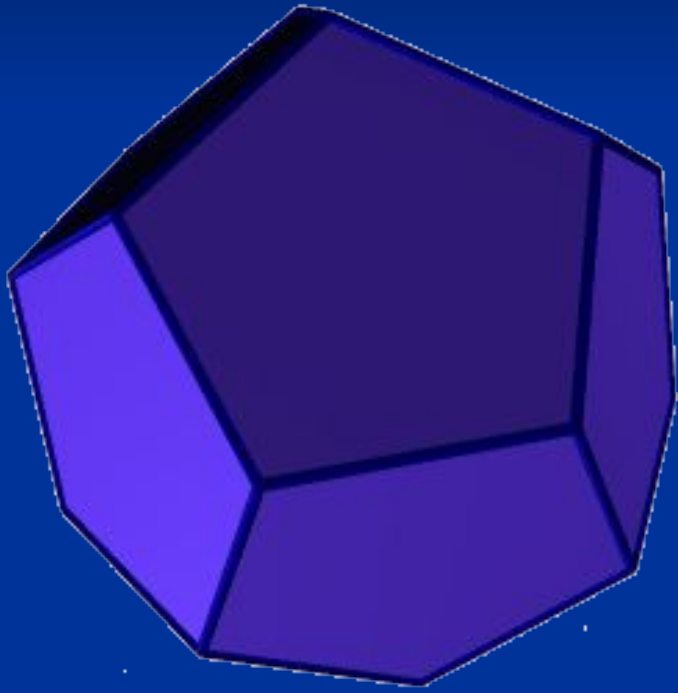


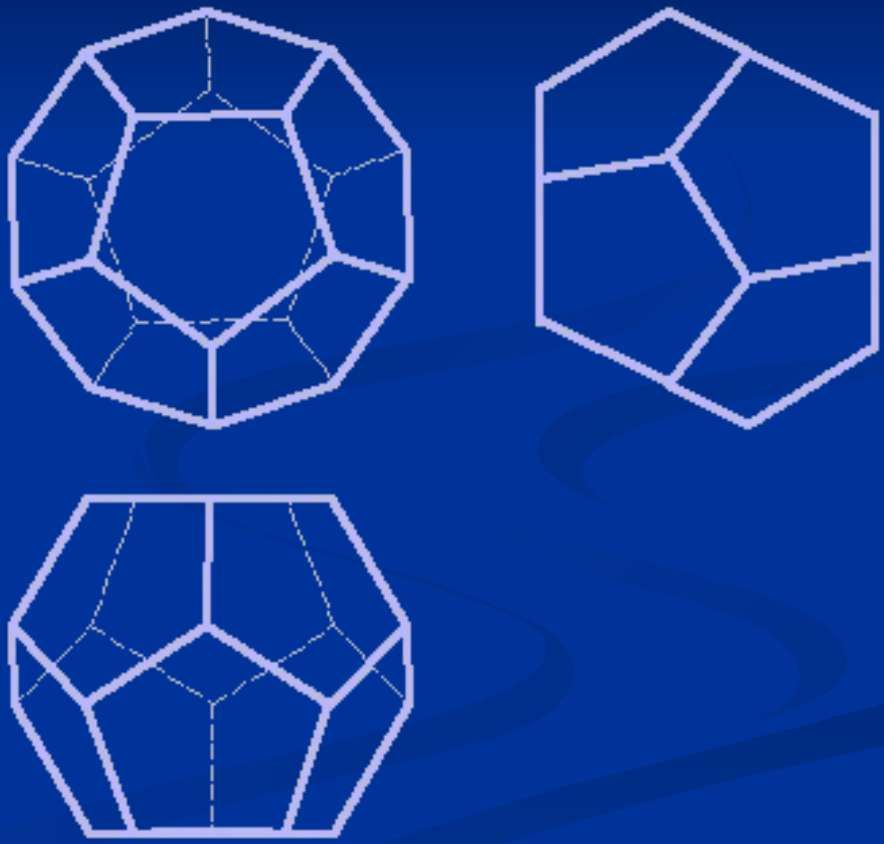


Октаэдр - правильный восьмигранник. Он состоит из восьми равносторонних и равных между собой треугольников, соединенных по четыре у каждой вершины.



Додекаэдр - правильный двенадцатигранник, состоит из двенадцати правильных и равных пятиугольников, соединенных по три около каждой вершины

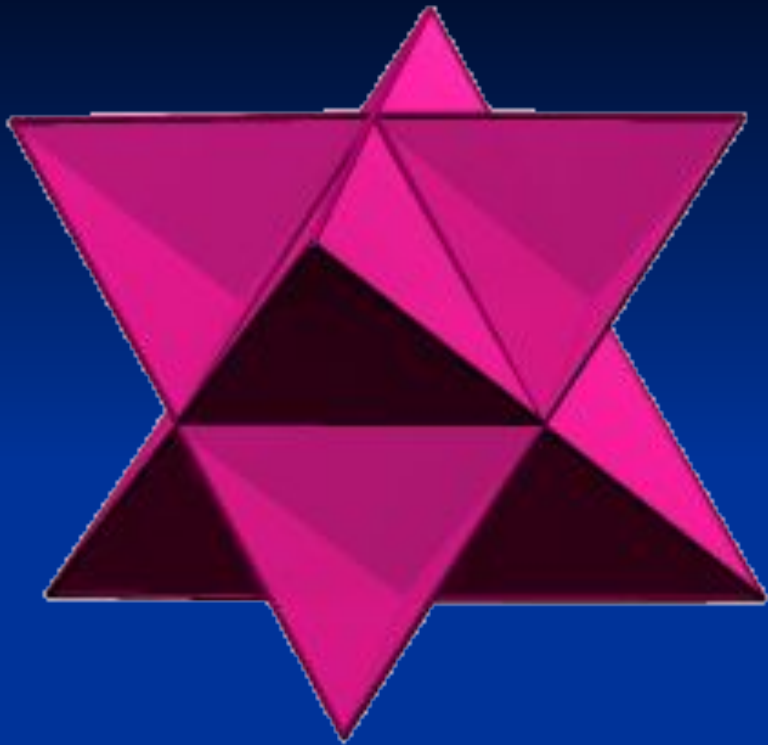




Икосаэдр - состоит из 20 равносторонних и равных треугольников, соединенных по пять около каждой вершины

5. Звездчатые формы и соединения тел Платона. Кроме правильных выпуклых многогранников существуют и правильные выпукло-вогнутые многогранники. Их называют звездчатыми (самопересекающимися). Рассматривая пересечения продолжения граней Платоновых тел, мы будем получать звездчатые многогранники.

Звездчатый октаэдр - восемь пересекающихся плоскостей граней октаэдра отделяют от пространства новые "куски", внешние по отношению к октаэдру. Это малые тетраэдры, основания которых совпадают с гранями октаэдра. Его можно рассматривать как соединение двух пересекающихся тетраэдров, центры которых совпадают с центром исходного октаэдра. Все вершины звездчатого октаэдра совпадают с вершинами некоторого куба, а ребра его являются диагоналями граней (квадратов) этого куба. Дальнейшее продление граней октаэдра не приводит к созданию нового многогранника. Октаэдр имеет только одну звездчатую форму. Такой звездчатый многогранник в 1619 году описал Кеплер (1571-1630) и назвал его stella octangula - восьмиугольная звезда.



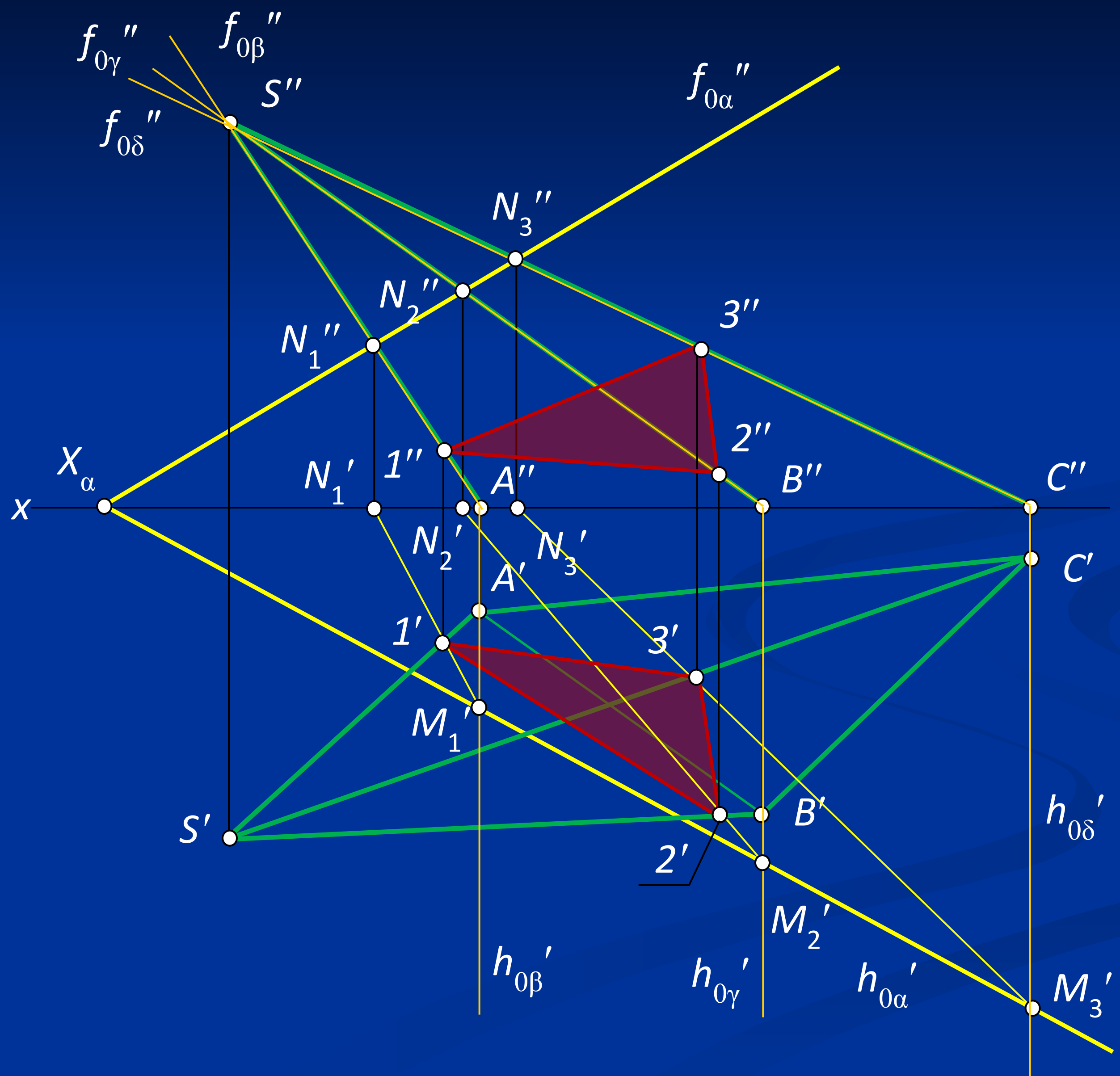
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКА ПЛОСКОСТЬЮ

Сечение многогранника плоскостью представляет собой плоскую замкнутую ломаную линию.

Построение сечения можно провести двумя способами:

- **способом «граней»** – найти линии пересечения граней с заданной плоскостью;
- **способом «ребер»** – найти точки встречи ребер пирамиды с плоскостью и последовательно соединить их.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКА ПЛОСКОСТЬЮ

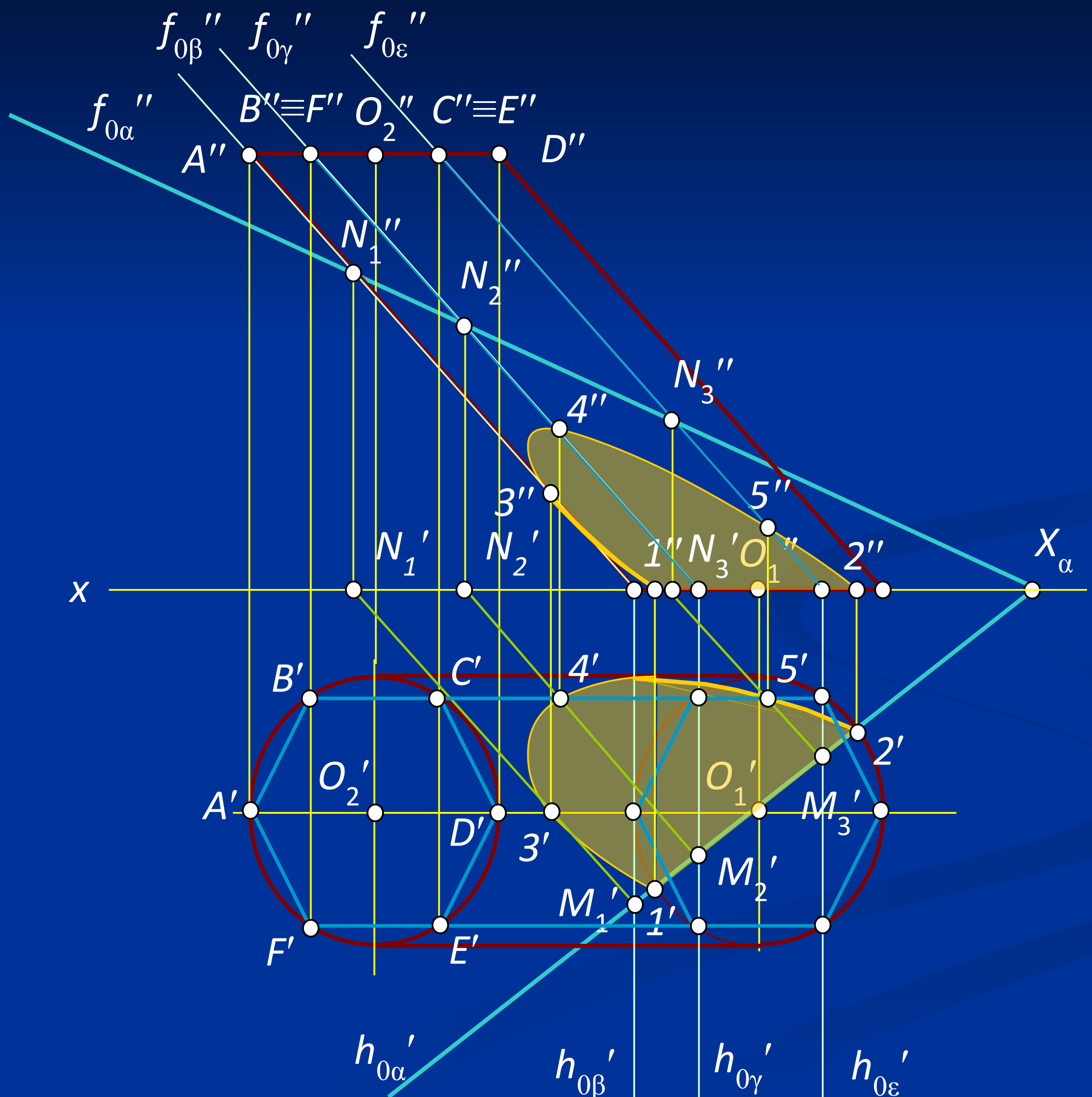


ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНУСА И ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЬЮ

Для построения сечения конуса или цилиндра плоскостью в нее необходимо вписать многогранник (соответственно пирамиду или призму), построить сечение вписанного многогранника плоскостью, а затем полученные на ребрах многогранника точки соединить плавной кривой линией по лекалу.

В результате получим приближенное решение задачи, точность которого будет определяться числом граней вписанного многогранника.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНУСА И ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЬЮ



ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ МНОГОГРАННИКА

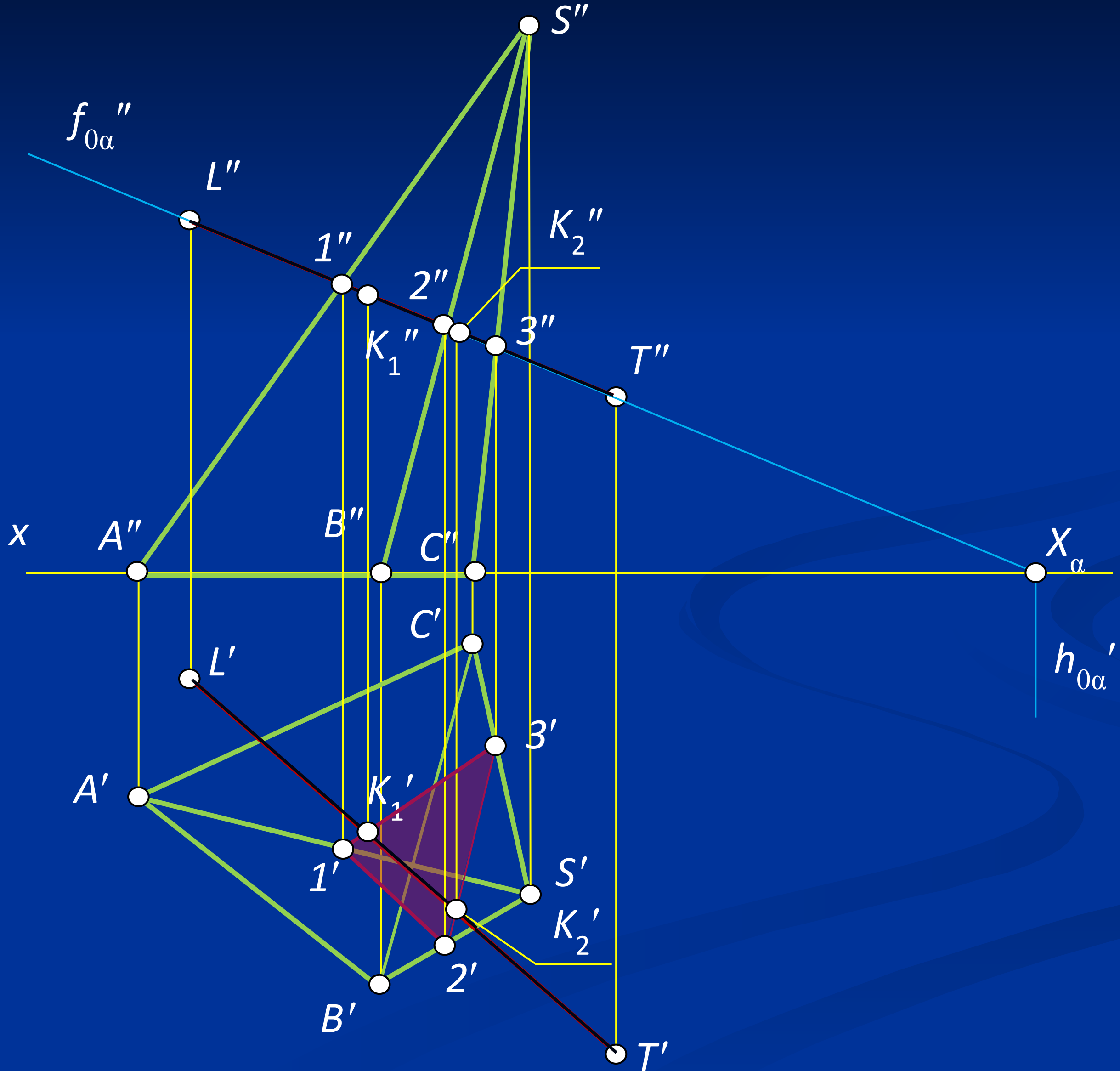
Для построения точек пересечения прямой линии с поверхностью многогранника необходимо:

1) через прямую провести любую вспомогательную плоскость;

2) построить сечение многогранника этой вспомогательной плоскостью;

3) найти искомые точки в пересечении прямой с контурами построенного сечения.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ МНОГОГРАННИКА



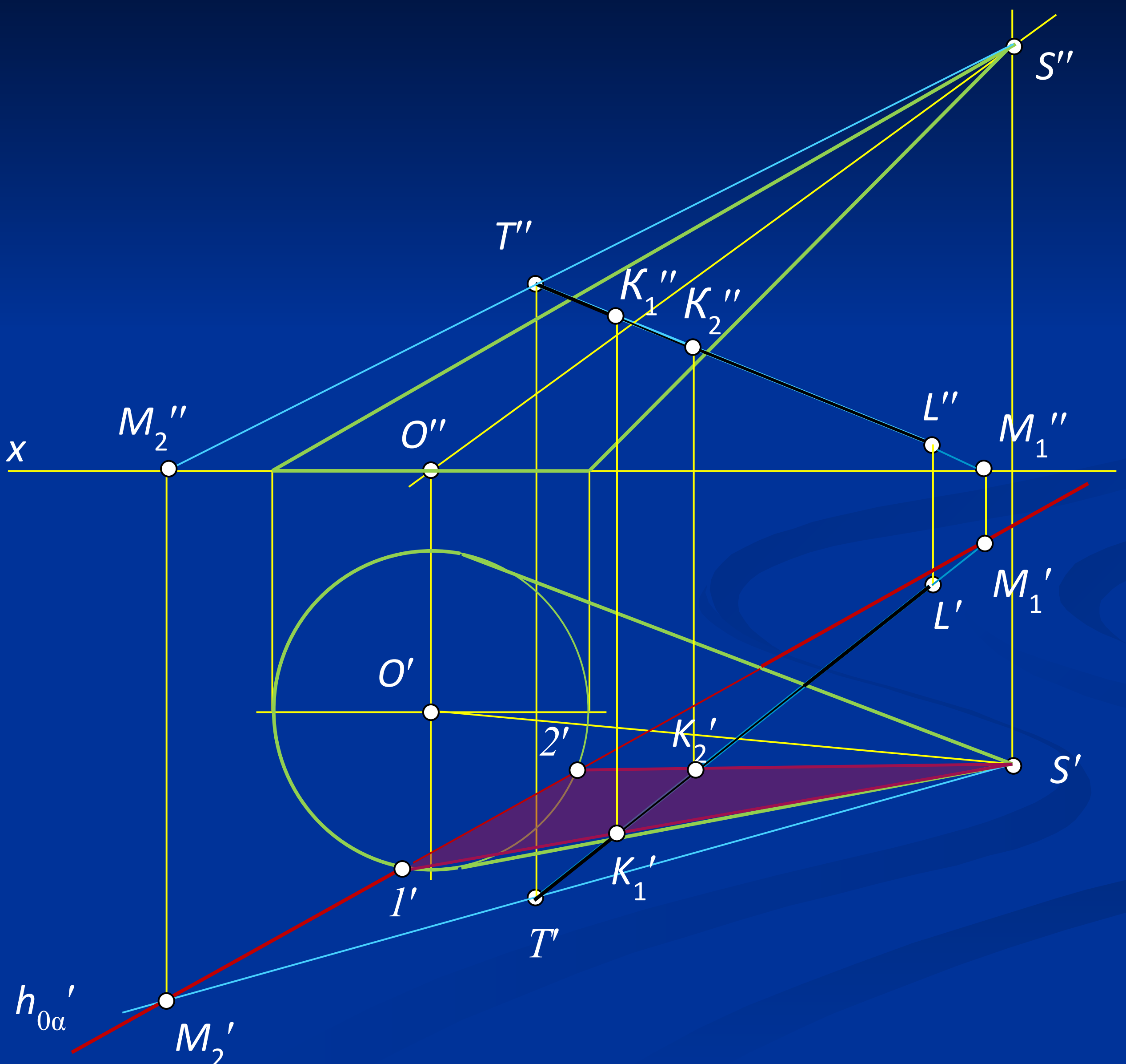
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ КОНУСА И ЦИЛИНДРА

Точки пересечения прямой линии с поверхностью конуса или цилиндра можно построить двумя способами.

Первый способ заключается в том, что в конус или цилиндр вписывают соответственно пирамиду или призму, строят сечение вписанного многогранника вспомогательной плоскостью и полученные точки на ребрах соединяют плавной кривой. Точки пересечения прямой с построенным сечением есть точки пересечения этой прямой с поверхностью заданного геометрического тела. В результате получаем приближенное решение задачи.

Для получения точного решения вспомогательную плоскость нужно выбрать так, чтобы полученное сечение линейчатой поверхности представляло собой простейшую фигуру – многоугольник. В случае конической поверхности такая плоскость должна проходить через заданную прямую и вершину конуса, тогда в сечении образуется треугольник.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ КОНУСА



ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦИЛИНДРА

Для получения точного решения в качестве вспомогательной плоскости выбираем плоскость общего положения, параллельную оси цилиндра, и задаем ее двумя пересекающимися прямыми – прямой LT и произвольной прямой, параллельной оси. Такую прямую можно провести через любую точку прямой LT. Горизонтальная проекция прямой параллельна $O_1'O_2'$, а фронтальная проекция – $O_1''O_2''$.

Поскольку вспомогательная плоскость выбрана параллельной оси цилиндра, сечение будет представлять собой параллелограмм.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦИЛИНДРА