

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. МАТРИЦЫ

БАКЛАНОВА ИРИНА ИВАНОВНА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Матрицей размерности $m \times n$ называется таблица из m строк и n столбцов. Сами матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита, например: A , B , C , или с указанием размерности: $A_{m \times n}$.

Элементы матриц обозначаются соответствующими малыми буквами, например: a_{ij} , b_{ik} и т. д. Всегда первый индекс указывает номер строки, на которой находится элемент, второй индекс – номер столбца, в котором находится элемент. Строки и столбцы матрицы называются *рядами*.

Таким образом, матрица размерности $m \times n$ записывает в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}), \text{ где } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Если все элементы матрицы – числа, то она называется *числовой* матрицей.

Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ* матрицы.

Пример. Рассмотрим числовую матрицу размерности 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Здесь } a_{12} = 2 \text{ есть элемент, находящийся в пер-}$$

вой строке и втором столбце; $a_{21} = 3$ есть элемент, находящийся во второй строке и первом столбце; $a_{23} = 4$ есть элемент, находящийся во второй строке и третьем столбце.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов $m = n$, называется *квадратной матрицей n -го порядка*. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали, равен единице, называется *единичной* и обозначается буквой E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \text{ Например, единичная матрица второго порядка}$$

$$\text{имеет вид } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, стоящие выше или ниже главной диагонали, равны нулю.

Прямоугольная матрица, все элементы которой равны нулю, назы-

вается *нулевой*. Обозначается буквой O : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица размерности $m \times 1$ вида $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$ называется *матрицей-*

столбцом. Матрица размерности $1 \times n$ вида $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ называется *матрицей-строкой*.

Матрица размерности 1×1 , состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, *транспонированной* к данной. Обозначается A^T .

Пример.

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = (1 \ 2 \ 3).$$

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Матрицы *равны*, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е. $A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Рассмотрим *действия* над матрицами.

Суммой двух матриц $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$ одинаковой размерности называется матрица $C_{m \times n}$ той же размерности такая, что
 $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Важно. Можно складывать матрицы только *одной и той же* размерности.

Операция сложения обладает переместительным и сочетательным свойствами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + O = A$;
3. $A - A = O$;
4. $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Пример. Вычислить матрицу $C = A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицы A и B имеют один и тот же размер 2×3 , следовательно, матрицы можно складывать.

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -9 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 2-9 & -4+7 \\ 0+3 & 1-4 & 3+6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число α называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Операция умножения на число обладает следующими свойствами:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Пример. Вычислите $3A + 5B$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Выполним действия над матрицами:

$$\begin{aligned} 3A + 5B &= 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 6 & -15 \\ 9 & -9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & -15 \\ -5 & -20 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & -30 \\ 4 & -29 & 17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$ такая, что элемент c_{ik} равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -того столбца матрицы B , то есть:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}, \text{ где } i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p}.$$

Важно. Операция умножения двух матриц выполнима лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Операция умножения матриц обладает сочетательным и распределительным относительно сложения свойствами:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
2. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Пример. Найти произведение $A \cdot B$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем произведение матриц:

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4-15 \\ 3-6+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix} = C_{2 \times 1}.$$

Важно. По отношению к произведению двух матриц переместительный закон не выполняется: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются **перестановочными**.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- Перестановка двух строк (или столбцов) матрицы;
- Умножение элементов строки (или столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
- Прибавление к элементам некоторой строки (или столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (или столбца), умноженных на одно и то же число.

Матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна получается из другой с помощью элементарных преобразований. Обозначается $A \sim B$.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к *канонической матрице*, у которой в начале главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

Пример. Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выполняя элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы, получим:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -7 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ТЕСТОВЫЙ ВОПРОС 1

1. Установите соответствие между матрицами и их размерностью.

1. $(-3 \ 5)$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

А. 2×2

Б. 2×1

В. 1×2

Г. 1×1

ТЕСТОВЫЙ ВОПРОС 2

2. В результате выполнения действий $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

равен нулю элемент ...

А. d_{11}

Б. d_{12}

В. d_{21}

Г. d_{22}

ТЕСТОВЫЙ ВОПРОС 3

3. В результате умножения матриц $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ элемент

a_{21} равен ...

А. -1

Б. 2

В. 1

Г. -3

Область поиска

Заглавие

Поиск

Формат представления найденных документов:

полный [информационный](#) [краткий](#)

Отсортировать найденные документы по:

[автору](#) [заглавию](#) [году издания](#) [типу документа](#)

Поисковый запрос: (<>Т=АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ<>)

Общее количество найденных документов : 2

Показаны документы с 1 по 2

1.  51
А 45

Алгебра и геометрия [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО "Поволж. гос. технол. ун-т" ; [сост.: И. И. Бакланова, Е. В. Матвеева, Л. А. Медведков]. - Йошкар-Ола : ПГТУ, 2013. - 139 с. : табл. - (Математика для гуманитариев). - ISBN 978-5-8158-1173-7 : 44.84 р., 44.95 р.

ГРНТИ [27.17](#)УДК [512\(075.8\)514\(075.8\)](#)

Кл.слова (ненормированные):

[УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ](#) -- [РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ](#) -- [ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА](#) -- [МАТРИЦЫ \(МАТЕМАТИКА\)](#) -- [ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА](#) -- [ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА](#) -- [АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ](#) -- [ГРИФ РИС ПГТУ](#) -- [ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА](#) -- [ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ](#)[Перейти к внешнему ресурсу Алгебра и геометрия](#)

Доп.точки доступа:

Бакланова, И. И. \сост.\

Матвеева, Е. В. \сост.\

Медведков, Л. А. \сост.\

Экземпляры всего: 32 ✓

чз№1 (2), чз№2 (1), чз№3 (1), кнхр (1), абунл (27)

Свободны: чз№1 (2), чз№2 (1), чз№3 (1), кнхр (1), абунл (13)

Спасибо за внимание!

Успехов всем нам!

π