ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. МАТРИЦЫ

БАКЛАНОВА ИРИНА ИВАНОВНА

π

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Матрицей размерности $m \times n$ называется таблица из m строк и n столбцов. Сами матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита, например: A, B, C, или с указанием размерности: $A_{m \times n}$.

Элементы матриц обозначаются соответствующими малыми буквами, например: a_{ij}, b_{ik} и т. д. Всегда первый индекс указывает номер строки, на которой находится элемент, второй индекс – номер столбца, в котором находится элемент. Строки и столбцы матрицы называются ***рядами***.

Таким образом, матрица размерности $m \times n$ записывает в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}), \text{ где } i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}.$$

Если все элементы матрицы – числа, то она называется ***числовой*** матрицей.

Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют ***главную диагональ*** матрицы.

Пример. Рассмотрим числовую матрицу размерности 2×3:

$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}$. Здесь $a_{12}=2$ есть элемент, находящийся в первой строке и втором столбце; $a_{21}=3$ есть элемент, находящийся во второй строке и первом столбце; $a_{23}=4$ есть элемент, находящийся во второй строке и третьем столбце.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов $m=n$, называется ***квадратной матрицей n-го порядка.*** Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали, равен единице, называется ***единичной*** и обозначается буквой E:

$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$. Например, единичная матрица второго порядка имеет вид $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, стоящие выше или ниже главной диагонали, равны нулю.

Прямоугольная матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица размерности $m \times 1$ вида $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$ называется ***матрицей-столбцом***. Матрица размерности $1 \times n$ вида $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ называется ***матрицей-строкой***.

Матрица размерности 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^{T}.

Пример.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, то $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Матрицы ***равны***, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е. $A_{m\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Рассмотрим ***действия*** над матрицами.

Суммой двух матриц $A_{m\times n}$ ***и*** $B_{m\times n}$ одинаковой размерности называется матрица $C_{m\times n}$ той же размерности такая, что $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Важно. Можно складывать матрицы только ***одной и той же*** размерности.

Операция сложения обладает переместительным и сочетательным свойствами:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+O=A$;
3. $A-A=O$;
4. $A+(B+C)=(A+B)+C$.

Пример. Вычислить матрицу $C = A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрицы A и B имеют один и тот же размер 2×3, следовательно, матрицы можно складывать.

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -9 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 2-9 & -4+7 \\ 0+3 & 1-4 & 3+6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -7 & 3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Произведением матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ ***на число*** α называется матрица $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ такая, что $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, где $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Операция умножения на число обладает следующими свойствами:

1. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
3. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

Пример. Вычислите $3A+5B$,где $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Выполним действия над матрицами:

$$3A+5B=3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & -5\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -4 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 6 & -15\\ 9 & -9 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 10 & -15\\ -5 & -20 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 16 & -30\\ 4 & -29 & 17\end{pmatrix}.$$

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***на матрицу*** $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что элемент c_{ik} равен сумме произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -того столбца матрицы B, то есть: $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$, где $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$.

Важно. Операция умножения двух матриц выполнима лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Операция умножения матриц обладает сочетательным и распределительным относительно сложения свойствами:

1. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$;
2. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;
3. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Пример. Найти произведение $A \cdot B$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем произведение матриц:

$$A_{2\times3} \cdot B_{3\times1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4-15 \\ 3-6+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix} = C_{2\times1}.$$

Важно. По отношению к произведению двух матриц переместительный закон не выполняется: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются ***перестановочными***.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- Перестановка двух строк (или столбцов) матрицы;
- Умножение элементов строки (или столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
- Прибавление к элементам некоторой строки (или столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (или столбца), умноженных на одно и то же число.

Матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна получается из другой с помощью элементарных преобразований. Обозначается $A \sim B$.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ***канонической матрице***, у которой в начале главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

Пример. Привести к каноническому виду матрицу

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Выполняя элементарные преобразования над строками и столбцами матрицы , получим:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & -5 & 4\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -5 & 4\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & -4\\ 0 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 9 & -7\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{9}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

ТЕСТОВЫЙ ВОПРОС 1

1. Установите соответствие между матрицами и их размерностью.

1. $\begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

А. 2×2 Б. 2×1 В. 1×2 Г. 1×1

ТЕСТОВЫЙ ВОПРОС 2

2. В результате выполнения действий $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ равен нулю элемент …

А. d_{11} Б. d_{12} В. d_{21} Г. d_{22}

ТЕСТОВЫЙ ВОПРОС 3

3. В результате умножения матриц $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ элемент a_{21} равен …

А. –1   Б. 2   В. 1   Г. –3

Книги- результаты поиска

Область поиска

Заглавие

Поиск

Формат представления найденных документов:

полный информационный краткий

Отсортировать найденные документы по:

автору заглавию году издания типу документа

Поисковый запрос: (<.>T=АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ$<.>)

Общее количество найденных документов : **2**

Показаны документы с 1 по 2

1. **51**
А 45

Алгебра и геометрия [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО "Поволж. гос. технол. ун-т" ; [сост.: И. И. Бакланова, Е. В. Матвеева, Л. А. Медведков]. - Йошкар-Ола : ПГТУ, 2013. - 139 с. : табл. - (Математика для гуманитариев). - **ISBN** 978-5-8158-1173-7 : 44.84 р., 44.95 р.

ГРНТИ 27.17

УДК 512(075.8) 514(075.8)

Кл.слова (ненормированные):
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ -- РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ -- ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА -- МАТРИЦЫ (МАТЕМАТИКА) -- ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА -- ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА -- АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ -- ГРИФ РИС ПГТУ -- ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА -- ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Перейти к внешнему ресурсу Алгебра и геометрия

Доп.точки доступа:
Бакланова, И. И. \сост.\
Матвеева, Е. В. \сост.\
Медведков, Л. А. \сост.\

Экземпляры всего: 32
чз№1 (2), чз№2 (1), чз№3 (1), кнхр (1), абунл (27)
Свободны: чз№1 (2), чз№2 (1), чз№3 (1), кнхр (1), абунл (13)

Спасибо за внимание!

Успехов всем нам!