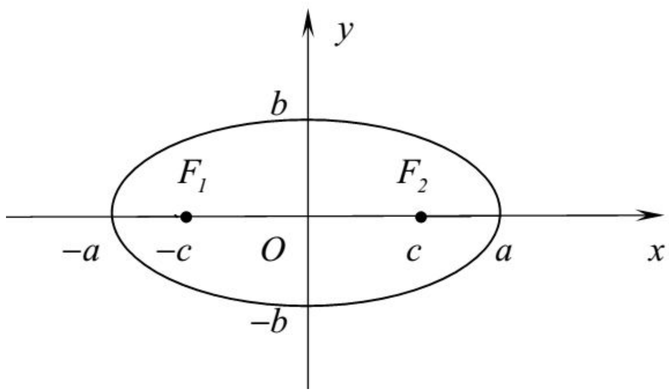
Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости заданы прямоугольная декартова система координат Оxy и некоторая линия L. Рассмотрим уравнение $F(x,y) = 0$ или $y = f(x)$. Это уравнение называется уравнением линии L в заданной системе координат если:

1) ему удовлетворяют координаты (x,y) любой точки линии L,

2) ему не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащие на линии L.

Уравнения 2-й степени от двух переменных в Оxy – уравнения кривых, частными случаями которых являются: эллипс, окружность, гипербола, парабола.

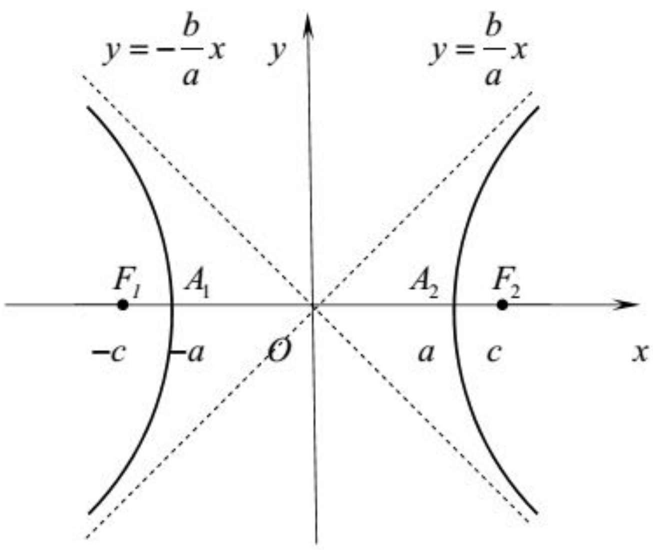


1. Эллипс

Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (равная $2a$, $a > 0$), большая, чем расстояние между фокусами (2c). Если ось Оx проходит через фокусы $F1$ и $F2$ (Оx – фокальная ось), а ось Оy – через середину отрезка $F1$ $F2$, то каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Эллипс пересекает координатные оси в точках $A_1(-a,0), A_2(a,0)$, $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ которые называются *вершинами эллипса*. Отрезки $|A_1A_2| = 2a, |B_1B_2| = 2b$ называются *большой и малой осями* эллипса. Эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Форму эллипса можно охарактеризовать с помощью *эксцентриситета* $\varepsilon = \dfrac{c}{a}(0 < \varepsilon < 1)$. Чем больше эксцентриситет, тем более вытянут вдоль оси Ox эллипс. Если $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.



Гипербола

Гиперболой называется множество точек на плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (равная $2a$, $a > 0$), меньшая, чем расстояние между фокусами.

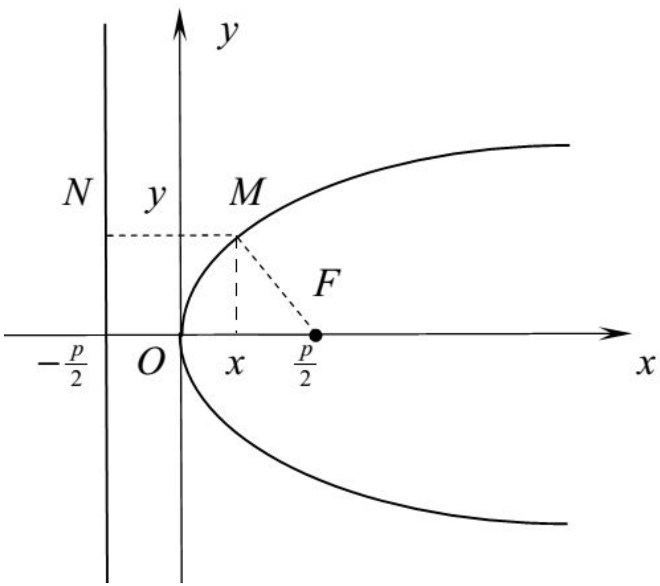
Фокусы имеют координаты $F1(-c,0)$, $F2$ (c,0).

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат, состоит из двух веток, которые пересекаются с осью Ox в точках $A_1(-a,0), A_2(a,0)$, которые называются *вершинами гиперболы*. Отрезок $|A_1A_2| = 2a$ называется *вещественной осью*. Точки $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ называются *мнимыми вершинами гиперболы*, отрезок $|B_1B_2| = 2b$ называют *мнимой осью*. Форму гиперболы характеризует *эксцентриситет* $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Ясно, что $\varepsilon > 1$, причем, чем ближе он к единице, тем сильнее ветви гиперболы прижаты к оси Ox.

Парабола



называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной прямой, называемой *директрисой* параболы (N) и от данной точки, называемых *фокусом*.
Проведем ось *Ox* через фокус перпендикулярно директрисе. Расстояние от директрисы до фокуса обозначим через *p* и назовем его *параметром параболы*. Начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего фокус с директрисой.
Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px$$

Парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2qy$ и $x^2 = -2qy$ также определяют параболы.

Пример 1

Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Решение.

Разделим обе части данного уравнение на 36, получим каноническое уравнение данного эллипса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Отсюда имеем: большая полуось эллипса a=3, малая b=2, фокусы лежат на оси Ox.

Найдём координаты фокусов: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, т. е. координаты фокусов $F_1(\sqrt{5}, 0), F_2(-\sqrt{5}, 0)$. Эксцентриситет эллипса определим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$: $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ:$a = 3, b = 2, F_1(\sqrt{5}, 0), F_2(-\sqrt{5}, 0), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Пример 2

Составить уравнение гиперболы, если её асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\frac{2}{3}x$ и гипербола проходит через точку $M(8{,}2\sqrt{3})$. Найти расстояние между фокусами и вершинами гиперболы.

Решение.

Так как точка $(8{,}2\sqrt{3})$ лежит на гиперболе, то её координаты удовлетворяют уравнению (3.19): $\frac{64}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1$, кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ (так как у гиперболы её ассимптоты: $y = \pm\frac{2}{3}x$).

Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{64}{a^2} - \dfrac{12}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём: $a = \sqrt{37}, b = \frac{148}{9}$; уравнение гиперболы $\frac{x^2}{37} - \frac{y^2}{\frac{148}{9}} = 1$.

Расстояние между вершинами гиперболы:

$2a = 2\sqrt{37}$, между фокусами: $2c = 2\frac{\sqrt{185}}{3} = \frac{2\sqrt{185}}{3}$ $(c = \sqrt{a^2 - b^2} =$

$$= \sqrt{37 - \frac{148}{9}} = \frac{\sqrt{185}}{3}).$$

Ответ: $\frac{x^2}{37} - \frac{y^2}{\frac{148}{9}} = 1$, $2a = 2\sqrt{37}$; $2c = \frac{2\sqrt{185}}{3}$.

a b

Пример 3

Составить уравнение параболы, проходящей через точки O(0,0) и $M(5,-3)$ и симметричной относительно оси Ox; написать уравнение директрис, найти фокальный радиус точки M.

Решение.

Искомое уравнение имеет вид: $y^2 = 2px$; подставив сюда $x = 5$, $y = -3$, получим $9 = 2p\cdot 5$, отсюда $2p = \frac{9}{5}$.

Таким образом, имеем уравнение параболы: $y^2 = \frac{9}{5}x$, $p = \frac{9}{5}$.

Поэтому уравнение директрисы: $x=-\frac{9}{20}$. Фокальный радиус:

$MF = 5 + \frac{9}{20} = \frac{109}{20}$.

Ответ: $y^2 = \frac{9}{5}x, x = -\frac{9}{20}$ – уравнение директрисы,

фокальный радиус: $MF = \frac{109}{20}$.

10.7. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

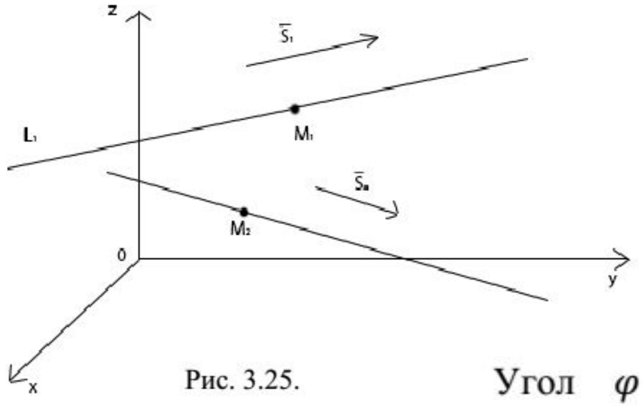


Рис. 3.25.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы своими каноническими уравнениями:

L_1: $\frac{x-x1}{m1} = \frac{y-y1}{p1} = \frac{z-z1}{q1}$,

L_2: $\frac{x-x2}{m2} = \frac{y-y2}{p2} = \frac{z-z2}{q2}$,

$\bar{S_1} = (m_1, p_1, q_1), \bar{S_2} = (m_2, p_2, q_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно (рис. 3.25).

Угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен углу между их направляющими векторами $\bar{S_1}$ и $\bar{S_2}$. Поэтому:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{S_1}\,\bar{S_2}}{|\bar{S_1}||\bar{S_1}|} = \frac{m_1m_2+p_1p_2+q_1q_2}{\sqrt{m_1{}^2+p_1{}^2+q_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2+p_2{}^2+q_2{}^2}}. \quad (3.37)$$

Отсюда можно получить условия параллельности и перпендикулярности прямых L_1 и L_2:

1) $L_1 || L_2 <=> \bar{S_1} || \bar{S_2} <=> \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$,
2) $L_1 \perp L_2 <=> \bar{S_1}\,\bar{S_2} = 0 <=> m_1m_2 + p_1p_2 + q_1q_2 = 0$.

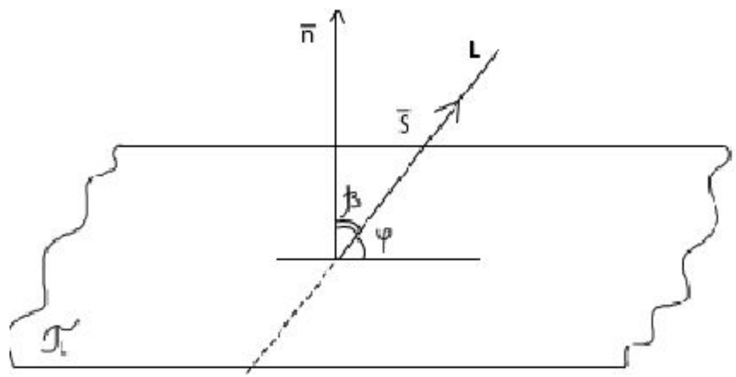
10.8. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость π и прямая L заданы уравнениями:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}.$$

<u>Углом между прямой и плоскостью</u> называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость.



Обозначим через φ угол между прямой L и плоскостью π, а β – угол между векторами $\bar{S} = (m, p, q)$ и $\bar{n} = (A, B, C)$.

Тогда $cos\beta = \frac{\bar{n}\,\bar{s}}{|\bar{n}||\bar{s}|}$. Найдём $sin\varphi$ (считая $\varphi = \frac{\pi}{2}$): $sin\varphi =$
$= sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos\beta$. Отсюда с учётом, что $sin\varphi \geq 0$, получаем:

$$sin\varphi = \frac{|Am+Bp+Cq|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+p^2+q^2}}\ . \qquad (3.38)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости:

1) $L \perp \pi <=> \bar{S} || \bar{n} <=> \frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$,
2) $L \| \pi <=> \bar{S} \perp \bar{n} <=> \bar{S}\,\bar{n} = 0 <=> Am + Bp + Cq = 0.$

10.9. Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Для того чтобы найти точку пересечения прямой L

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q} \qquad (3.39)$$

с плоскостью π

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3.40)$$

нужно решить систему уравнений (3.39) и (3.40), предварительно записав уравнения (3.39) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + pt, \\ z = z_0 + qt. \end{cases}$$

Подставив эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (3.40) и преобразовав его, получим уравнение:

$$t(Am+Bp+Cq)+(Ax0+By0+Czo+D)=0. \qquad (3.41)$$

Если прямая L не параллельна плоскости π, т. е. если $Am+Bp+Cq\neq0$, то из равенства (3.41) находим t:

$$t = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bp+Cq}.$$

Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдём координаты точки пресечения прямой и плоскости.

Рассмотрим случай, когда $Am+Bp+Cq=0$ $(L\|\pi)$. Тогда возможны следующие два случая:

1) $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$ и 2) $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

В случае 1) прямая L параллельна плоскости π и не пересекает плоскость, т. е. уравнение (3.41) решения не имеет (так как имеет вид $0t+k=0$, $k\neq0$). В случае 2) уравнение (3.41) имеет вид $t0+0=0$, которому удовлетворяет любое значение t, и поэтому любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Следовательно, прямая L лежит на плоскости π. Таким образом, условие принадлежности прямой плоскости имеет вид

$$\begin{cases} Am+Bp+Cq=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases} \tag{3.42}$$

Пример 1

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,3)$ и:

1) перпендикулярной вектору $\bar{n} = (-3,4,5)$,

3) точку $M_2(2,0,5)$ и параллельной оси Ox,

4) проходящей через ось Oy.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (3.25)$$

Решение.

1) Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar{n} = (-3,4,5)$ и проходящей через точку $M_1(-1,2,3)$, согласно формуле (3.25) имеем вид: $-3(x+1)+4(y-2)+5(z-3)=0$ или $-3x+4y+5z-26=0$, или $3x-4y-5z+26=0$.

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (3.26)$$

3) Так как плоскость параллельна оси Ox, то в уравнении (3.26) коэффициент A=0, т. е. уравнение плоскости имеет вид $By+Cz+D=0$. Точки $M_1(-1,2,3)$ и $M_2(2,0,5)$ лежат на плоскости. Поэтому её координаты должны удовлетворять уравнению, т. е. $\begin{cases} 2B + 3C + D = 0, \\ 5C + D = 0. \end{cases}$ Откуда $B=C$, $D=-5C$; следовательно, уравнение плоскости: $(y+z-5)C=0$, $C\neq0$, или $y+z-5=0$.

4) Так как плоскость проходит через ось Oy, то в уравнении (3.26) её коэффициенты $B=0$, $D=0$, т. е. уравнение плоскости имеет вид $Ax+Cz=0$. Подставив в уравнение координаты точки $M_1(-1,2,3)$, лежащей на плоскости, получим: $-A+3C=0$, откуда $A=3C$ и уравнение плоскости (после сокращения на $C\neq0$): $3x+z=0$.

Пример 2

Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(1,1,-1)$ параллельно плоскости $3x+2y-z+4=0$.

Решение.

Нормальный вектор $\overline{n_1} = (3,2,-1)$ данной плоскости будет нормальным вектором плоскости, уравнение которой нужно составить. Поэтому искомое уравнение имеет вид $3(x-1)+2(y-1)-(z+1)=0$ или $3x+2y-z-6=0$.

Ответ: $3x+2y-z-6=0$.

Пример 3

Найти угол между плоскостями $3x+2y-z+4=0$ и $x+2y-z+10=0$.

Решение.

Найдём косинус угла φ между нормальными векторами

$\overline{n} = (3,2,-1)$ и $\overline{n_2} = (1,2,-1)$:

$$cos\varphi = \frac{3\cdot1+2\cdot2+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{7}\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{21}},$$

отсюда $\varphi = arccos\frac{4}{\sqrt{21}}$.

Ответ: $\varphi = arccos\frac{4}{\sqrt{21}}$.

Пример 4

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q},$$

Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1,0,2)$ параллельно вектору $\bar{S}=(0,0,1)$.

Решение.

Согласно формуле (3.34) имеем: $\frac{x+1}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{1}$.

Ответ: $\frac{x+1}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{1}$.