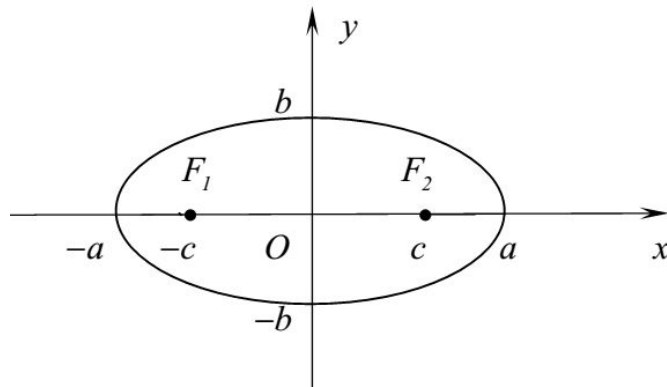


Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости заданы прямоугольная декартова система координат Oxy и некоторая линия L . Рассмотрим уравнение $F(x,y) = 0$ или $y = f(x)$. Это уравнение называется уравнением линии L в заданной системе координат если:

- 1) ему удовлетворяют координаты (x,y) любой точки линии L ,
- 2) ему не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащие на линии L .

Уравнения 2-й степени от двух переменных в Oxy – уравнения кривых, частными случаями которых являются: эллипс, окружность, гипербола, парабола.

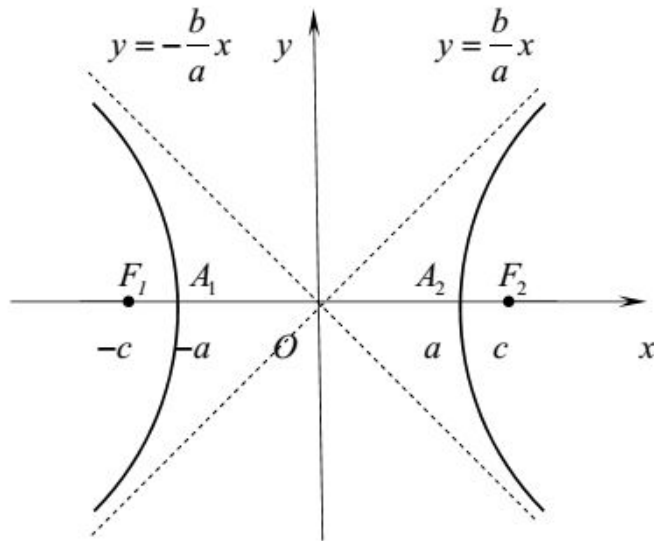


1. Эллипс

Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (равная $2a$, $a > 0$), большая, чем расстояние между фокусами ($2c$). Если ось Ox проходит через фокусы F_1 и F_2 (Ox – фокальная ось), а ось Oy – через середину отрезка $F_1 F_2$, то каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эллипс пересекает координатные оси в точках $A_1(-a,0), A_2(a,0), B_1(0,b), B_2(0,-b)$ которые называются вершинами эллипса. Отрезки $|A_1A_2|=2a, |B_1B_2|=2b$ называются большой и малой осями эллипса. Эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Форму эллипса можно охарактеризовать с помощью эксцентриситета $\varepsilon = \frac{c}{a} (0 < \varepsilon < 1)$. Чем больше эксцентриситет, тем более вытянут вдоль оси Ox эллипс. Если $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.



Гипербола

Гиперболой называется множество точек на плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (равная $2a, a > 0$), меньшая, чем расстояние между фокусами.

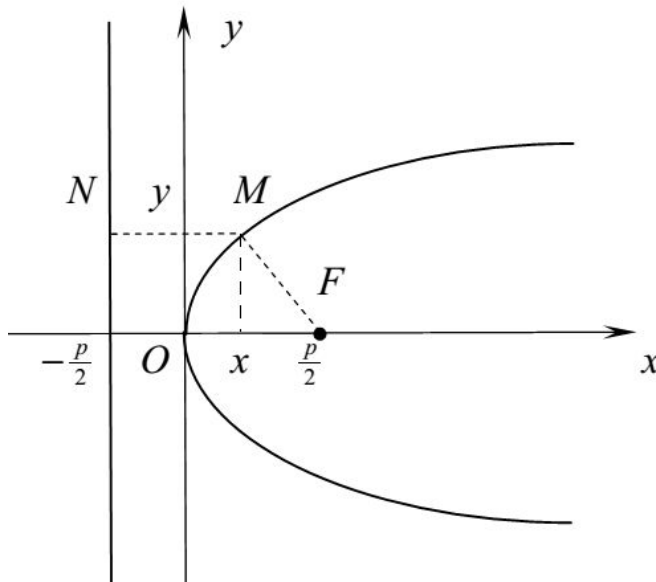
Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат, состоит из двух веток, которые пересекаются с осью Ox в точках $A_1(-a,0), A_2(a,0)$, которые называются вершинами гиперболы. Отрезок $|A_1A_2|=2a$ называется вещественной осью. Точки $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ называются мнимыми вершинами гиперболы, отрезок $|B_1B_2|=2b$ называют мнимой осью. Форму гиперболы характеризует эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Ясно, что $\varepsilon > 1$, причем, чем ближе он к единице, тем сильнее ветви гиперболы прижаты к оси Ox .

Парабола



называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной прямой, называемой *директрисой* параболы (N) и от данной точки, называемых *фокусом*.

Проведем ось Ox через фокус перпендикулярно директрисе. Расстояние от директрисы до фокуса обозначим через p и назовем его *параметром параболы*. Начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего фокус с директрисой.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px$$

Парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2qy$ и $x^2 = -2qy$ также определяют параболы.

Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Решение.

Разделим обе части данного уравнение на 36, получим каноническое уравнение данного эллипса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Отсюда имеем: большая полуось эллипса $a=3$, малая $b=2$, фокусы лежат на оси Ox .

Найдём координаты фокусов: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, т. е. координаты фокусов $F_1(\sqrt{5}, 0), F_2(-\sqrt{5}, 0)$. Эксцентриситет эллипса определим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$: $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $a = 3, b = 2, F_1(\sqrt{5}, 0), F_2(-\sqrt{5}, 0), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Составить уравнение гиперболы, если её асимптоты заданы уравнениями $y = \pm \frac{2}{3}x$ и гипербола проходит через точку $M(8, 2\sqrt{3})$. Найти расстояние между фокусами и вершинами гиперболы.

Решение.

Так как точка $(8, 2\sqrt{3})$ лежит на гиперболе, то её координаты удовлетворяют уравнению (3.19): $\frac{64}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1$, кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ (так как у гиперболы её асимптоты: $y = \pm \frac{2}{3}x$).

Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \\ \frac{64}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём: $a = \sqrt{37}$, $b = \frac{148}{9}$; уравнение гиперболы $\frac{x^2}{37} - \frac{y^2}{\frac{148}{9}} = 1$.

Расстояние между вершинами гиперболы:

$$\begin{aligned} 2a &= 2\sqrt{37}, \text{ между фокусами: } 2c = 2\frac{\sqrt{185}}{3} = \frac{2\sqrt{185}}{3} \quad (c = \sqrt{a^2 - b^2} = \\ &= \sqrt{37 - \frac{148}{9}} = \frac{\sqrt{185}}{3}). \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x^2}{37} - \frac{y^2}{\frac{148}{9}} = 1$, $2a = 2\sqrt{37}$; $2c = \frac{2\sqrt{185}}{3}$.

Составить уравнение параболы, проходящей через точки $O(0,0)$ и $M(5,-3)$ и симметричной относительно оси Ox ; написать уравнение директрис, найти фокальный радиус точки M .

Решение.

Искомое уравнение имеет вид: $y^2 = 2px$; подставив сюда $x = 5$, $y = -3$, получим $9 = 2p \cdot 5$, отсюда $2p = \frac{9}{5}$.

Таким образом, имеем уравнение параболы: $y^2 = \frac{9}{5}x$, $p = \frac{9}{5}$.

Поэтому уравнение директрисы: $x = -\frac{9}{20}$. Фокальный радиус:

$$MF = 5 + \frac{9}{20} = \frac{109}{20}.$$

Ответ: $y^2 = \frac{9}{5}x$, $x = -\frac{9}{20}$ — уравнение директрисы,

фокальный радиус: $MF = \frac{109}{20}$.

10.7. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

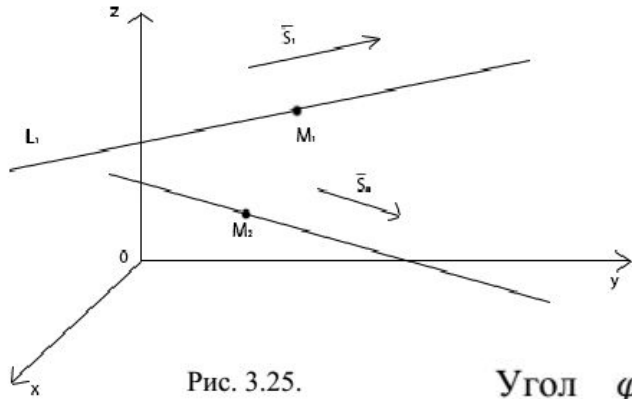


Рис. 3.25.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{p_1} = \frac{z-z_1}{q_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{p_2} = \frac{z-z_2}{q_2},$$

$\vec{S}_1 = (m_1, p_1, q_1)$, $\vec{S}_2 = (m_2, p_2, q_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно (рис. 3.25).

Угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен углу между их направляющими векторами \vec{S}_1 и \vec{S}_2 . Поэтому:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{S}_1 \vec{S}_2|}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2} \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}. \quad (3.37)$$

Отсюда можно получить условия параллельности и перпендикулярности прямых L_1 и L_2 :

$$1) \quad L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

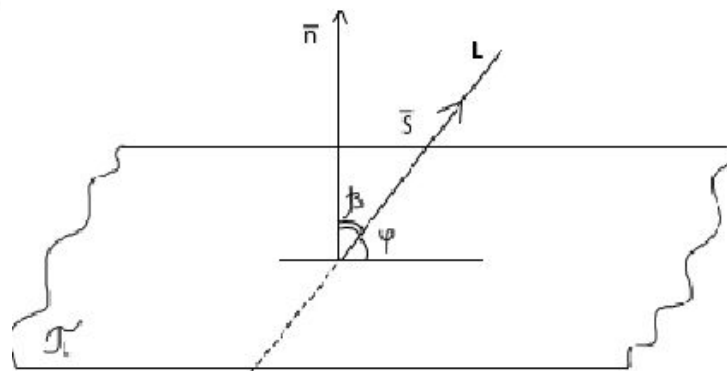
$$2) \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{S}_1 \vec{S}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0.$$

10.8. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость π и прямая L заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} \pi: Ax + By + Cz + D &= 0, \\ L: \frac{x - x_0}{m} &= \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}. \end{aligned}$$

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость.



Обозначим через φ угол между прямой L и плоскостью π , а β – угол между векторами $\vec{S} = (m, p, q)$ и $\vec{n} = (A, B, C)$.

Тогда $\cos\beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{S}}{|\vec{n}| |\vec{S}|}$. Найдём $\sin\varphi$ (считая $\varphi = \frac{\pi}{2}$): $\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$. Отсюда с учётом, что $\sin\varphi \geq 0$, получаем:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bp + Cq|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + p^2 + q^2}}. \quad (3.38)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости:

- 1) $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{S} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$,
- 2) $L \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{S} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{S} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Am + Bp + Cq = 0$.

10.9. Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Для того чтобы найти точку пересечения прямой L

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q} \quad (3.39)$$

с плоскостью π

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.40)$$

нужно решить систему уравнений (3.39) и (3.40), предварительно записав уравнения (3.39) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + pt, \\ z = z_0 + qt. \end{cases}$$

Подставив эти выражения для x , y и z в уравнение плоскости (3.40) и преобразовав его, получим уравнение:

$$t(Am + Bp + Cq) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (3.41)$$

Если прямая L не параллельна плоскости π , т. е. если $Am + Bp + Cq \neq 0$, то из равенства (3.41) находим t :

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bp + Cq}.$$

Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдём координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Рассмотрим случай, когда $Am+Bp+Cq=0$ ($L\|\pi$). Тогда возможны следующие два случая:

1) $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ и 2) $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

В случае 1) прямая L параллельна плоскости π и не пересекает плоскость, т. е. уравнение (3.41) решения не имеет (так как имеет вид $0t+k=0$, $k\neq 0$). В случае 2) уравнение (3.41) имеет вид $t0+0=0$, которому удовлетворяет любое значение t , и поэтому любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Следовательно, прямая L лежит на плоскости π . Таким образом, условие принадлежности прямой плоскости имеет вид

$$\begin{cases} Am + Bp + Cq = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1,2,3)$ и:

1) перпендикулярной вектору $\vec{n} = (-3,4,5)$,

3) точку $M_2(2,0,5)$ и параллельной оси Ox ,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (3.25)$$

4) проходящей через ось Oy .

Решение.

1) Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n} = (-3,4,5)$ и проходящей через точку $M_1(-1,2,3)$, согласно формуле (3.25) имеет вид: $-3(x+1)+4(y-2)+5(z-3)=0$ или $-3x+4y+5z-26=0$, или $3x-4y-5z+26=0$.

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (3.26)$$

3) Так как плоскость параллельна оси Ox , то в уравнении (3.26) коэффициент $A=0$, т. е. уравнение плоскости имеет вид $By+Cz+D=0$. Точки $M_1(-1,2,3)$ и $M_2(2,0,5)$ лежат на плоскости. Поэтому её координаты должны удовлетворять уравнению, т. е. $\begin{cases} 2B + 3C + D = 0, \\ 5C + D = 0. \end{cases}$ Откуда $B=C$, $D=-5C$; следовательно, уравнение плоскости: $(y+z-5)C=0$, $C \neq 0$, или $y+z-5=0$.

4) Так как плоскость проходит через ось Oy , то в уравнении (3.26) её коэффициенты $B=0$, $D=0$, т. е. уравнение плоскости имеет вид $Ax+Cz=0$. Подставив в уравнение координаты точки $M_1(-1,2,3)$, лежащей на плоскости, получим: $-A+3C=0$, откуда $A=3C$ и уравнение плоскости (после сокращения на $C \neq 0$): $3x+z=0$.

Пример 2

6.13

Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(1,1,-1)$ параллельно плоскости $3x+2y-z+4=0$.

Решение.

Нормальный вектор $\vec{n}_1 = (3, 2, -1)$ данной плоскости будет нормальным вектором плоскости, уравнение которой нужно составить. Поэтому искомое уравнение имеет вид $3(x-1)+2(y-1)-(z+1)=0$ или $3x+2y-z-6=0$.

Ответ: $3x+2y-z-6=0$.

Пример 3

Найти угол между плоскостями $3x+2y-z+4=0$ и $x+2y-z+10=0$.

Решение.

Найдём косинус угла φ между нормальными векторами

$\vec{n} = (3, 2, -1)$ и $\vec{n}_2 = (1, 2, -1)$:

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{7}\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{21}},$$

отсюда $\varphi = \arccos \frac{4}{\sqrt{21}}$.

Ответ: $\varphi = \arccos \frac{4}{\sqrt{21}}$.

Пример 4

Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1,0,2)$ параллельно вектору $\vec{S} = (0,0,1)$.

Решение.

Согласно формуле (3.34) имеем: $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Ответ: $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$.

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q},$$