§8. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^{n}, \quad (1)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции,

$n \neq 0$, $n \neq 1$ (иначе это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого надо

1) обе части уравнения (1) разделить на y^{n},

2) сделать замену $z = y^{1-n}$.

Замечания.

1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^{n-1}} = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \widetilde{u}(x) \cdot \widetilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.

Пример

$$\boxed{y' - y = \frac{e^{6x}}{y^2}}$$

Уравнение Бернулли

$$y' - y = e^{6x} \cdot y^{-2}$$

$$\boxed{y^2 y' - y^3 = e^{6x}}$$

$$z = y^3 \Rightarrow z' = 3y^2 y' \Rightarrow y^2 y' = \frac{1}{3} z'$$

$$\frac{1}{3} z' - z = e^{6x} \Rightarrow \boxed{z' - 3z = 3e^{6x}}$$

$$z = u \cdot v \Rightarrow z' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 3uv = 3e^{6x}$$

$$u' \cdot v + u(v' - 3v) = 3e^{6x}$$

Пример

$$v' - 3v = 0 \Rightarrow \frac{1}{3v}dv = dx \Rightarrow \frac{1}{3}\ln|v| = x \Rightarrow \sqrt[3]{v} = e^{x}$$

$$\boxed{v = e^{3x}}$$

$$e^{3x} \cdot u' = 3e^{6x} \Rightarrow u' = 3e^{3x}$$

$$\boxed{u = e^{3x} + c}$$

$$\boxed{z = e^{3x}(e^{3x} + c) = e^{6x} + ce^{3x}}$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{z} = e^{x}(e^{3x} + c)^{\frac{1}{3}}}$$

§9. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (2)

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е. если

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y) .$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $u(x,y) = C$.

⇒ Задачи:

1) научиться определять, когда выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

является полным дифференциалом;

2) научиться находить функцию $u(x,y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 2.

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ *определены и непрерывны в области* D *плоскости* xOy *и имеют в ней непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* D *выполнялось условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Способы нахождения функции $u(x\,,y)$:

1) используя алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 2;

2) используя одну из следующих формул:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}\underbrace{N(x,y)}_{x-const}dy$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}\underbrace{M(x,y)}_{y-const}dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy$$

где $(x_0\,,y_0)$ – любая точка области D непрерывности функций $M(x\,,y)$, $N(x\,,y)$.

3) методом ***интегрируемых комбинаций***.

Суть метода интегрируемых комбинаций: выделить в

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

выражения, являющиеся дифференциалами известных функций («***интегрируемые комбинации***») и привести его таким образом к виду $du(x,y)$.

ПРИМЕРЫ интегрируемых комбинаций:

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln|x|\right),$$

$$xdy + ydx = d(xy), \qquad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(2xy-5)dx+(3y^2+x^2)dy=0$$

$$P(x;y)=2xy-5;\quad Q(x;y)=3y^2+x^2$$

Проверим выполнение условий (3):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(2xy-5)'_y=2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=(3y^2+x^2)'_x=2x$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow$ *Уравнение является уравнением в полных дифференциалах.*

Условия (4) здесь будут выглядеть так:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-5;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

$$u(x;y) = \int (2xy - 5)dx + \varphi(y) = 2y\int xdx - 5\int dx + \varphi(y)$$

$$u(x;y) = x^2y - 5x + \boxed{\varphi(y)}$$

Q (x;y)

Продифференцируем полученную функцию по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2y - 5x + \varphi(y)\right)'_y = x^2 + \varphi'(y) = \boxed{3y^2 + x^2} \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \int 3y^2 dy = \boxed{y^3 + C}$$

Подставим найденную функцию φ(y) в выражение для u(x; y)

$$u(x;y) = x^2y - 5x + y^3 + C$$

Общим интегралом является: $\boxed{x^2y - 5x + y^3 = C}$