

§8. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n, \quad (1)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции,
 $n \neq 0$, $n \neq 1$ (иначе это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению.

Для этого надо

- 1) обе части уравнения (1) разделить на y^n ,
- 2) сделать замену $z = y^{1-n}$.

Замечания.

- 1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^{n-1}} = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow y^{n-1} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{u(x)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{v(x)} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \tilde{u}(x) \cdot \tilde{v}(x).$$

Таким образом, решая уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.

Пример

$$y' - y = \frac{e^{6x}}{y^2}$$

Уравнение Бернулли

$$y' - y = e^{6x} \cdot y^{-2}$$

$$y^2 y' - y^3 = e^{6x}$$

$$z = y^3 \Rightarrow z' = 3y^2 y' \Rightarrow y^2 y' = \frac{1}{3} z'$$

$$\frac{1}{3} z' - z = e^{6x} \Rightarrow z' - 3z = 3e^{6x}$$

$$z = u \cdot v \Rightarrow z' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 3uv = 3e^{6x}$$

$$u' \cdot v + u(v' - 3v) = 3e^{6x}$$

Пример

$$v' - 3v = 0 \Rightarrow \frac{1}{3v} dv = dx \Rightarrow \frac{1}{3} \ln|v| = x \Rightarrow \sqrt[3]{v} = e^x$$

$$v = e^{3x}$$

$$e^{3x} \cdot u' = 3e^{6x} \Rightarrow u' = 3e^{3x}$$

$$u = e^{3x} + c$$

$$z = e^{3x} (e^{3x} + c) = e^{6x} + ce^{3x}$$

$$y = \sqrt[3]{z} = e^x (e^{3x} + c)^{\frac{1}{3}}$$

§9. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (2)

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е. если

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y).$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $u(x, y) = C$.

⇒ Задачи:

1) научиться определять, когда выражение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

является полным дифференциалом;

2) научиться находить функцию $u(x, y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 2.

Пусть функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Способы нахождения функции $u(x, y)$:

- 1) используя алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 2;
- 2) используя одну из следующих формул:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy$$

$x - const$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy$$

$y - const$

где (x_0, y_0) – любая точка области D непрерывности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$.

3) методом *интегрируемых комбинаций*.

Суть метода интегрируемых комбинаций: выделить в

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

выражения, являющиеся дифференциалами известных функций («*интегрируемые комбинации*») и привести его таким образом к виду $du(x, y)$.

ПРИМЕРЫ интегрируемых комбинаций:

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln |x|),$$

$$x dy + y dx = d(xy), \quad \frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$$

$$P(x; y) = 2xy - 5; \quad Q(x; y) = 3y^2 + x^2$$

Проверим выполнение условий (3):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2xy - 5)'_y = 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = (3y^2 + x^2)'_x = 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{Уравнение является уравнением в полных дифференциалах.}$$

Условия (4) здесь будут выглядеть так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - 5; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + x^2$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

$$u(x; y) = \int (2xy - 5)dx + \varphi(y) = 2y \int x dx - 5 \int dx + \varphi(y)$$

$$u(x; y) = x^2 y - 5x + \varphi(y)$$

Q (x;y)

Продифференцируем полученную функцию по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 y - 5x + \varphi(y))'_y = x^2 + \varphi'(y) = 3y^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + C$$

Подставим найденную функцию $\varphi(y)$ в выражение для $u(x; y)$

$$u(x; y) = x^2 y - 5x + y^3 + C$$

Общим интегралом является:

$$x^2 y - 5x + y^3 = C$$