IV. Вычисление пределов функции в точке

Для вычисления пределов функции в точке используют те же правила, что и для вычисления предела на бесконечности.

1. Если функция существует в точке x = *a*, то ее предел равен *f*(*a*) (поэтому просто подставляем значение *a* в формулу функции).

Примеры:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\left(x^3-2x^2+5x+3\right)=1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1+3=7$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sin \pi x}{\sqrt{x}+4}=\frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2}+4}=\frac{0}{\sqrt{2}+4}=0$$

$$3)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+8)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x+4)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

IV. Вычисление пределов функции в точке

2. Если функция не существует в точке x = *a*, то подстановку выполнять нельзя. Для дробно-рациональных функций используют следующий прием: сокращение числителя и знаменателя на (x – *a*).

При разложении на множители используются формулы сокращенного умножения, вынесение за скобку, группировка, формула для квадратного трехчлена $a(x - x_1)(x - x_2)$, домножение на сопряженный множитель и т.д.

1) $$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -1{,}5.$$

2) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+5)}{(x-3)} = -3$$

3) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

4) $$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(x^2 - 3x)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x + 6 - 9}{x \cdot (x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x(\sqrt{x+6} + 3)} = \frac{1}{3 \cdot (\sqrt{9} + 3)} = \frac{1}{3 \cdot (3+3)} = \frac{1}{18}$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{6x^3-4x^2}$

4. $\lim\limits_{t\to -3}\dfrac{t^2+6t+9}{t^2+t-6}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$

6. $\lim\limits_{a\to -2}\dfrac{5a^2+9a-2}{3a^2+5a-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$

Вычислите пределы функций на бесконечности:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+4x+2}{5x^2+3x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x^2+3x+7}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+4x^2+7}{x^2+4x+3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+3x^2+x+1}{2x^3+x+13}$