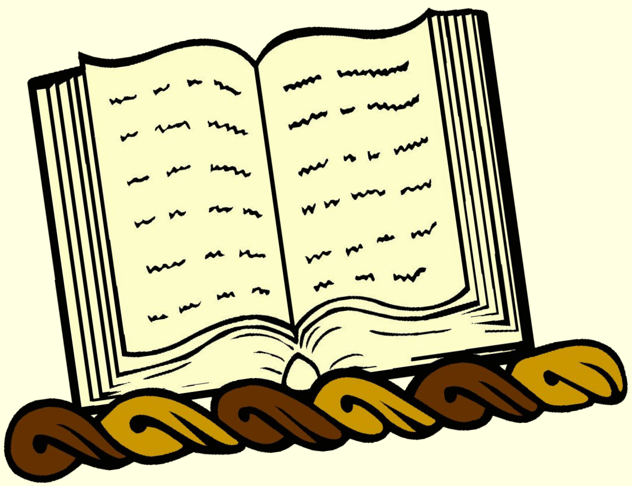
- *«Правильному применению методов можно научиться только применяя их на разнообразных примерах»*

  Г. Цейтен

- 11 класс

Общие методы решения уравнений



- *УМК А.Г. Мордкович (профильный уровень)*

Цели урока:

- ***Рассмотреть общие методы решения уравнений.***
- ***Научиться применять эти методы при решении уравнений.***
- ***Формировать навыки применение наиболее рациональных способов решения уравнений.***

Рассмотрим уравнения:

1) $x^2 - 2x = 0;$

2) $\sin^2 x + \sin x = 0;$

3) $7^{x^2+5x} = 49;$

Рассмотрим уравнения:

$$4)\ \log^2{}_2 x - 4\log_2 x + 3 = 0;$$

$$5)\ \sqrt{x} = \frac{1}{x}$$

Общие методы решения уравнений:

- Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.
- Метод разложения на множители.
- Метод введения новой переменной.
- Функционально-графический метод.

1. Замена уравнения h(f(x)) = h(g(x)) уравнением f(x) = g(x).

Этот метод мы применяем:

- при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a>0$, $a\neq1$) к уравнению $f(x) = g(x)$;
- при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;
- при решении иррациональных уравнений, когда переходили от уравнения $\sqrt[n]{h(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример 1:

Решить уравнение

$$5^{2x^2-3x+1}-5=0$$

$$5^{2x^2-3x+1}=5;$$

$$2x^2-3x+1=1;$$

$$2x^2-3x=0;$$

$$x=0; x=1{,}5.$$

Ответ: 0; 1,5.

Пример 2:

$$\log_3\left(x^2-3x-5\right)=\log_3\left(7-2x\right);$$

$$x^2-3x-5=7-2x;$$

$$x^2-x-12=0;$$

$$x_1=4, x_2=-3.$$

Проверка:

$$\begin{cases} x^2-3x-5 > 0, \\ 7-2x > 0. \end{cases}$$

$x=4$ – *посторонний корень*

Ответ: -3.

2. Метод разложения на множители.

Уравнение f(x)g(x)h(x) = 0 можно заменить совокупностью уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=0; \\ g(x)=0; \\ h(x)=0. \end{array}\right.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Пример 3:

Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}-3=0;\\ 2^{x^2+6x+5}=1;\\ \ln(x-8)=0.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x+2=9;\\ x^2+6x+5=0;\\ x-8=1.\end{array}\right.$$

Пример 3:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 7; \\ x_2 = -1; x_3 = -5; \\ x_4 = 9. \end{array}\right.$$

Проверка : ОДЗ :

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x - 8 \geq 0. \end{cases}$$

Из найденных корней этой системе неравенств удовлетворяет только x = 9, остальные являются посторонними для данного уравнения.

Ответ: 9.

3. Метод введения новой переменной.

Если уравнение $f(x)=0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x))=0$, то нужно ввести новую переменную $u=g(x)$, решить уравнение $p(u)=0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} g(x)=u_1; \\ g(x)=u_2; \\ \ldots. \\ g(x)=u_n \end{array}\right.$$

где $u_1, u_2, \ldots u_n$ - корни уравнения $p(u)=0$.

Пример 4:

Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2+3x-3}+\frac{2}{x^2+3x+1}=\frac{7}{5}.$$

Введём новую переменную $y = x^2 + 3x$ **.**

Получим:

$$\frac{1}{y-3}+\frac{2}{y+1}=\frac{7}{5}.$$

Освободившись от знаменателей, получим:

$$7y^2-29y+4=0;$$

Пример 4:

Найдём корни квадратного уравнения: $$y_1 = 4; y_2 = \frac{1}{7}.$$

Выполним проверку корней на выполнение условия:

$$5(y - 3)(y + 1) \neq 0.$$

Оба корня удовлетворяют данному условию.

Пример 4:

Вернёмся к замене переменной и решим два уравнения:

$$x^2 + 3x = 4 \quad \text{и} \quad x^2 + 3x = \frac{1}{7}.$$

$$x_{1/2} = 1; -4.$$

$$x_{3/4} = \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$$

Ответ: $1; -4; \ \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$

3. Функционально-графический метод.

Чтобы графически решить уравнение $f(x) = g(x)$ нужно построить графики функций

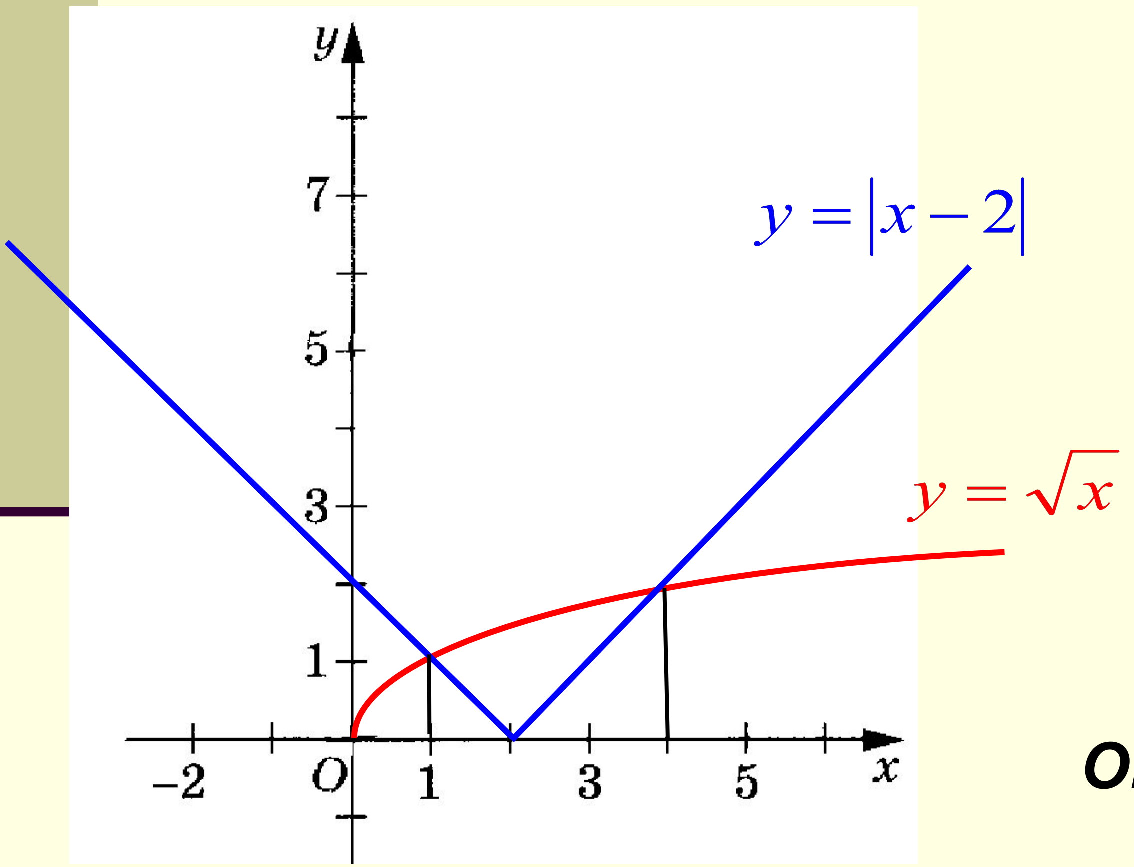
$y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

Пример 5:

1) Решить уравнение $\sqrt{x}$ = | x – 2 |

1 шаг: построить графики функций у = $\sqrt{x}$ и у = | x – 2 |

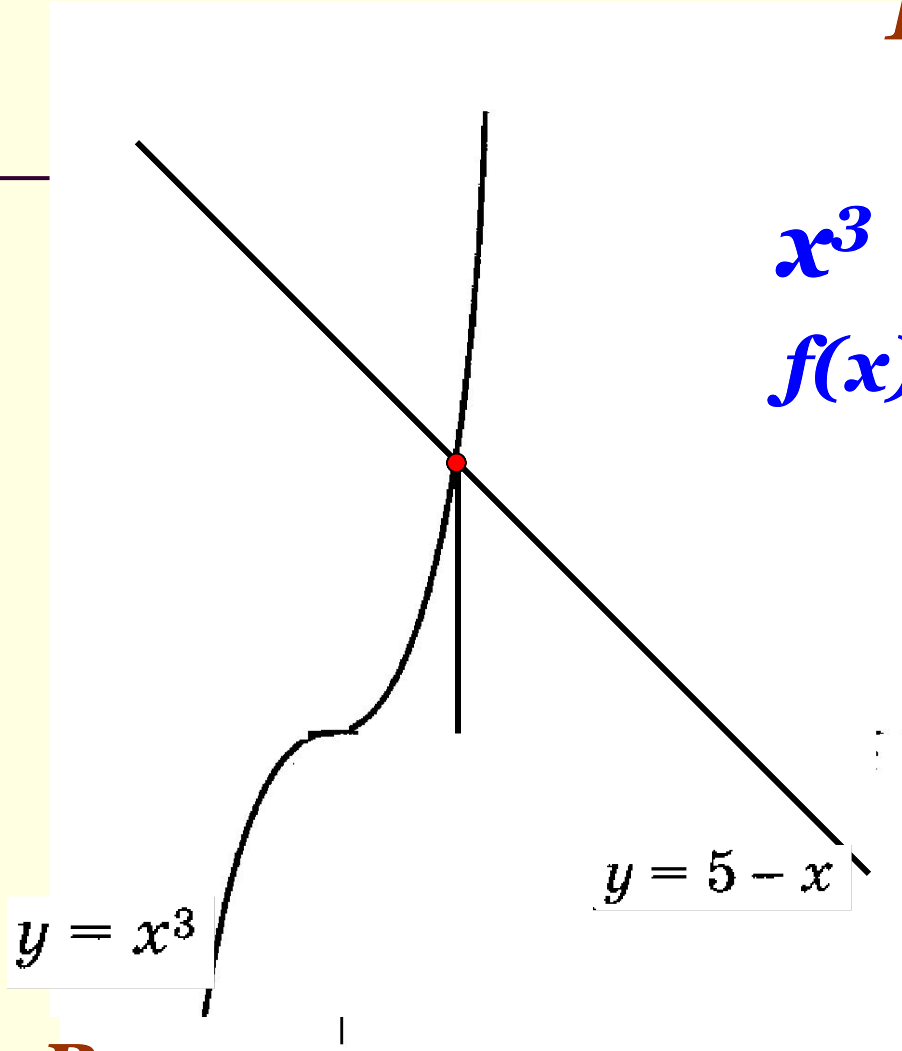
2 шаг: найти абсциссы точек (или точки) пересечения графиков



Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

2. $x^3 - 5 + x = 0$

Пример 6:



$$x^3 = 5 - x$$

$f(x) = x^3$ $g(x) = 5 - x$

$x \approx 1{,}5$

Решением является абсцисса точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения

Графические методы решения уравнений

<u>Построение графиков функций левой и правой частей уравнения</u> **(решением является абсциссы точек (точки) пересечения графиков)**

<u>Функционально – графические методы</u>

- **<u>Использование свойств функций левой и правой частей уравнения</u>** **(монотонность, четность, нечетность)**
- **<u>Использование ограниченности функций левой и правой частей уравнения</u>** **(метод оценки)**

Пример 7:

Решить уравнение

$$\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2.$$

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

В вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения.

Пример 7:

Найдём координаты вершины параболы.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = y(x_0); \qquad (1;1)$$

Для функции y = x² - 2x + 2 $y_{наим.} = 1.$

Функция y = cos 2πx обладает свойством: $y_{наиб.} = 1.$

Пример 7:

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1, \\ \cos 2\pi x = 1. \end{cases}$$

Решив 1 уравнение получили: $x = 1$. Это значение удовлетворяет и 2 уравнению системы, следовательно, является единственным корнем заданного уравнения. **Ответ: 1.**

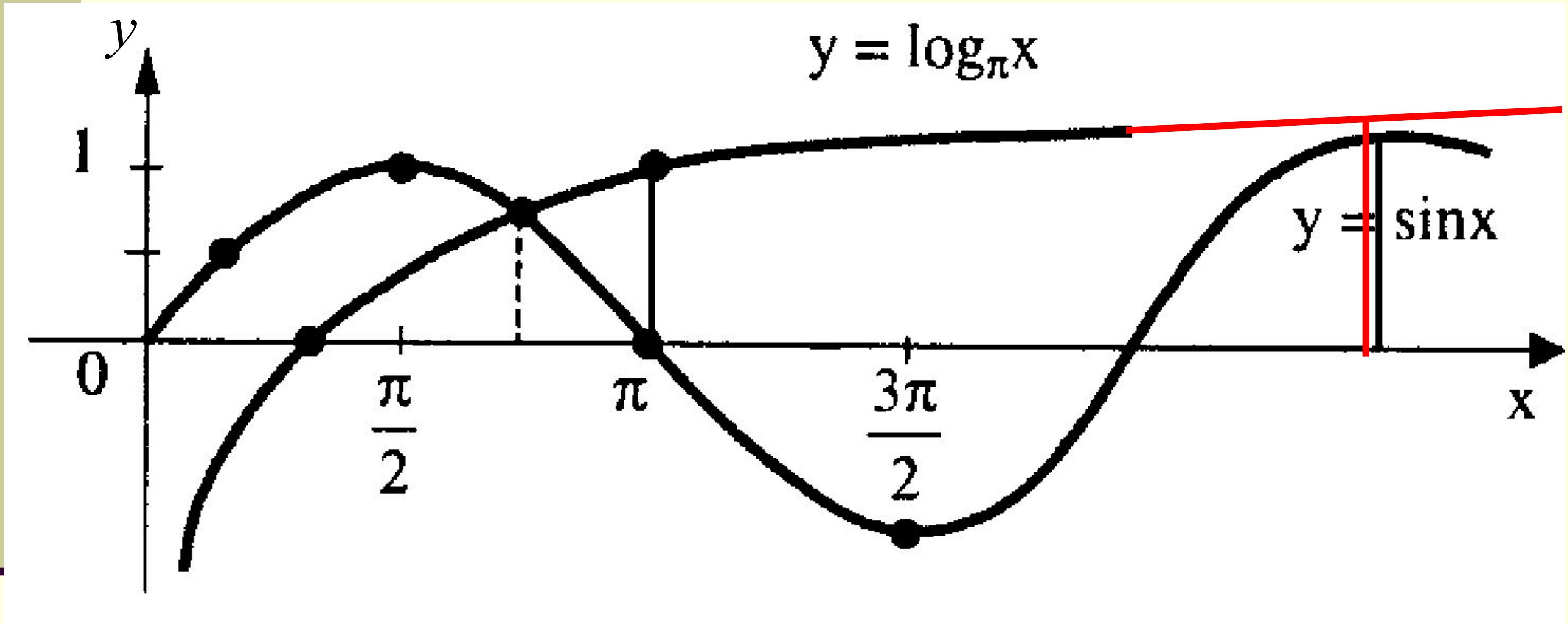
Мы рассмотрели общие методы решения уравнений, примеры применения этих методов.

Перейдём к практической работе.

Решаем № 27.5 (в), 27.9 (б), 27.12 (б), 27.14 (а), 27.19 (б), 27.21 (а), 27.25 (а,б).

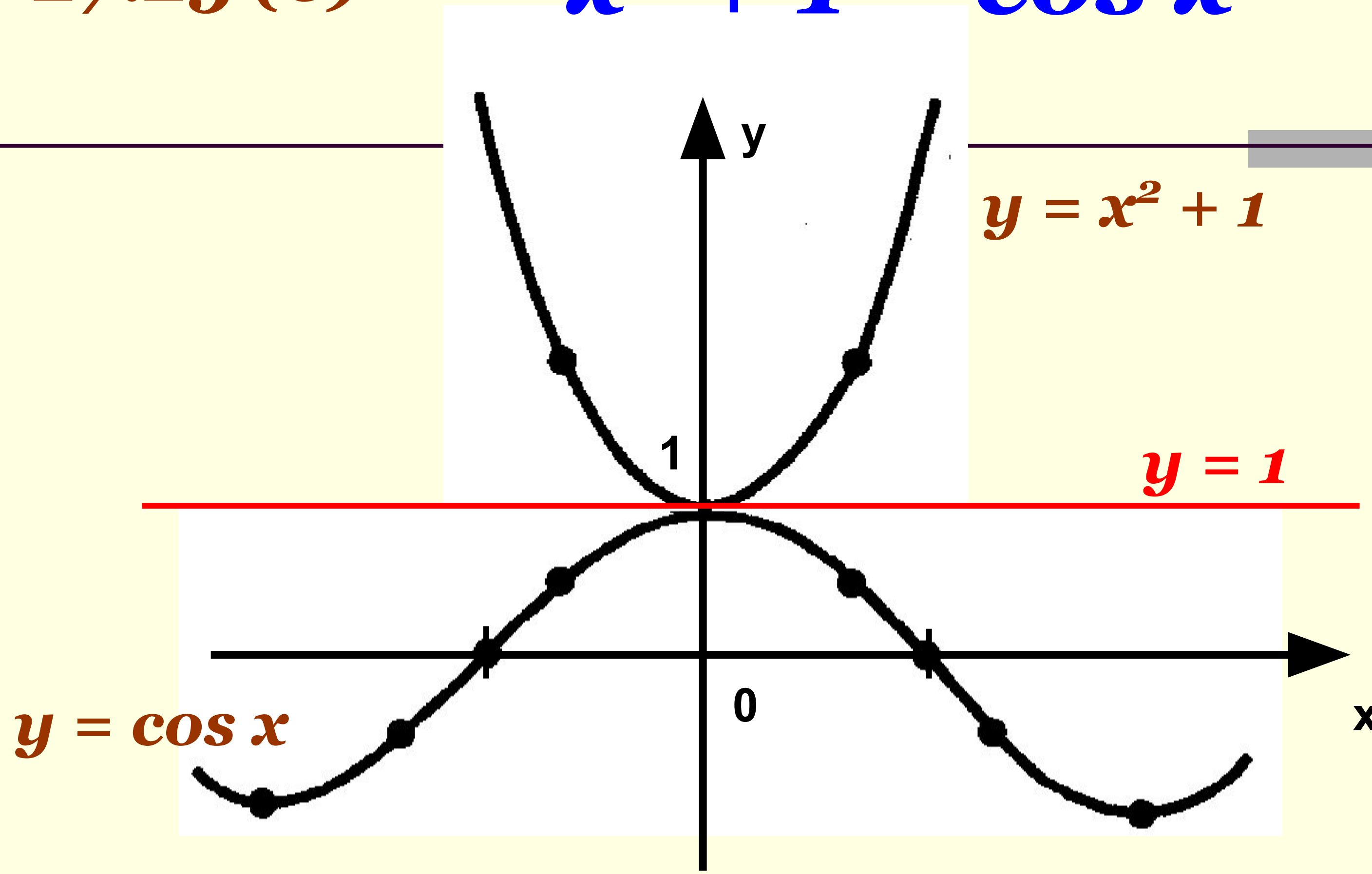
№ 27.25 (а)

$$\log_{\pi} x = \sin x$$



Ответ: одно решение

№ 27.25 (б) $x^2 + 1 = \cos x$



$x = 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 1 &\ge 1 \\ \cos x &\le 1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} x^2 + 1 &= 1 \\ \cos x &= 1 \end{aligned}\right.$$

Ответ: 1 корень.

Подведем итоги

Общие методы решения уравнений

Аналитические

- 1
- 2
- 3

Функционально-графические

- По графику
- По свойствам