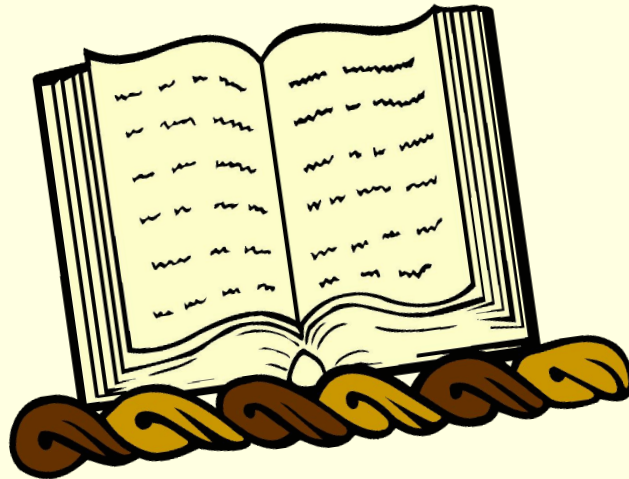


■ *«Правильному применению методов можно научиться только применяя их на разнообразных примерах»*

Г. Цейтен

■ 11 КЛАСС

Общие методы решения уравнений



■ *УМК А.Г. Мордкович
(профильный уровень)*

Цели урока:

- *Рассмотреть общие методы решения уравнений.*
- *Научиться применять эти методы при решении уравнений.*
- *Формировать навыки применение наиболее рациональных способов решения уравнений.*

Рассмотрим уравнения:



$$1) \quad x^2 - 2x = 0;$$

$$2) \quad \sin^2 x + \sin x = 0;$$

$$3) \quad 7^{x^2 + 5x} = 49;$$

Рассмотрим уравнения:



$$4) \log^2_2 x - 4 \log_2 x + 3 = 0;$$

$$5) \sqrt{x} = \frac{1}{x}$$

Общие методы решения уравнений:

- *Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.*
- *Метод разложения на множители.*
- *Метод введения новой переменной.*
- *Функционально-графический метод.*

1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.

Этот метод мы применяем:

- при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$) к уравнению $f(x) = g(x)$;
- при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;
- при решении иррациональных уравнений, когда переходили от уравнения $\sqrt[n]{h(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ к уравнению $f(x) = g(x)$.



Пример 1:

Решить уравнение

$$5^{2x^2 - 3x + 1} - 5 = 0$$

$$5^{2x^2 - 3x + 1} = 5;$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 1;$$

$$2x^2 - 3x = 0;$$

$$x = 0; x = 1,5.$$

Ответ: 0; 1,5.



Пример 2:

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x);$$

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$

$$x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_1 = 4, x_2 = -3.$$

Проверка :

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 \not\geq 0, \\ 7 - 2x \not\geq 0. \end{cases}$$

*$x = 4$ – посторонний
корень*

Ответ : -3 .

2. Метод разложения на множители.

Уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0; \\ g(x) = 0; \\ h(x) = 0. \end{array} \right.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.



Пример 3:

Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}-3=0; \\ 2^{x^2+6x+5}=1; \\ \ln(x-8)=0. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x+2=9; \\ x^2+6x+5=0; \\ x-8=1. \end{array} \right.$$



Пример 3:

$$\begin{cases} x_1 = 7; \\ x_2 = -1; x_3 = -5; \\ x_4 = 9. \end{cases}$$

Проверка : ОДЗ :

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x - 8 \leq 0. \end{cases}$$

Из найденных корней этой системе неравенств удовлетворяет только $x = 9$, остальные являются посторонними для данного уравнения.

Ответ: 9.

3. Метод введения новой переменной.

Если уравнение $f(x) = 0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, решить уравнение $p(u) = 0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$\begin{cases} g(x) = u_1; \\ g(x) = u_2; \\ \dots \\ g(x) = u_n \end{cases}$$

где u_1, u_2, \dots, u_n - корни уравнения $p(u) = 0$.



Пример 4:

Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2 + 3x - 3} + \frac{2}{x^2 + 3x + 1} = \frac{7}{5}.$$

Введём новую переменную $y = x^2 + 3x$.

Получим:

$$\frac{1}{y - 3} + \frac{2}{y + 1} = \frac{7}{5}.$$

**Освободившись от знаменателей,
получим:**

$$7y^2 - 29y + 4 = 0;$$

Пример 4:

Найдём корни квадратного уравнения:

$$y_1 = 4; y_2 = \frac{1}{7}.$$

Выполним проверку корней на выполнение условия:

$$5(y - 3)(y + 1) \neq 0.$$

Оба корня удовлетворяют данному условию.

Пример 4:

Вернёмся к замене переменной и решим два уравнения:

$$x^2 + 3x = 4 \quad \text{и} \quad x^2 + 3x = \frac{1}{7}.$$

$$x_{1/2} = 1; -4.$$

$$x_{3/4} = \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$$

Ответ: $1; -4; \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$

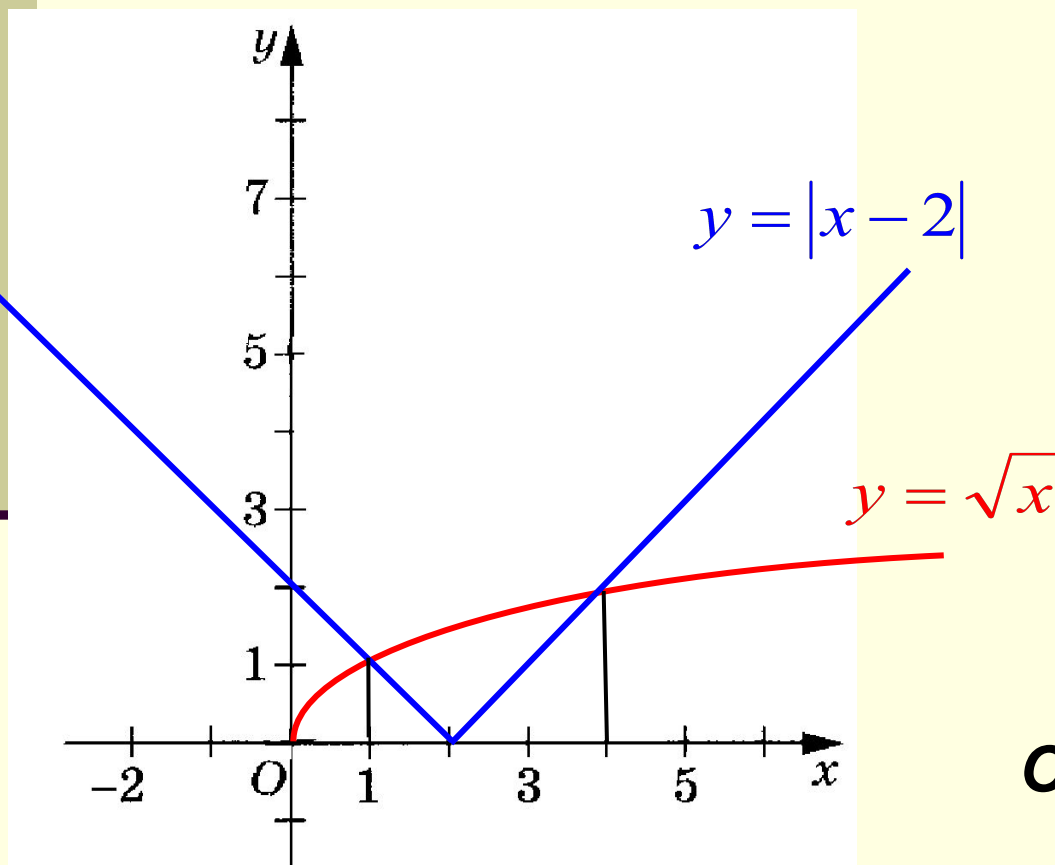
3. Функционально-графический метод.

Чтобы графически решить уравнение $f(x) = g(x)$ нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

1) Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$ **Пример 5:**

1 шаг: построить графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$

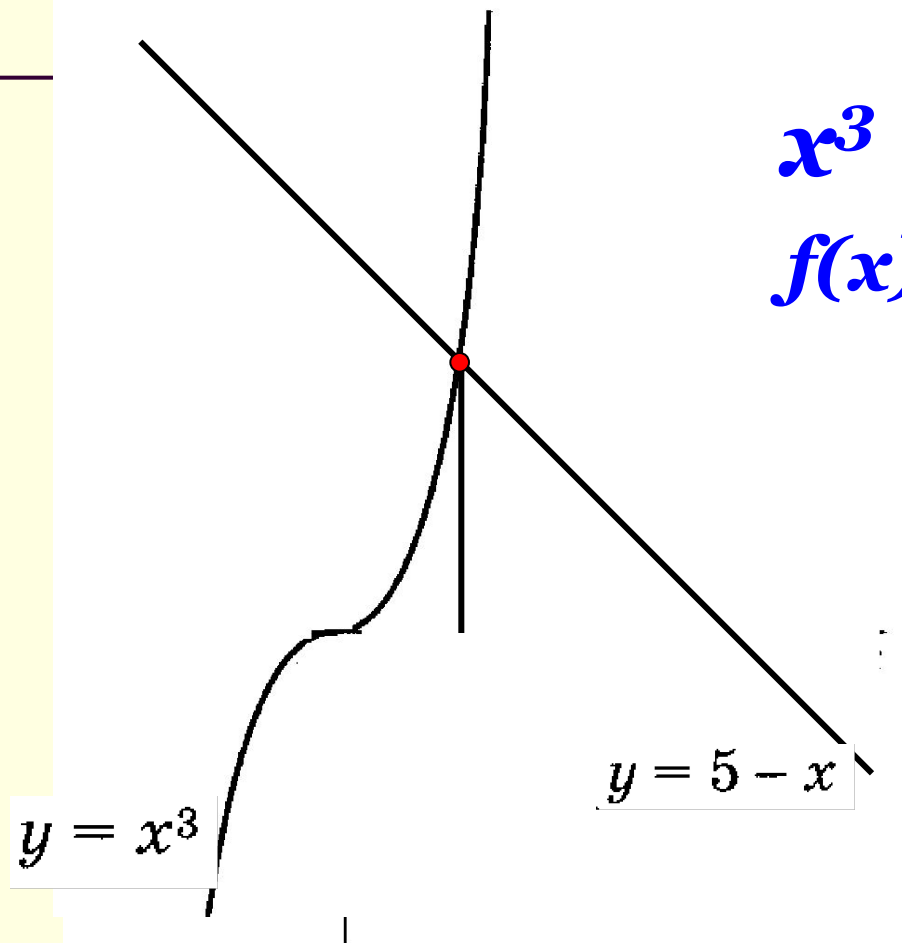
2 шаг: найти абсциссы точек (или точки) пересечения графиков



Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

$$2. \quad x^3 - 5 + x = 0$$

Пример 6:



$$x^3 = 5 - x$$

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = 5 - x$$

$$x \approx 1,5$$

Решением является абсцисса точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения

Графические методы решения уравнений



```
graph TD; A[Графические методы решения уравнений] --> B[Построение графиков функций левой и правой частей уравнения (решением является абсциссы точек (точки) пересечения графиков)]; A --> C[Функционально – графические методы]; C --> D[Использование свойств функций левой и правой частей уравнения (монотонность, четность, нечетность)]; C --> E[Использование ограниченности функций левой и правой частей уравнения (метод оценки)];
```

Построение графиков функций левой и правой частей уравнения
(решением является абсциссы точек (точки) пересечения графиков)

Функционально – графические методы

Использование свойств функций левой и правой частей уравнения
(монотонность, четность, нечетность)

Использование ограниченности функций левой и правой частей уравнения
(метод оценки)



Пример 7:

Решить уравнение

$$\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2.$$

**Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$.
Её графиком является парабола,
ветви которой направлены вверх.
В вершине параболы функция
достигает своего наименьшего
значения.**



Пример 7:

Найдём координаты вершины параболы.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = y(x_0); \quad (1;1)$$

Для функции $y = x^2 - 2x + 2$ $y_{\text{наим.}} = 1$.

Функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством: $y_{\text{наиб.}} = 1$.



Пример 7:

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1, \\ \cos 2\pi x = 1. \end{cases}$$

Решив 1 уравнение получили: $x = 1$.

*Это значение удовлетворяет и 2 уравнению системы, следовательно, является единственным корнем заданного уравнения. **Ответ: 1.***

Мы рассмотрели общие методы решения уравнений, примеры применения этих методов.

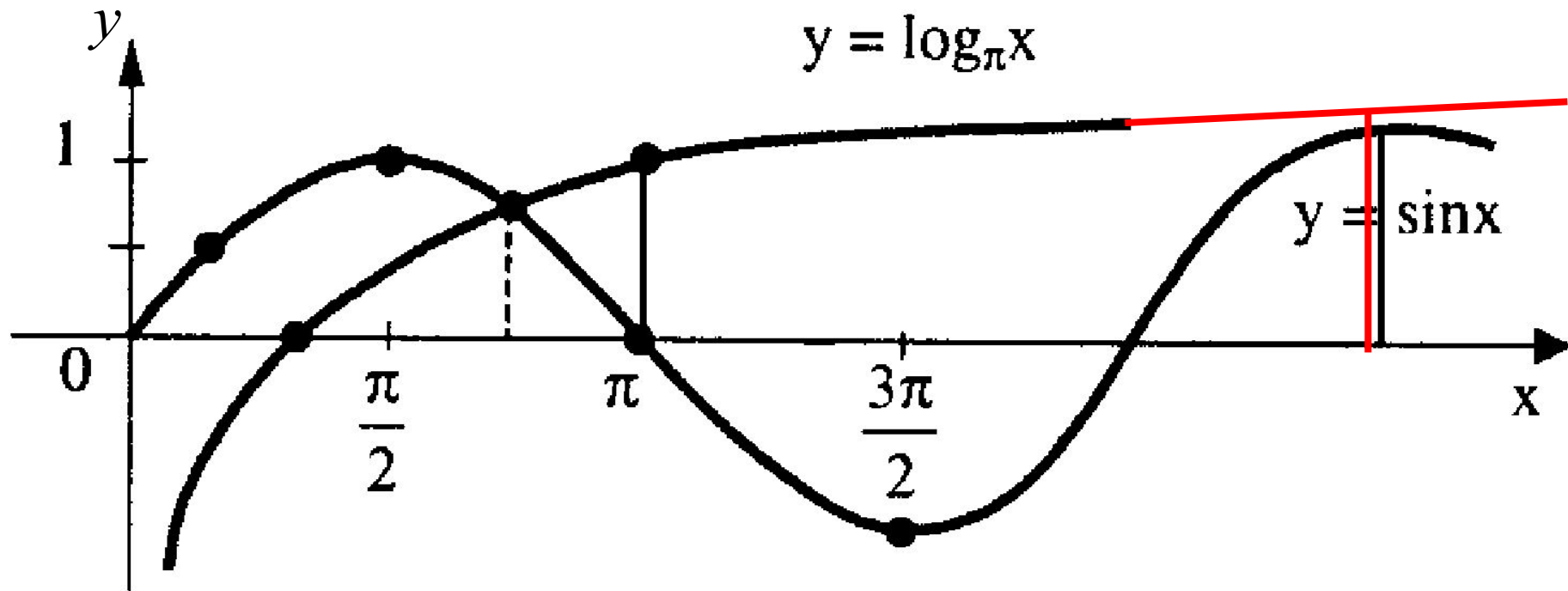
Перейдём к практической работе.



Решаем № 27.5 (в), 27.9 (б), 27.12 (б), 27.14 (а), 27.19 (б), 27.21 (а), 27.25 (а,б).

№ 27.25 (a)

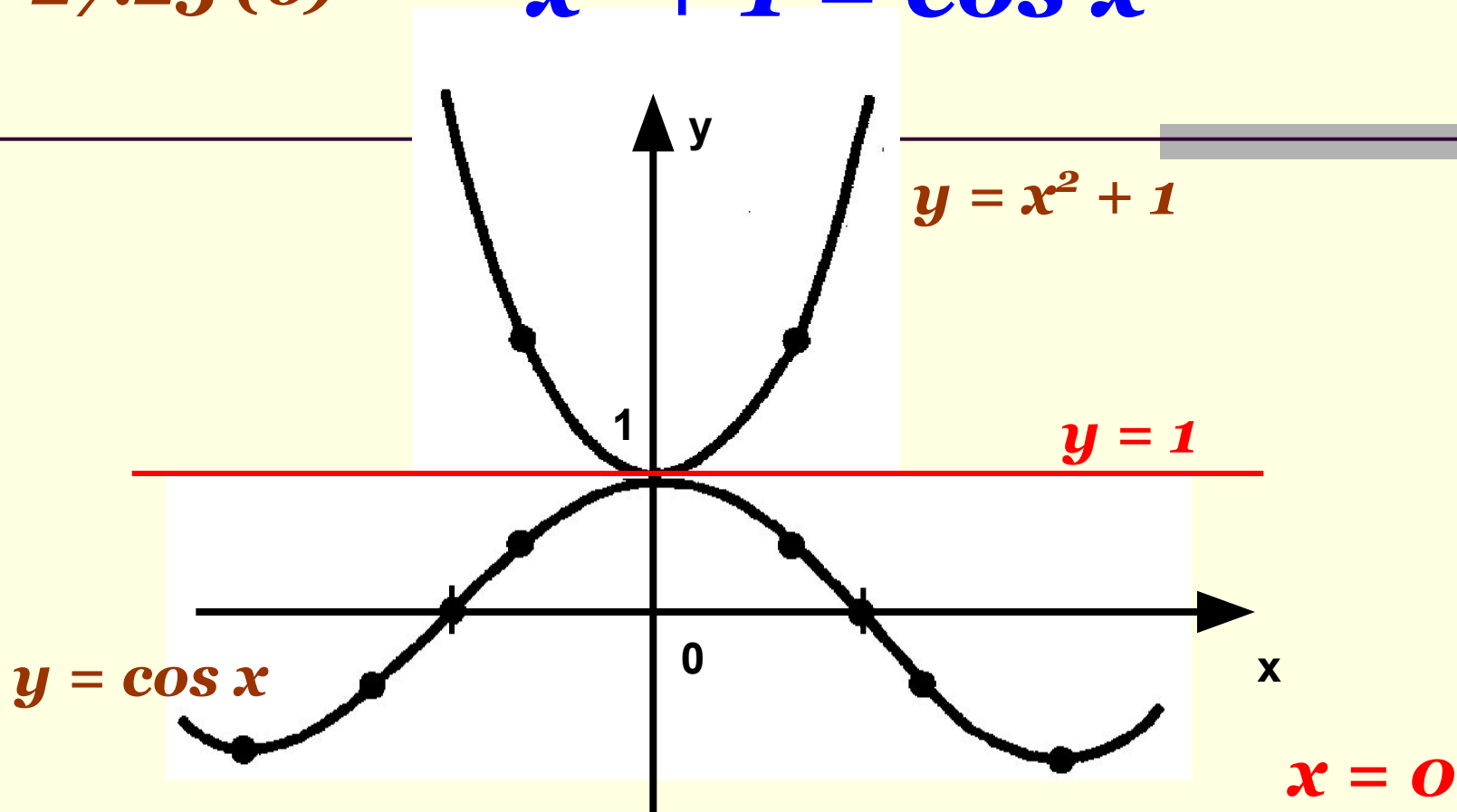
$$\log_{\pi} x = \sin x$$



Ответ: одно решение

№ 27.25 (б)

$$x^2 + 1 = \cos x$$



$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 1 \\ \cos x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

Ответ: 1 корень.



Подведем итоги

**Общие методы решения
уравнений**

Аналитические

1

2

3

Функционально-графические

**По
графику**

**По
свойствам**