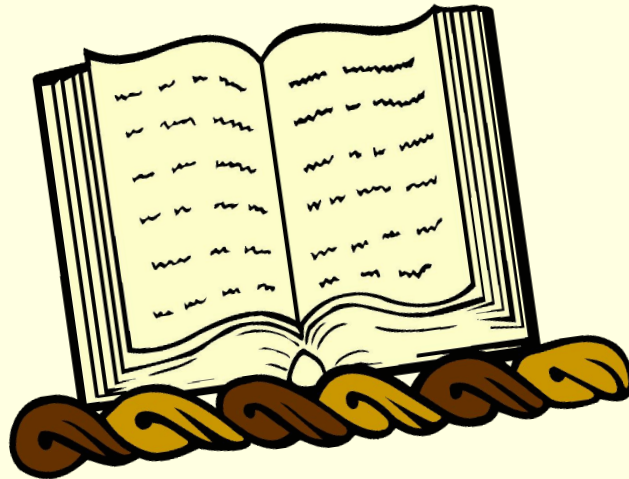


■ *«Правильному применению методов можно научиться только применяя их на разнообразных примерах»*

*Г. Цейтен*

■ 11 КЛАСС

# *Общие методы решения уравнений*



■ *УМК А.Г. Мордкович  
(профильный уровень)*

# *Цели урока:*

---

- *Рассмотреть общие методы решения уравнений.*
- *Научиться применять эти методы при решении уравнений.*
- *Формировать навыки применение наиболее рациональных способов решения уравнений.*

*Рассмотрим уравнения:*



$$1) \quad x^2 - 2x = 0;$$

$$2) \quad \sin^2 x + \sin x = 0;$$

$$3) \quad 7^{x^2 + 5x} = 49;$$

*Рассмотрим уравнения:*



$$4) \log^2_2 x - 4 \log_2 x + 3 = 0;$$

$$5) \sqrt{x} = \frac{1}{x}$$

# *Общие методы решения уравнений:*

---

- *Замена уравнения  $h(f(x)) = h(g(x))$  уравнением  $f(x) = g(x)$ .*
- *Метод разложения на множители.*
- *Метод введения новой переменной.*
- *Функционально-графический метод.*

# 1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$ .

Этот метод мы применяем:

- при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) к уравнению  $f(x) = g(x)$ ;
- при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  к уравнению  $f(x) = g(x)$ ;
- при решении иррациональных уравнений, когда переходили от уравнения  $\sqrt[n]{h(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$  к уравнению  $f(x) = g(x)$ .



## *Пример 1:*

*Решить уравнение*

$$5^{2x^2 - 3x + 1} - 5 = 0$$

$$5^{2x^2 - 3x + 1} = 5;$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 1;$$

$$2x^2 - 3x = 0;$$

$$x = 0; x = 1,5.$$

*Ответ: 0; 1,5.*



## Пример 2:

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x);$$

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$

$$x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_1 = 4, x_2 = -3.$$

*Проверка :*

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 \not\geq 0, \\ 7 - 2x \not\geq 0. \end{cases}$$

*$x = 4$  – посторонний  
корень*

*Ответ :  $-3$ .*



## ***2. Метод разложения на множители.***

***Уравнение  $f(x)g(x)h(x) = 0$  можно заменить совокупностью уравнений:***

$$\left[ \begin{array}{l} f(x) = 0; \\ g(x) = 0; \\ h(x) = 0. \end{array} \right.$$

***Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.***



## Пример 3:

*Решить уравнение*

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sqrt{x+2}-3=0; \\ 2^{x^2+6x+5}=1; \\ \ln(x-8)=0. \end{array} \right. \left[ \begin{array}{l} x+2=9; \\ x^2+6x+5=0; \\ x-8=1. \end{array} \right.$$



## Пример 3:

$$\begin{cases} x_1 = 7; \\ x_2 = -1; x_3 = -5; \\ x_4 = 9. \end{cases}$$

Проверка : ОДЗ :

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x - 8 \leq 0. \end{cases}$$

**Из найденных корней этой системе неравенств удовлетворяет только  $x = 9$ , остальные являются посторонними для данного уравнения.**

**Ответ: 9.**

### 3. Метод введения новой переменной.

Если уравнение  $f(x) = 0$  удалось преобразовать к виду  $p(g(x)) = 0$ , то нужно ввести новую переменную  $u = g(x)$ , решить уравнение  $p(u) = 0$ , а затем решить совокупность уравнений:

$$\left[ \begin{array}{l} g(x) = u_1; \\ g(x) = u_2; \\ \dots \\ g(x) = u_n \end{array} \right.$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_n$  - корни уравнения  $p(u) = 0$ .



## Пример 4:

**Решить уравнение**

$$\frac{1}{x^2 + 3x - 3} + \frac{2}{x^2 + 3x + 1} = \frac{7}{5}.$$

**Введём новую переменную**  $y = x^2 + 3x$ .

**Получим:**

$$\frac{1}{y - 3} + \frac{2}{y + 1} = \frac{7}{5}.$$

**Освободившись от знаменателей,  
получим:**

$$7y^2 - 29y + 4 = 0;$$

## **Пример 4:**

**Найдём корни квадратного уравнения:**

$$y_1 = 4; y_2 = \frac{1}{7}.$$

**Выполним проверку корней на выполнение условия:**

$$5(y - 3)(y + 1) \neq 0.$$

**Оба корня удовлетворяют данному условию.**

## Пример 4:

Вернёмся к замене переменной и решим два уравнения:

$$x^2 + 3x = 4 \quad \text{и} \quad x^2 + 3x = \frac{1}{7}.$$

$$x_{1/2} = 1; -4.$$

$$x_{3/4} = \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$$

**Ответ:**  $1; -4; \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$

### **3. Функционально-графический метод.**

---

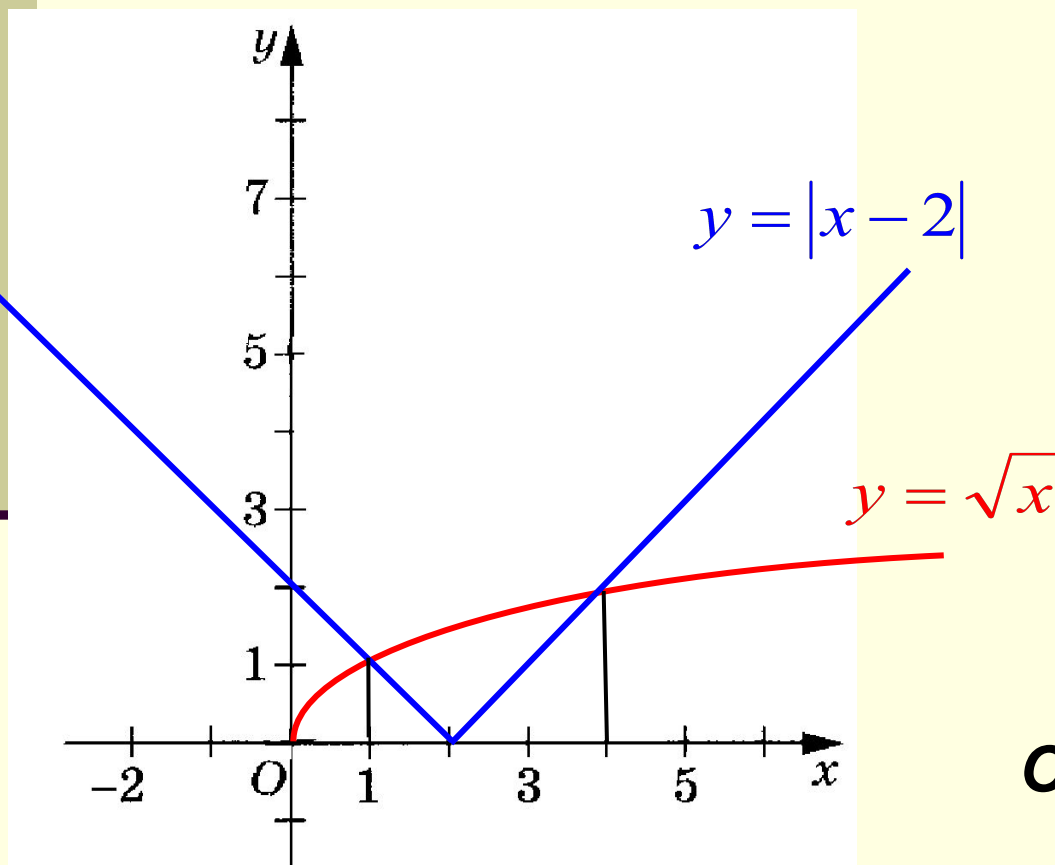
**Чтобы графически решить уравнение  $f(x) = g(x)$  нужно построить графики функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.**



1) Решить уравнение  $\sqrt{x} = |x - 2|$  **Пример 5:**

**1 шаг:** построить графики функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = |x - 2|$

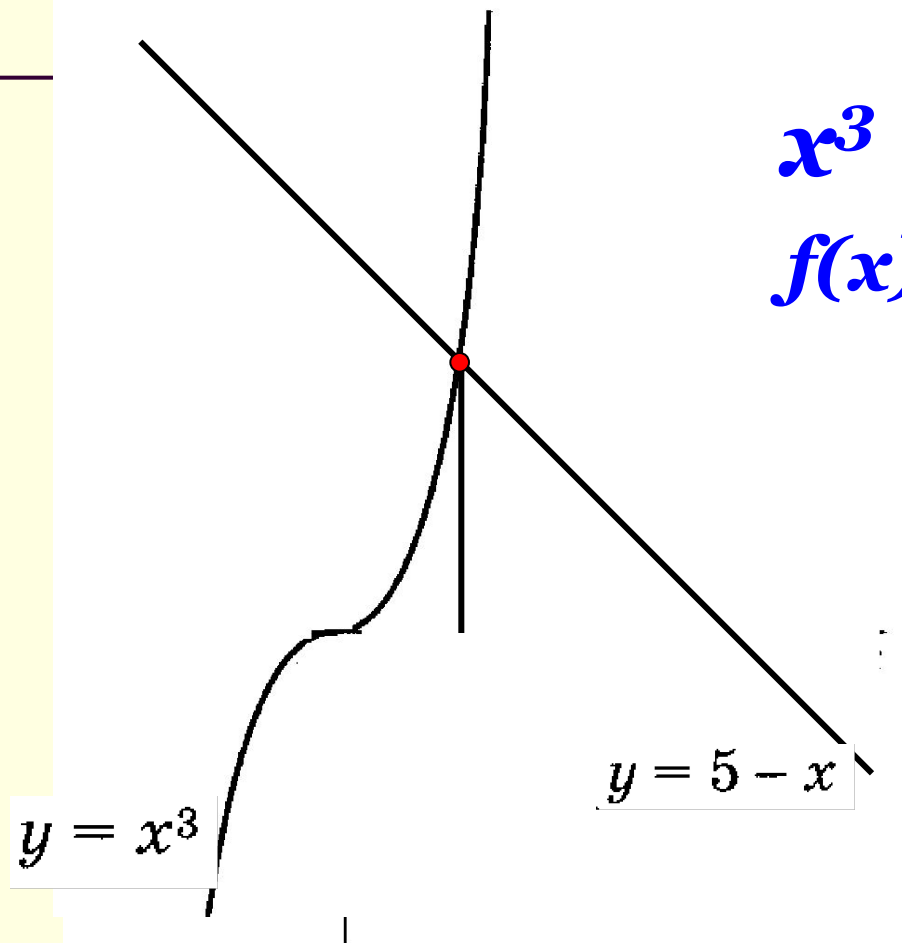
**2 шаг:** найти абсциссы точек (или точки) пересечения графиков



**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$

$$2. \quad x^3 - 5 + x = 0$$

*Пример 6:*



$$x^3 = 5 - x$$

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = 5 - x$$

$$x \approx 1,5$$

*Решением является абсцисса точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения*

# Графические методы решения уравнений



```
graph TD; A[Графические методы решения уравнений] --> B[Построение графиков функций левой и правой частей уравнения (решением является абсциссы точек (точки) пересечения графиков)]; A --> C[Функционально – графические методы]; C --> D[Использование свойств функций левой и правой частей уравнения (монотонность, четность, нечетность)]; C --> E[Использование ограниченности функций левой и правой частей уравнения (метод оценки)];
```

Построение графиков функций левой и правой частей уравнения  
(решением является абсциссы точек (точки) пересечения графиков)

## Функционально – графические методы

Использование свойств функций левой и правой частей уравнения  
(монотонность, четность, нечетность)

Использование ограниченности функций левой и правой частей уравнения  
(метод оценки)



## Пример 7:

**Решить уравнение**

$$\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2.$$

**Рассмотрим функцию  $y = x^2 - 2x + 2$ .  
Её графиком является парабола,  
ветви которой направлены вверх.  
В вершине параболы функция  
достигает своего наименьшего  
значения.**



## Пример 7:

*Найдём координаты вершины параболы.*

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = y(x_0); \quad (1;1)$$

*Для функции  $y = x^2 - 2x + 2$   $y_{\text{наим.}} = 1$ .*

*Функция  $y = \cos 2\pi x$  обладает свойством:  $y_{\text{наиб.}} = 1$ .*



## Пример 7:

**Задача сводится к решению системы уравнений**

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1, \\ \cos 2\pi x = 1. \end{cases}$$

**Решив 1 уравнение получили:  $x = 1$ .**

**Это значение удовлетворяет и 2 уравнению системы, следовательно, является единственным корнем заданного уравнения.      **Ответ: 1.****

*Мы рассмотрели общие методы решения уравнений, примеры применения этих методов.*

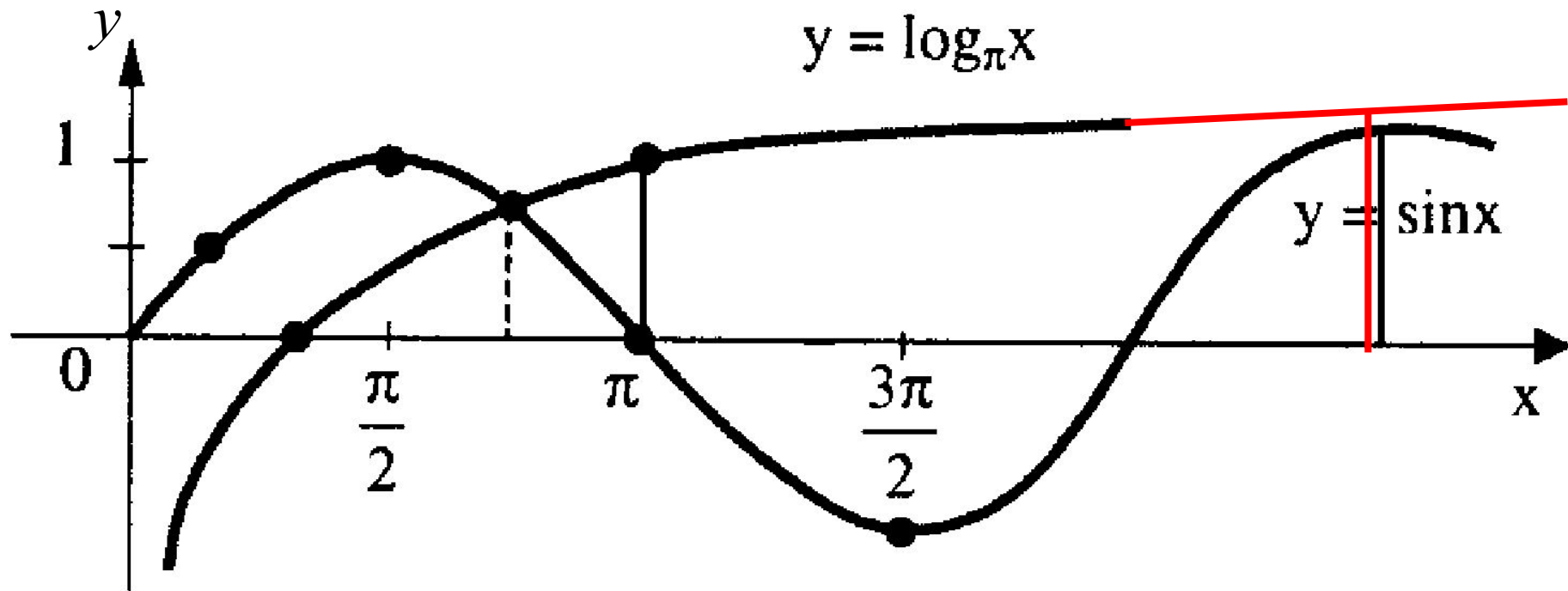
*Перейдём к практической работе.*



*Решаем № 27.5 (в), 27.9 (б), 27.12 (б), 27.14 (а), 27.19 (б), 27.21 (а), 27.25 (а,б).*

№ 27.25 (a)

$$\log_{\pi} x = \sin x$$

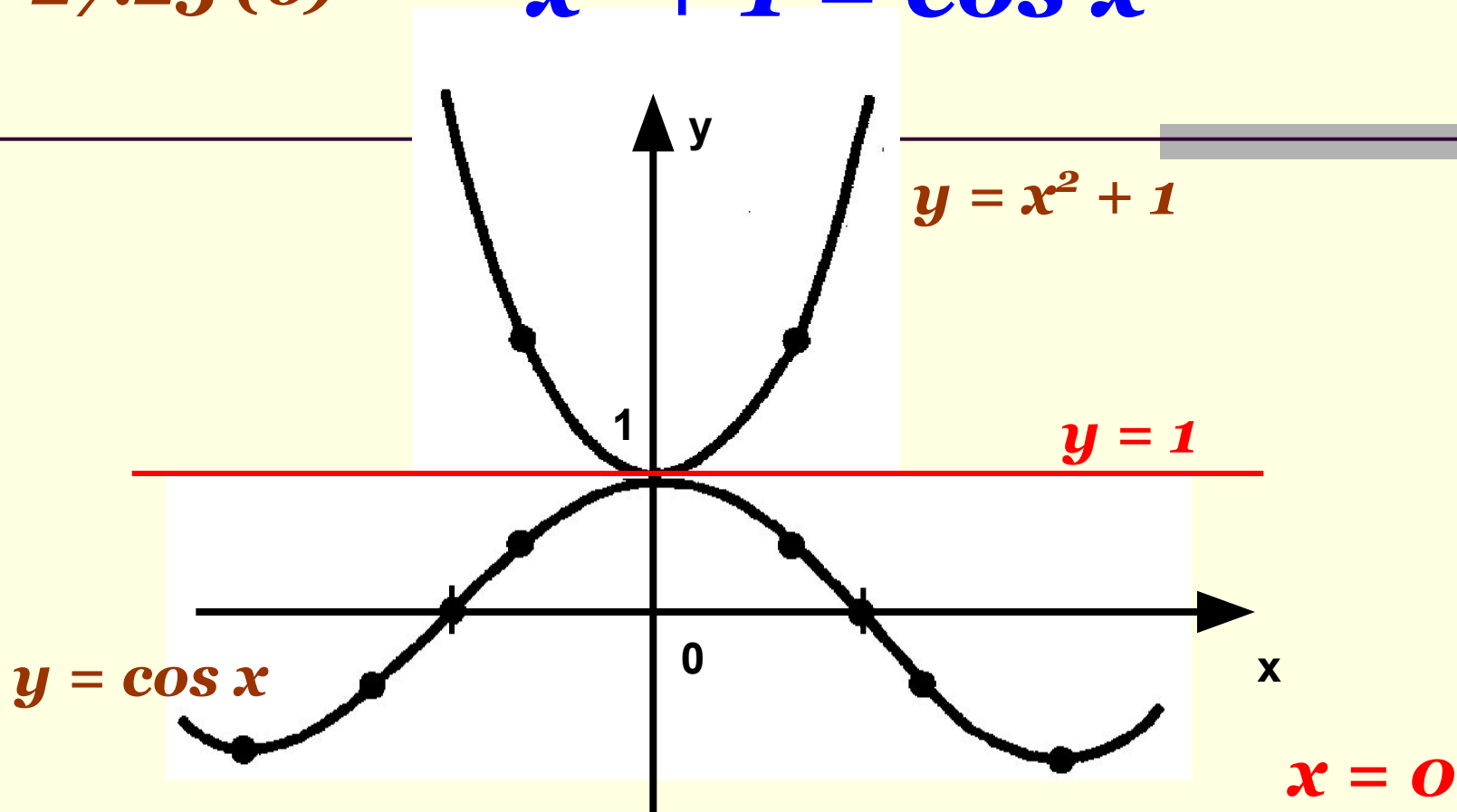


*Ответ: одно решение*



№ 27.25 (б)

$$x^2 + 1 = \cos x$$



$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 1 \\ \cos x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

Ответ: 1 корень.



# Подведем итоги

**Общие методы решения  
уравнений**

**Аналитические**

**1**

**2**

**3**

**Функционально-графические**

**По  
графику**

**По  
свойствам**