

# Решение задач на многогранники, цилиндр, конус, шар

Учитель математики  
Токарева Инна Александровна  
МБОУ гимназия №1  
Г. Липецк

а) Дано: цилиндр,  $AB_1 = 16$  см,  $\angle B_1AB = 30^\circ$   
(рис. 1).

Найти:  $h$ ;  $R_{\text{осн}}$ .

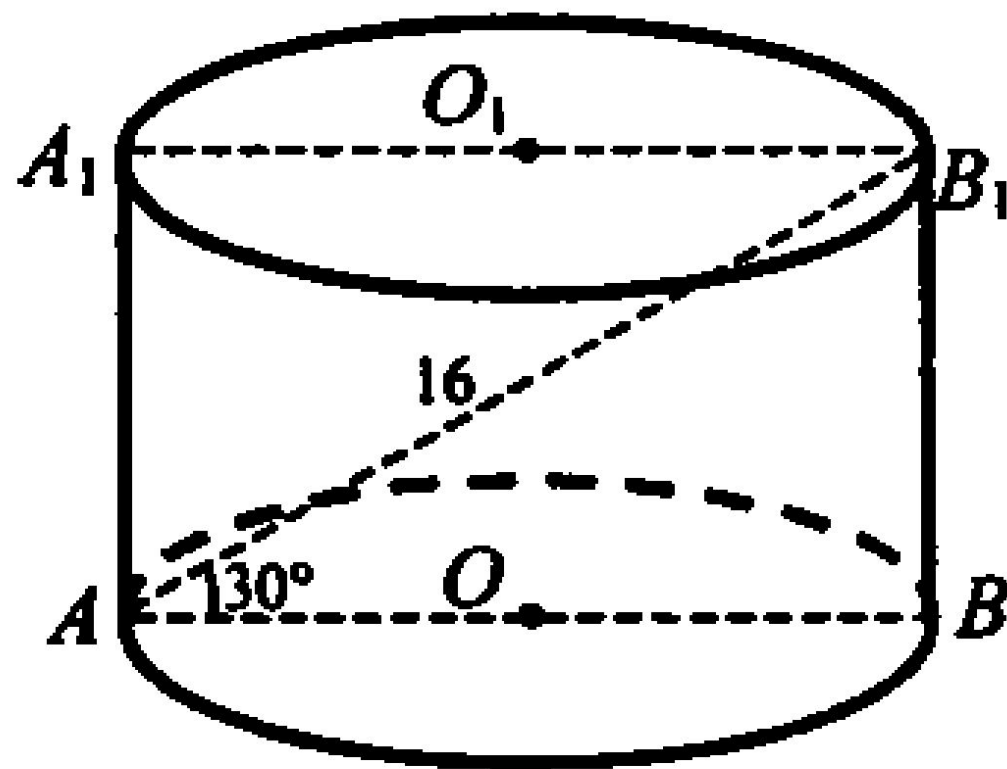


Рис. 1

б) Дано: цилиндр,  $ABDC$  - квадрат;  $AD = 12$  см  
(рис. 2).

Найти:  $S_{ABDC}$ ;  $S_{\text{б.п.}}$

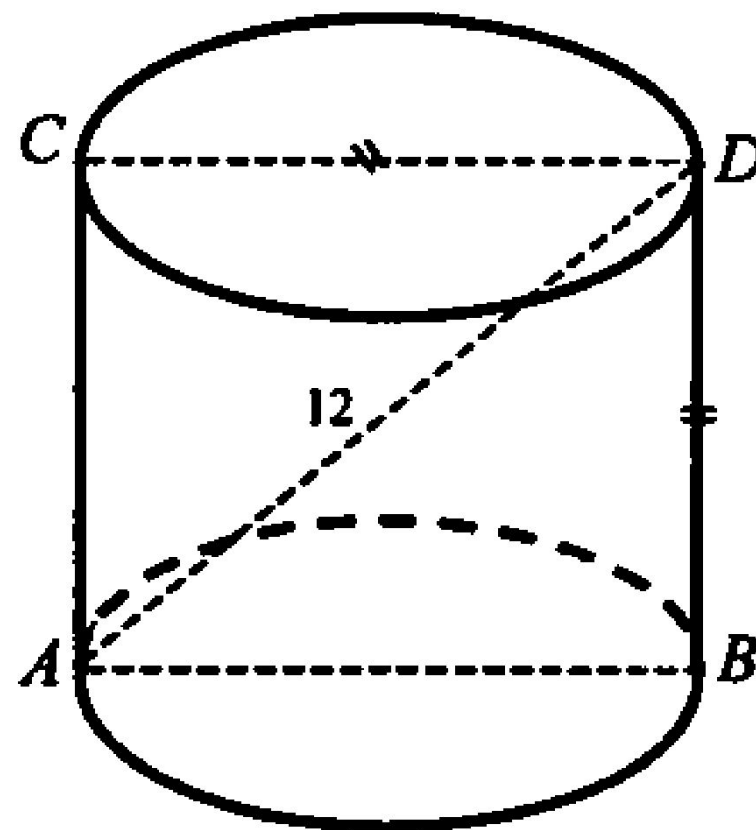


Рис. 2

в) Дано: конус,  $\angle CSB = 120^\circ$ ;  $SB = 12$  см (рис. 3).  
Найти:  $h_k$ ;  $R_{\text{осн.}}$ .

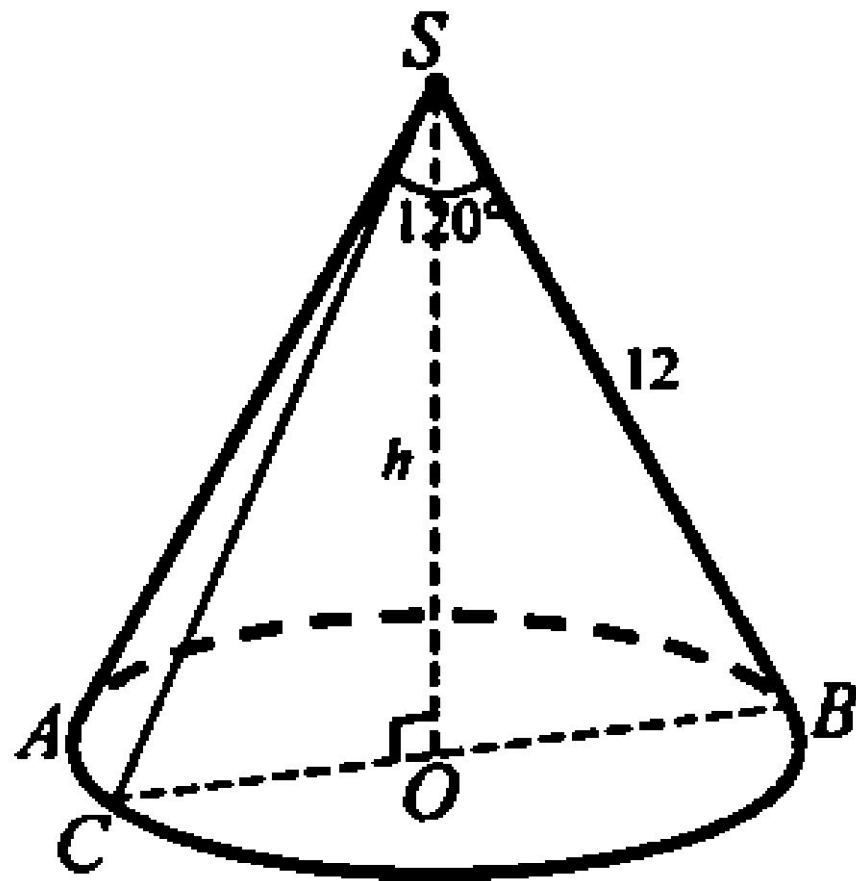


Рис. 3

г) Дано: конус,  $SO = 16$  см;  $SO_1 = 4$  см;  $R_{\text{осн.}} =$   
 $= OB = 20$  см (рис. 4).

Найти:  $S_{\text{сеч.}}$

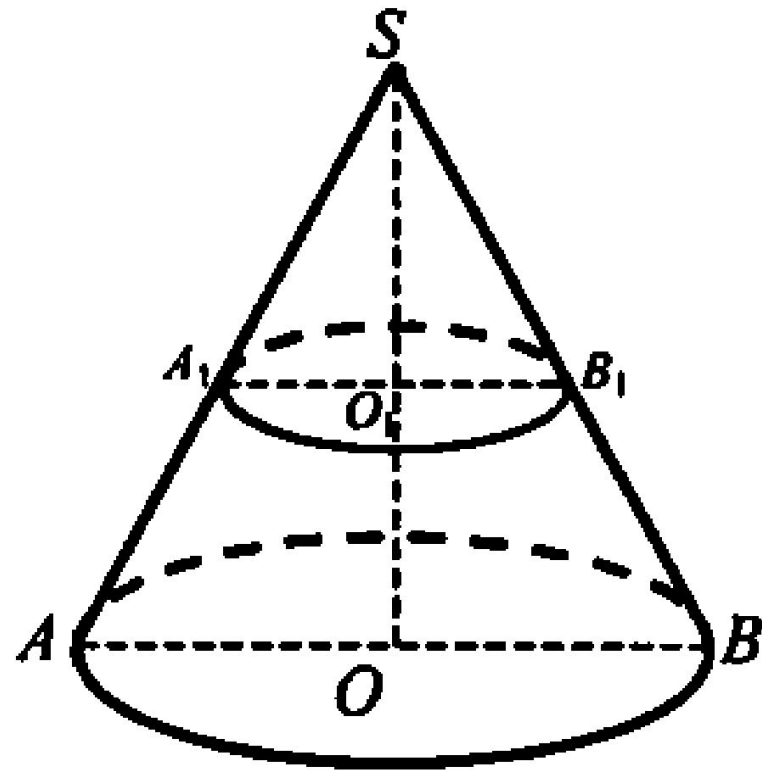


Рис. 4

д) Дано: шар,  $R$  – радиус шара,  $\angle OAO_1 = \alpha$   
(рис. 5).

Найти:  $S_{\text{сеч.}}$

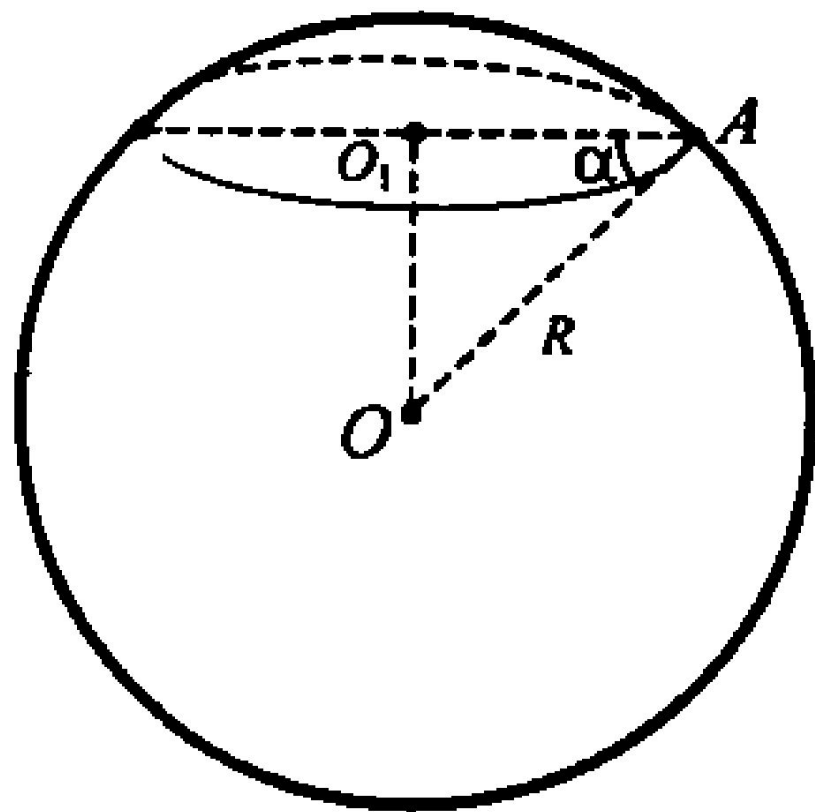


Рис. 5

е) *Дано:* шар; сечение шара плоскостью;  
 $\triangle ABC$  вписан в сечение;  $AB = BC = 40$  см;  
 $AC = 48$  см;  $OO_1 = 5$  см (рис. 6).

*Найти:*  $R_{\text{шара}}$ ;  $R = OD$ .

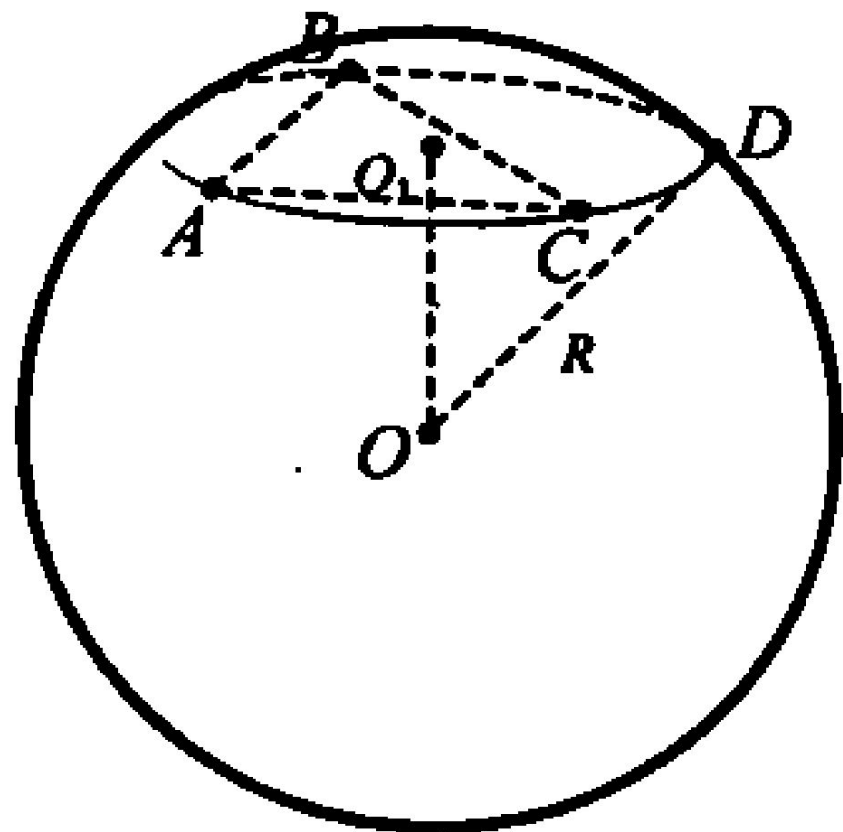


Рис. 6





## *Ответы к задачам:*

а)  $h = 8$  см;  $R = 4\sqrt{3}$  см.

в)  $h = 6$  см;  $R_{\text{осн.}} = 6\sqrt{3}$  см.

д)  $\pi R^2 \cos^2 \alpha$ .

б)  $S_{ABCD} = 72$  см<sup>2</sup>;  $S_{\text{б.п.}} = 72\pi$  см<sup>2</sup>.

г)  $S_{\text{сеч.}} = 25\pi$  см<sup>2</sup>.

е)  $5\sqrt{26}$  см.

# Тест

## **Вариант I**

1. Если сфера касается всех граней многогранника, то она называется...
  - а) описанной около многогранника;
  - б) вписанной в многогранник;
  - в) касательной к многограннику.
2. Все вершины многогранника лежат на сфере, такой многогранник называется...
  - а) вписанным в сферу;
  - б) описанным около сферы;
  - в) касательным к сфере.
3. Шар можно вписать в...
  - а) произвольную призму;
  - б) треугольную пирамиду;
  - в) треугольную призму.
4. В прямую призму, в основание которой вписана окружность, можно вписать сферу, если...
  - а) высота призмы равна диаметру вписанной окружности;
  - б) центр сферы лежит на высоте призмы;
  - в) высота призмы равна радиусу вписанной окружности.
5. Во всякий цилиндр можно вписать сферу, если...
  - а) центр сферы лежит на оси цилиндра;
  - б) сфера касается оснований цилиндра;
  - в) его осевое сечение – квадрат.

## **Вариант II**

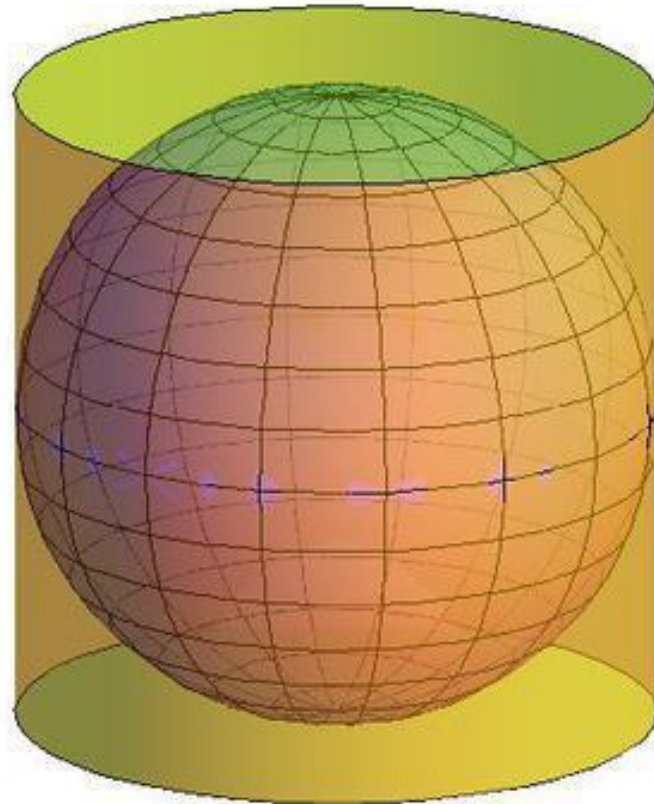
1. Если на сфере лежат все вершины многогранника, то она называется...
  - а) описанной около многогранника;
  - б) вписанной в многогранник;
  - в) касательной к многограннику.
2. Если каждая грань многогранника является касательной плоскостью к сфере, то такой многогранник называется...
  - а) вписанным в сферу;
  - б) описанным около сферы;
  - в) касательным к сфере.
3. Шар можно описать около...
  - а) любой призмы;
  - б) любой правильной пирамиды;
  - в) наклонной призмы.
4. В прямую призму вписана сфера, около призмы еще описана сфера, центры этих сфер...
  - а) лежат на разных диагоналях призмы;
  - б) принадлежат высоте призмы и не совпадают;
  - в) совпадают.
5. Около любого цилиндра можно описать сферу. Основания цилиндра являются...
  - а) касательными плоскостями к сфере;
  - б) большим кругом сферы;
  - в) сечениями сферы.

*Ответы:*

	1	2	3	4	5
Вариант I	б	а	б	а	в
Вариант II	а	б	б	в	в

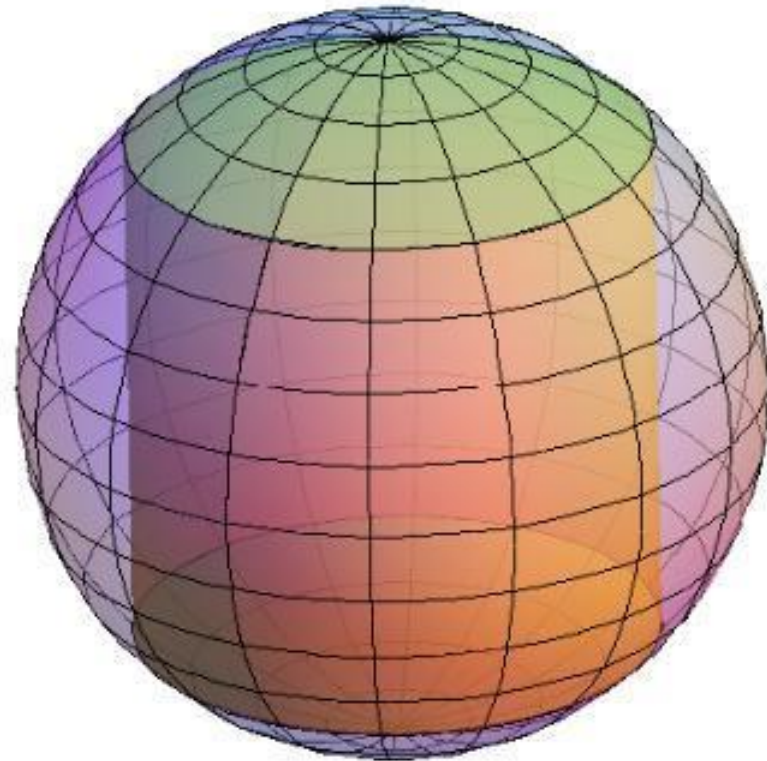
## Сфера, вписанная в цилиндр

Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом цилиндр называется описанным около сферы.



# Сфера, описанная около цилиндра

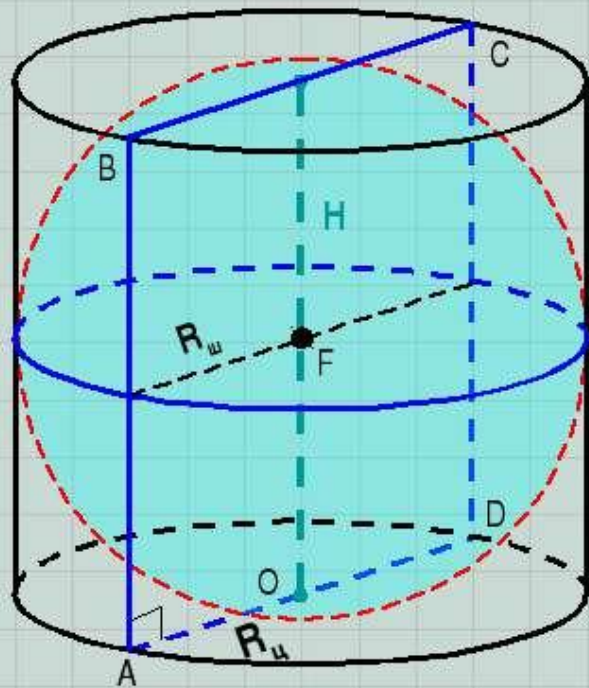
Цилиндр называется вписанным в сферу, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. При этом сфера называется описанной около цилиндра.



- Во всякий цилиндр можно вписать сферу, если его осевое сечение квадрат.
- Около любого цилиндра можно описать сферу. Основания цилиндра являются сечениями сферы.

Шар (сфера), вписанные в цилиндр.

Центр – середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.

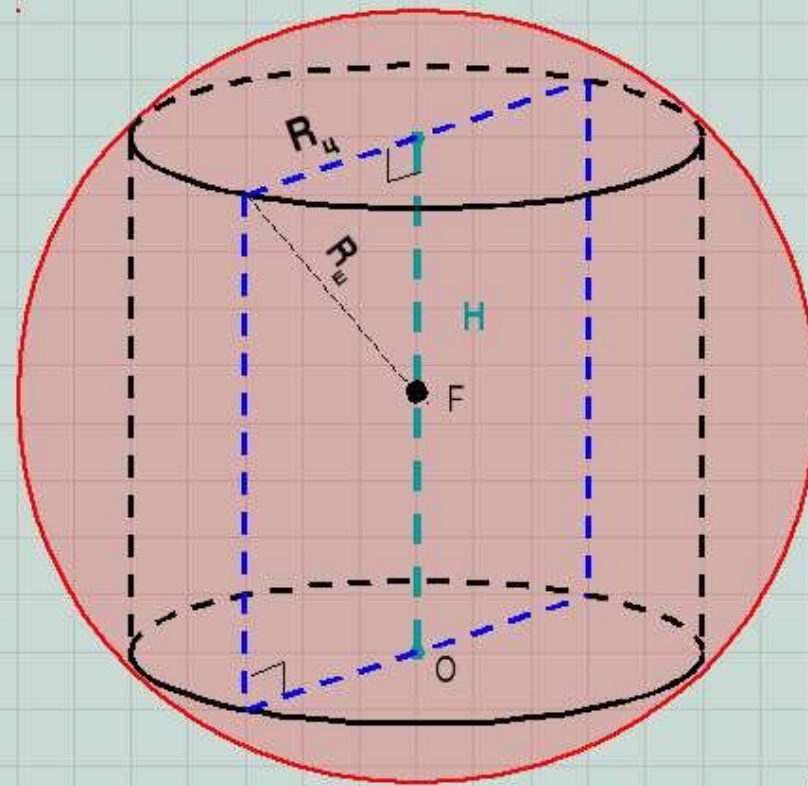


Осевое сечение ABCD – квадрат.  
Цилиндр – *равносторонний*.

$$R_r = R_o = \frac{H}{2}$$

Шар (сфера), описанные около цилиндра.

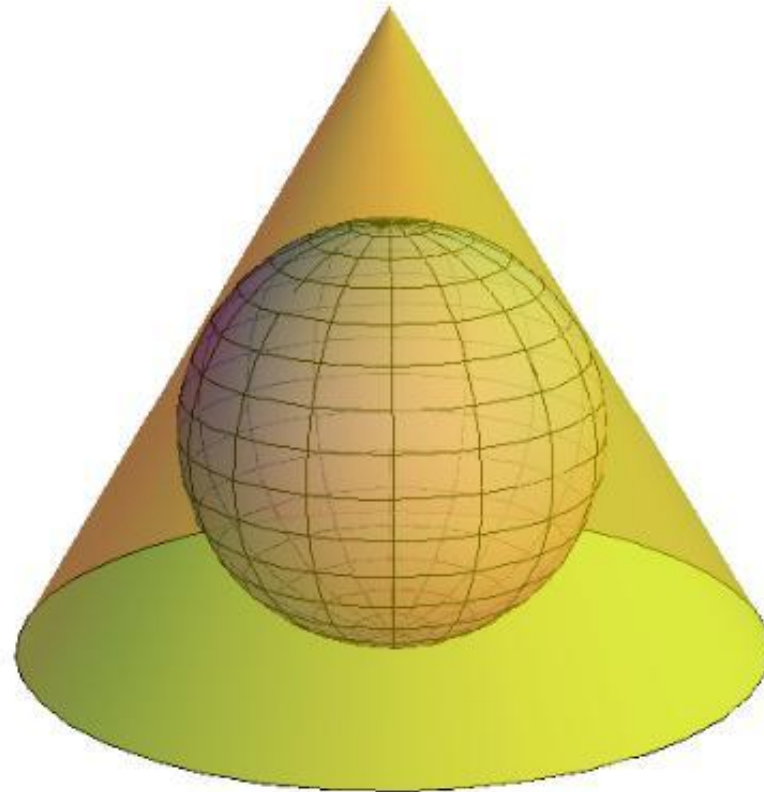
Центр – середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.



$$\frac{H^2}{4} + R_o^2 = R_r^2$$

## Сфера, вписанная в конус

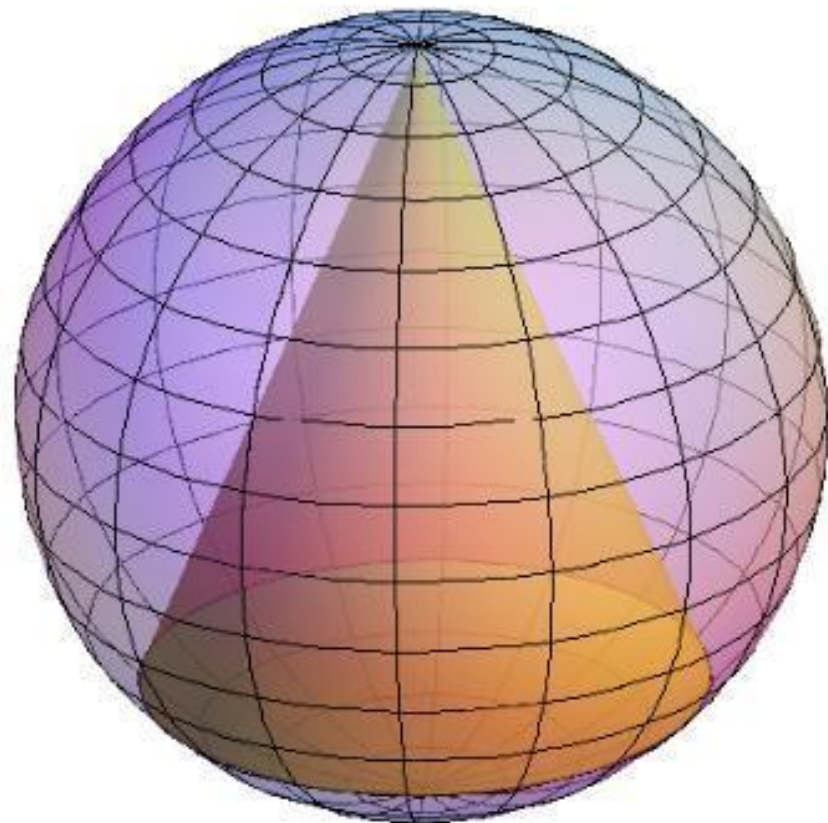
Сфера называется вписанной в конус, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом конус называется описанным около сферы.





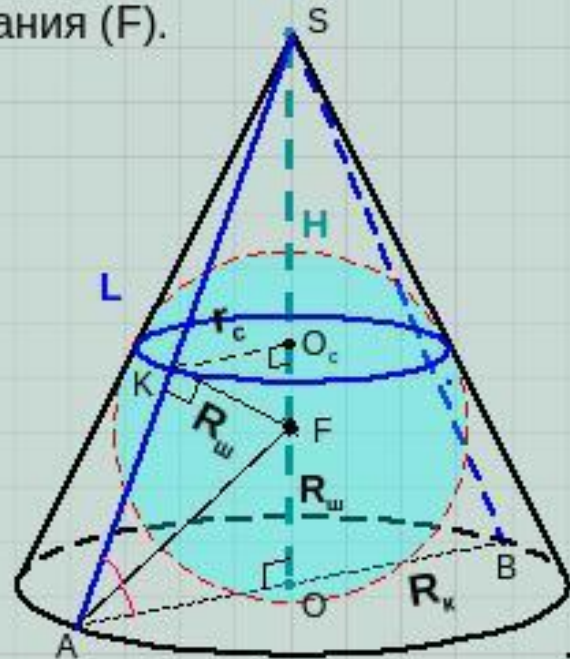
## Сфера, описанная около конуса

Сфера называется описанной около конуса, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере. При этом конус называется вписанным в сферу.



**Шар (сфера), вписанный в конус.**

Центр – точка пересечения высоты конуса и биссектрисы угла между образующей конуса и плоскостью основания (F).

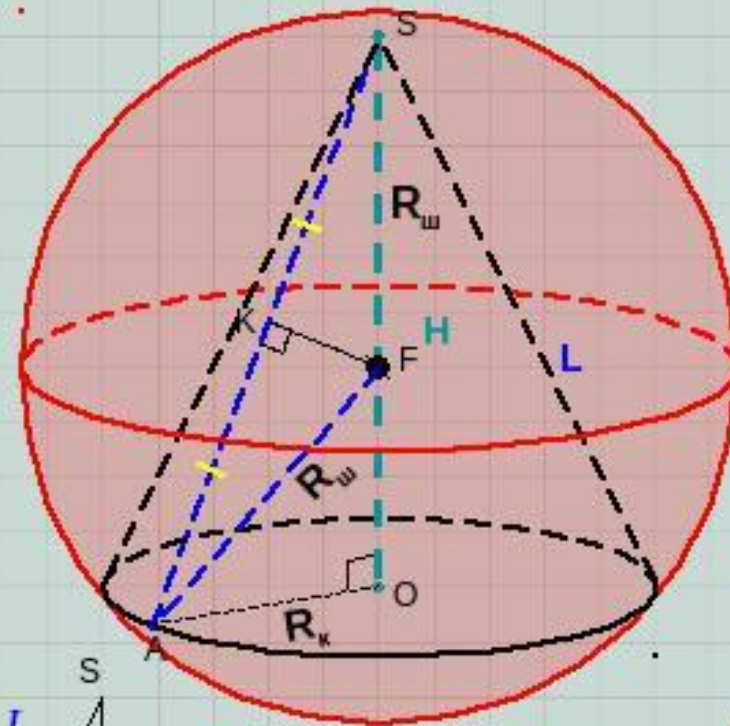


$$\triangle SKF : \triangle SOA$$

$$\frac{R_ш}{H - R_ш} = \frac{R_c}{L}$$

**Шар (сфера), описанный около конуса.**

Центр – точка пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра к образующей конуса (F).



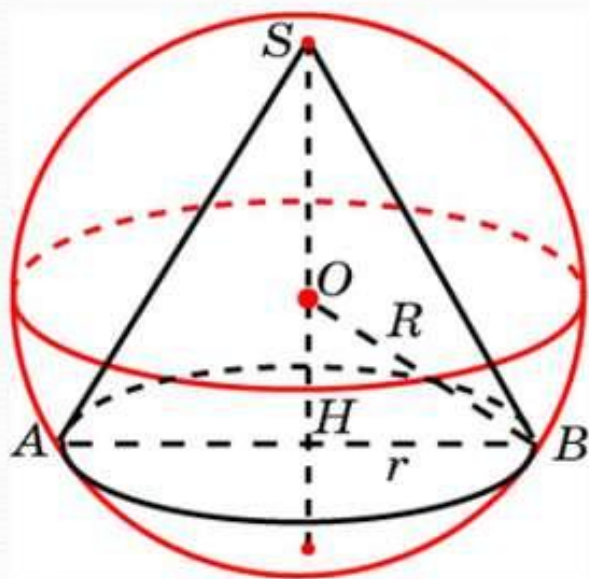
$$\triangle SKF : \triangle SOA$$

$$\frac{R_ш}{L} = \frac{L/2}{H} = \frac{KF}{R_x}$$



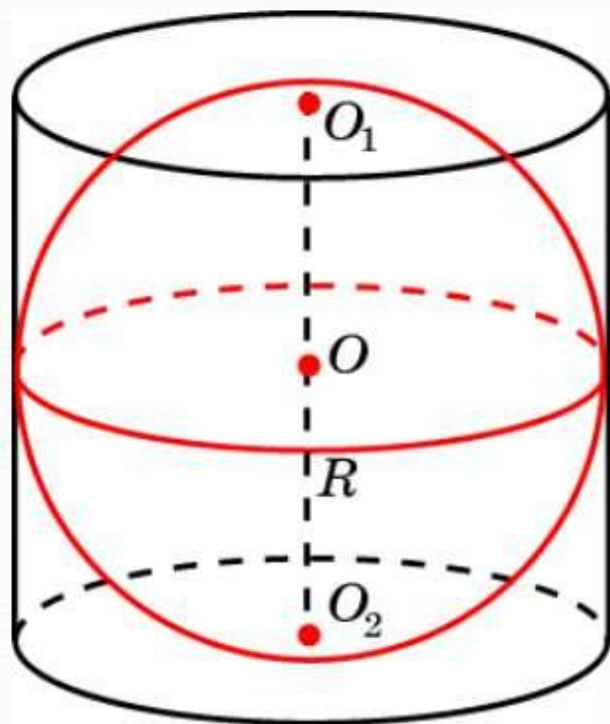
## Упражнение 2

Около конуса, радиус основания которого равен 4, описана сфера радиуса 5. Найдите высоту  $h$  конуса.



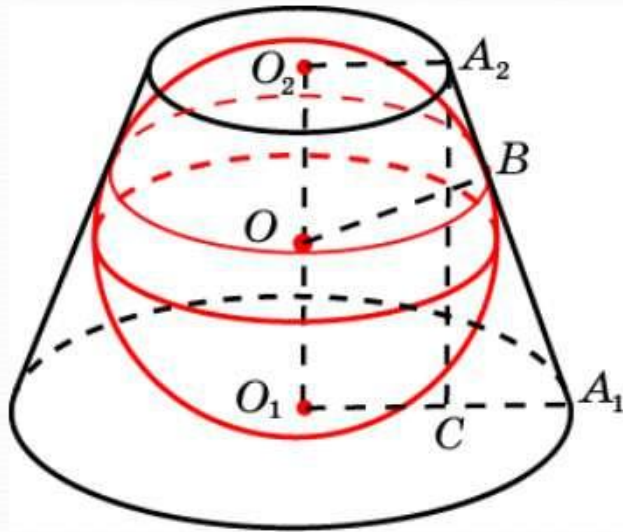
### Упражнение 3

Радиус основания цилиндра равен 2. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы в него можно было вписать сферу?



## Упражнение 1

В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 1, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту усеченного конуса.



**Решение.** Имеем:  $A_1B = A_1O_1 = 2$ ,  $A_2B = A_2O_2 = 1$ . Следовательно,  $A_1A_2 = 3$ ,  $A_1C = 1$ .

$$O_1O_2 = A_2C = \sqrt{A_1A_2^2 - A_1C^2} = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$r = \sqrt{2}, h = 2\sqrt{2}.$$