

Решение задач на многогранники, цилиндр, конус, шар

Учитель математики
Токарева Инна Александровна
МБОУ гимназия №1
Г. Липецк

а) Дано: цилиндр, $AB_1 = 16$ см, $\angle B_1AB = 30^\circ$
(рис. 1).

Найти: h ; $R_{\text{осн}}$.

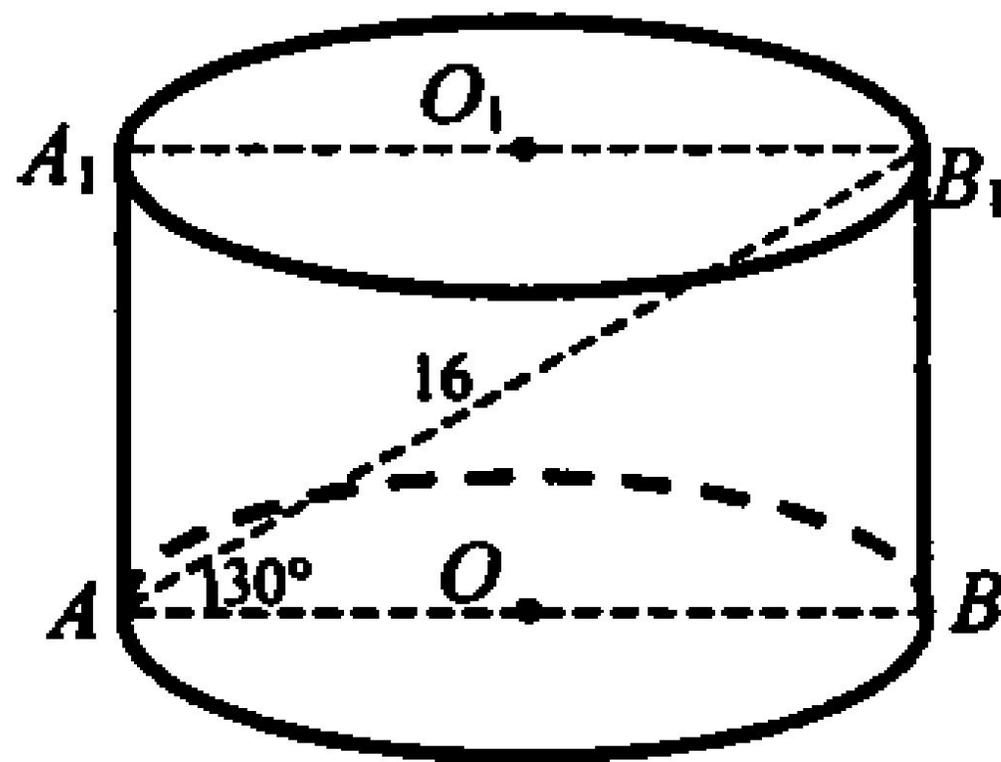


Рис. 1

б) Дано: цилиндр, $ABDC$ - квадрат; $AD = 12$ см
(рис. 2).

Найти: S_{ABDC} ; $S_{\text{б.п.}}$.

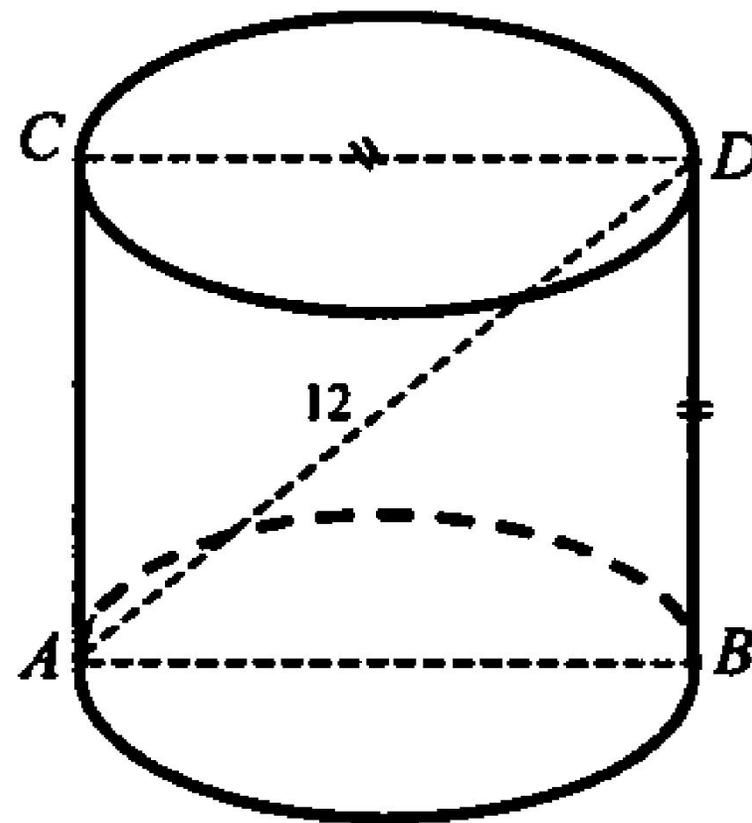


Рис. 2

в) Дано: конус, $\angle CSB = 120^\circ$; $SB = 12$ см (рис. 3).
Найти: h_k ; $R_{\text{осн.}}$.

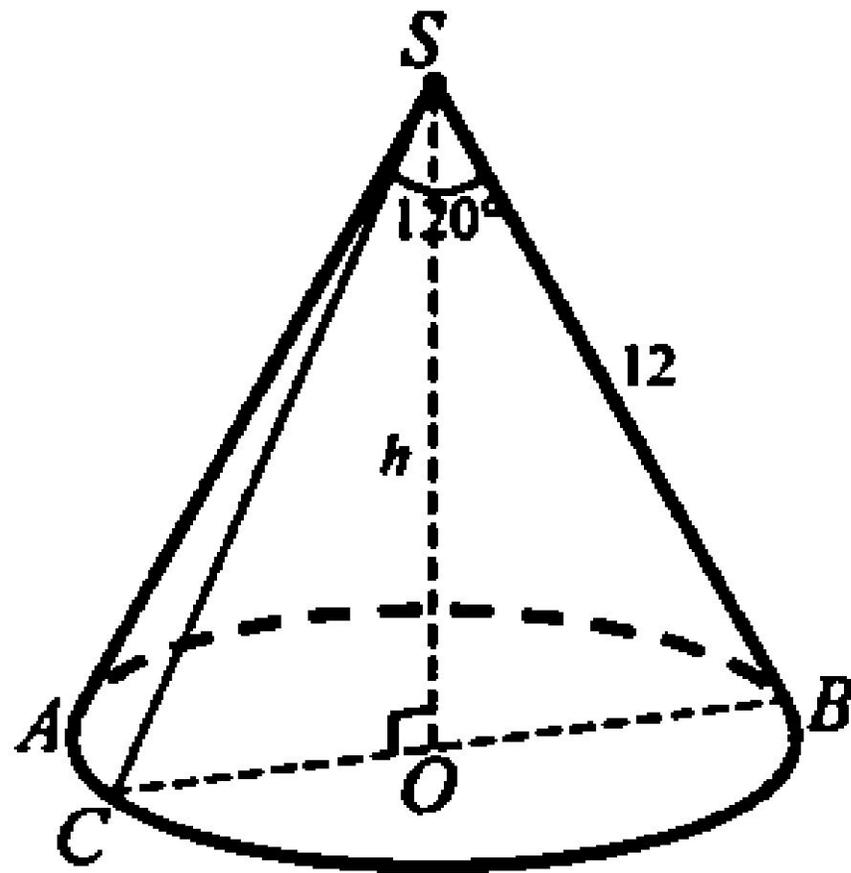


Рис. 3

г) Дано: конус, $SO = 16$ см; $SO_1 = 4$ см; $R_{\text{осн.}} =$
 $= OB = 20$ см (рис. 4).

Найти: $S_{\text{сеч.}}$

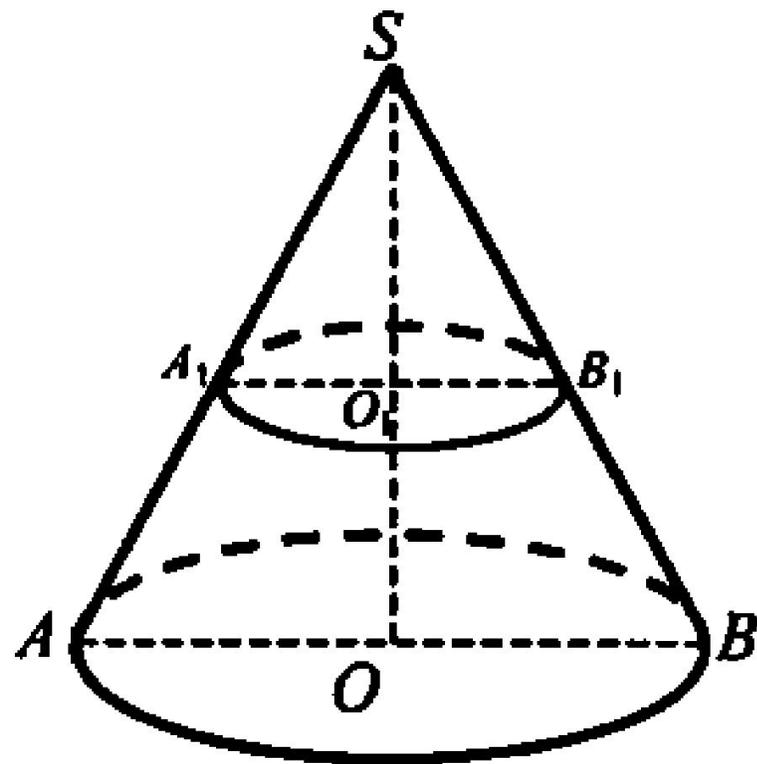


Рис. 4

д) Дано: шар, R – радиус шара, $\angle OAO_1 = \alpha$
(рис. 5).

Найти: $S_{\text{сеч.}}$

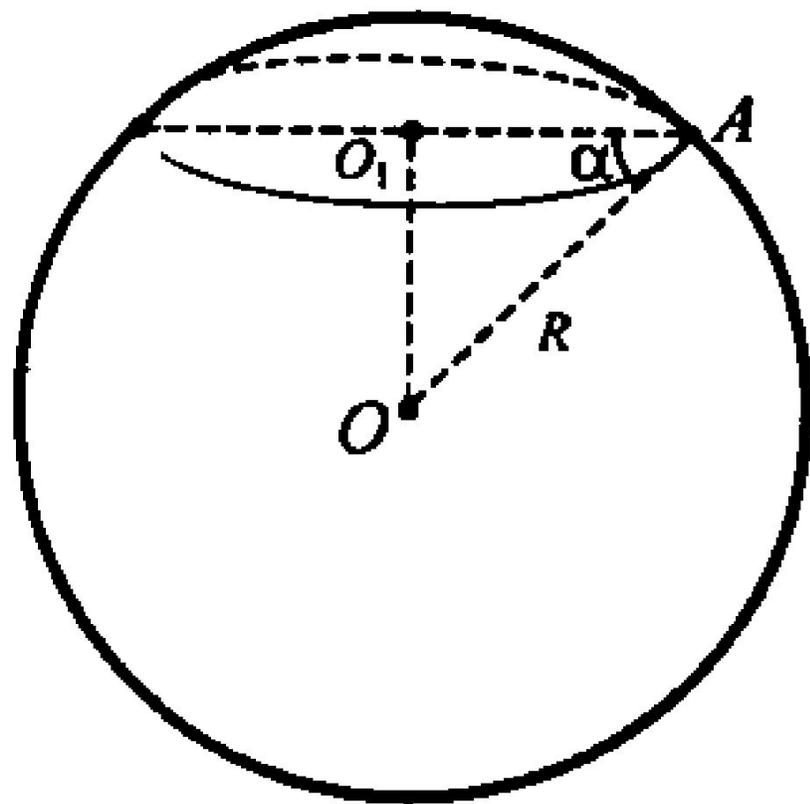


Рис. 5

е) *Дано:* шар; сечение шара плоскостью;
 $\triangle ABC$ вписан в сечение; $AB = BC = 40$ см;
 $AC = 48$ см; $OO_1 = 5$ см (рис. 6).

Найти: $R_{\text{шара}}$; $R = OD$.

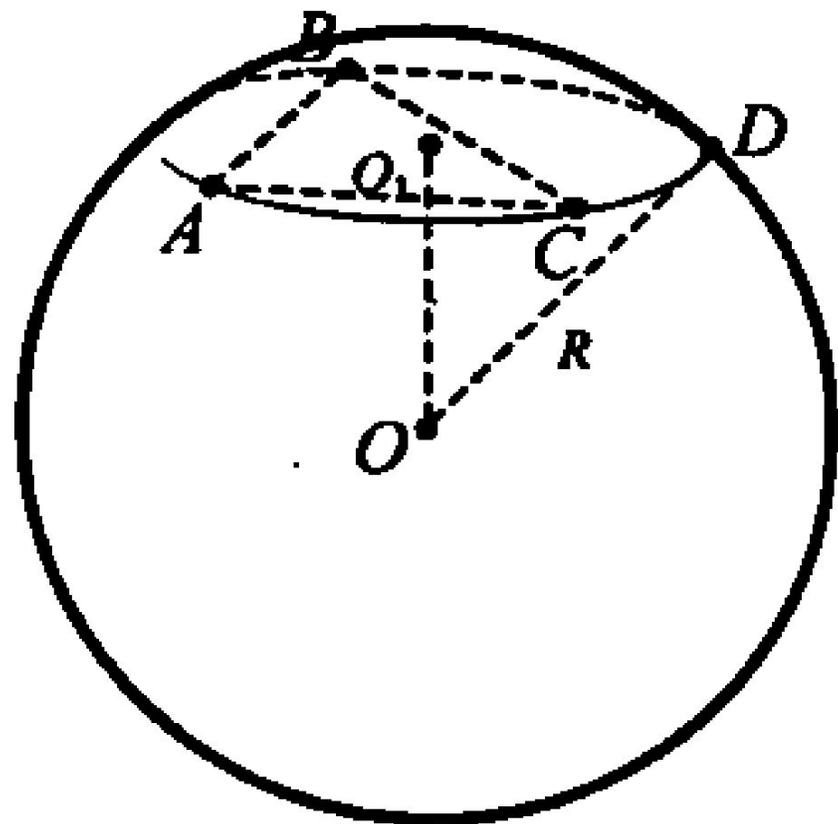


Рис. 6

Ответы к задачам:

а) $h = 8$ см; $R = 4\sqrt{3}$ см.

в) $h = 6$ см; $R_{\text{осн.}} = 6\sqrt{3}$ см.

д) $\pi R^2 \cos^2 \alpha$.

б) $S_{ABCD} = 72$ см²; $S_{\text{б.п.}} = 72\pi$ см².

г) $S_{\text{сеч.}} = 25\pi$ см².

е) $5\sqrt{26}$ см.

Тест

Вариант I

1. Если сфера касается всех граней многогранника, то она называется...
 - а) описанной около многогранника;
 - б) вписанной в многогранник;
 - в) касательной к многограннику.
2. Все вершины многогранника лежат на сфере, такой многогранник называется...
 - а) вписанным в сферу;
 - б) описанным около сферы;
 - в) касательным к сфере.
3. Шар можно вписать в...
 - а) произвольную призму;
 - б) треугольную пирамиду;
 - в) треугольную призму.
4. В прямую призму, в основание которой вписана окружность, можно вписать сферу, если...
 - а) высота призмы равна диаметру вписанной окружности;
 - б) центр сферы лежит на высоте призмы;
 - в) высота призмы равна радиусу вписанной окружности.
5. Во всякий цилиндр можно вписать сферу, если...
 - а) центр сферы лежит на оси цилиндра;
 - б) сфера касается оснований цилиндра;
 - в) его осевое сечение – квадрат.

Вариант II

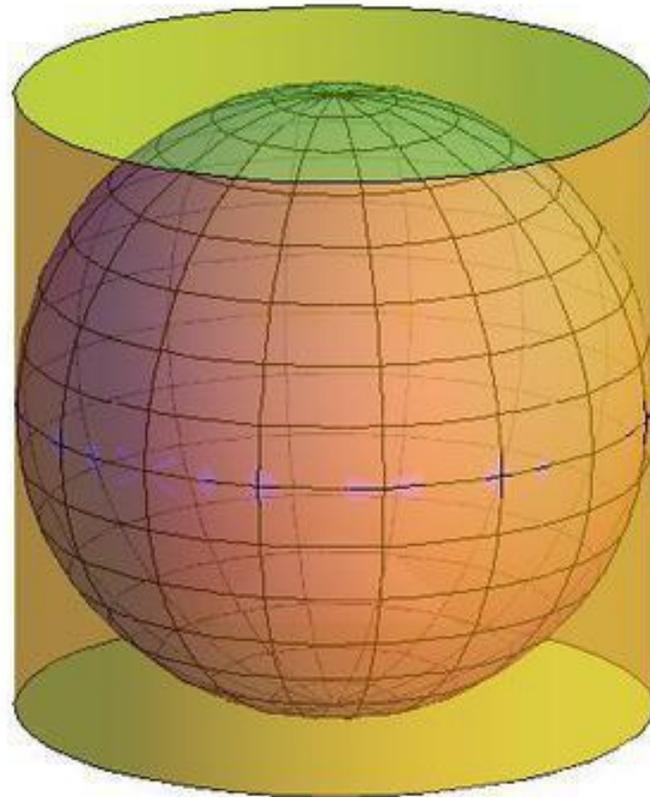
1. Если на сфере лежат все вершины многогранника, то она называется...
 - а) описанной около многогранника;
 - б) вписанной в многогранник;
 - в) касательной к многограннику.
2. Если каждая грань многогранника является касательной плоскостью к сфере, то такой многогранник называется...
 - а) вписанным в сферу;
 - б) описанным около сферы;
 - в) касательным к сфере.
3. Шар можно описать около...
 - а) любой призмы;
 - б) любой правильной пирамиды;
 - в) наклонной призмы.
4. В прямую призму вписана сфера, около призмы еще описана сфера, центры этих сфер...
 - а) лежат на разных диагоналях призмы;
 - б) принадлежат высоте призмы и не совпадают;
 - в) совпадают.
5. Около любого цилиндра можно описать сферу. Основания цилиндра являются...
 - а) касательными плоскостями к сфере;
 - б) большим кругом сферы;
 - в) сечениями сферы.

Ответы:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------|---|---|---|---|---|
| Вариант I | б | а | б | а | в |
| Вариант II | а | б | б | в | в |

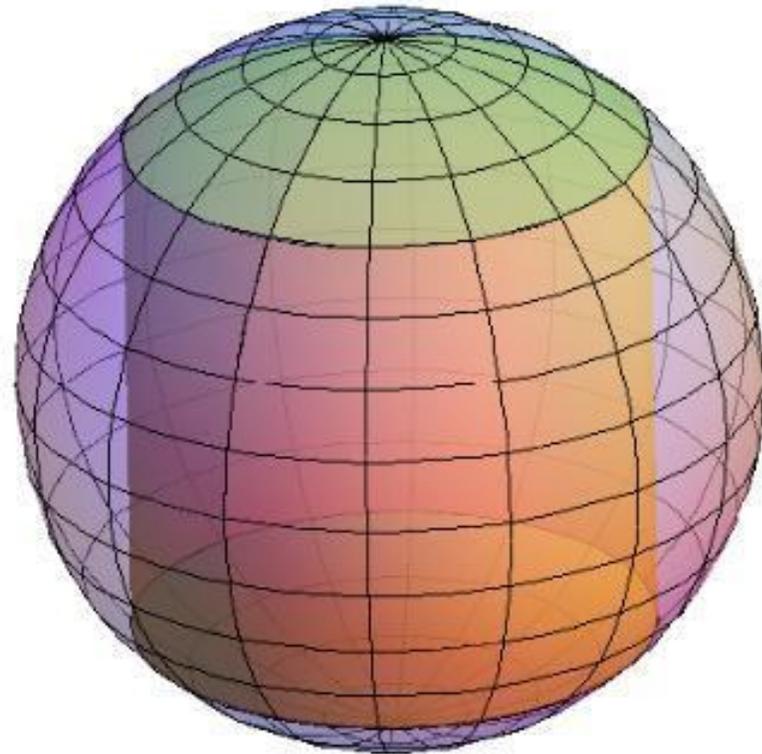
Сфера, вписанная в цилиндр

Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается его оснований и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом цилиндр называется описанным около сферы.



Сфера, описанная около цилиндра

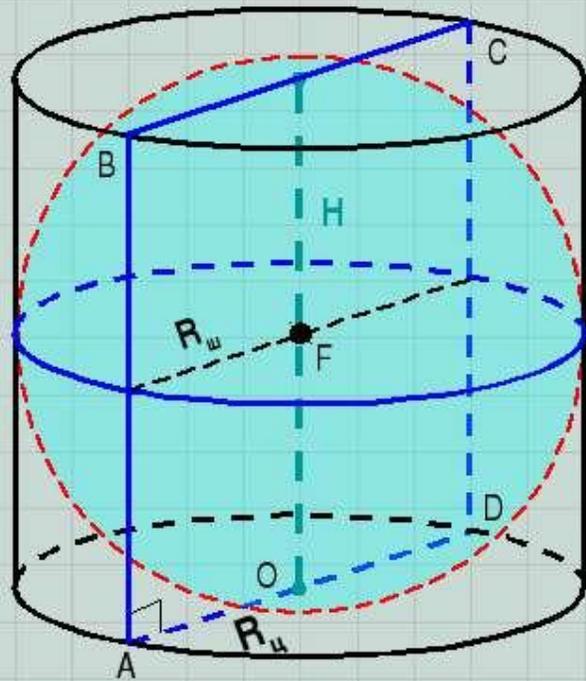
Цилиндр называется вписанным в сферу, если окружности оснований цилиндра лежат на сфере. При этом сфера называется описанной около цилиндра.



- Во всякий цилиндр можно вписать сферу, если его осевое сечение квадрат.
- Около любого цилиндра можно описать сферу. Основания цилиндра являются сечениями сферы.

Шар (сфера), вписанные в цилиндр.

Центр – середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.

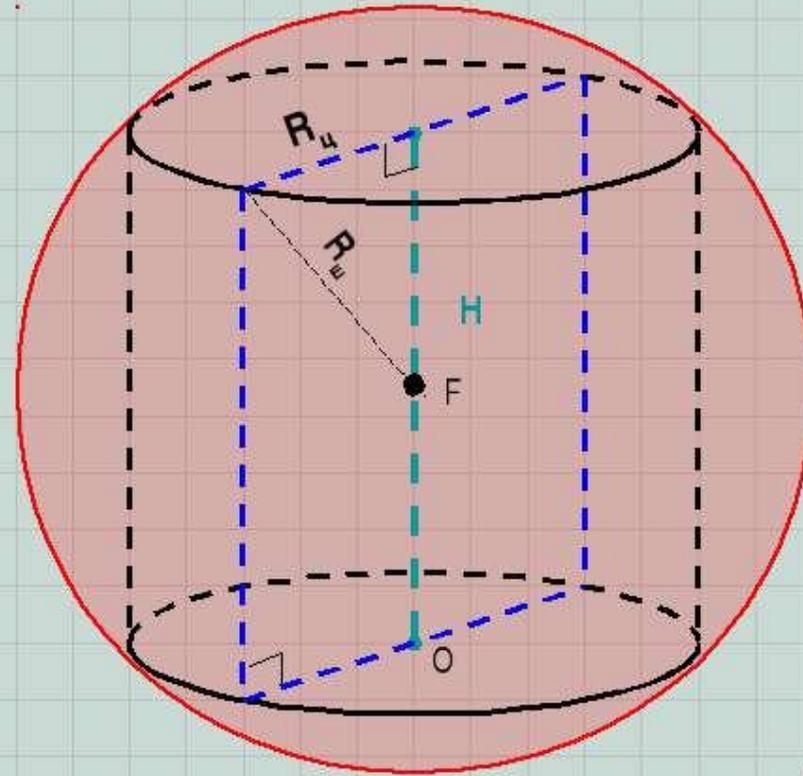


Осевое сечение ABCD – квадрат.
Цилиндр – *равносторонний*.

$$R_{\text{ш}} = R_{\text{ц}} = \frac{H}{2}$$

Шар (сфера), описанные около цилиндра.

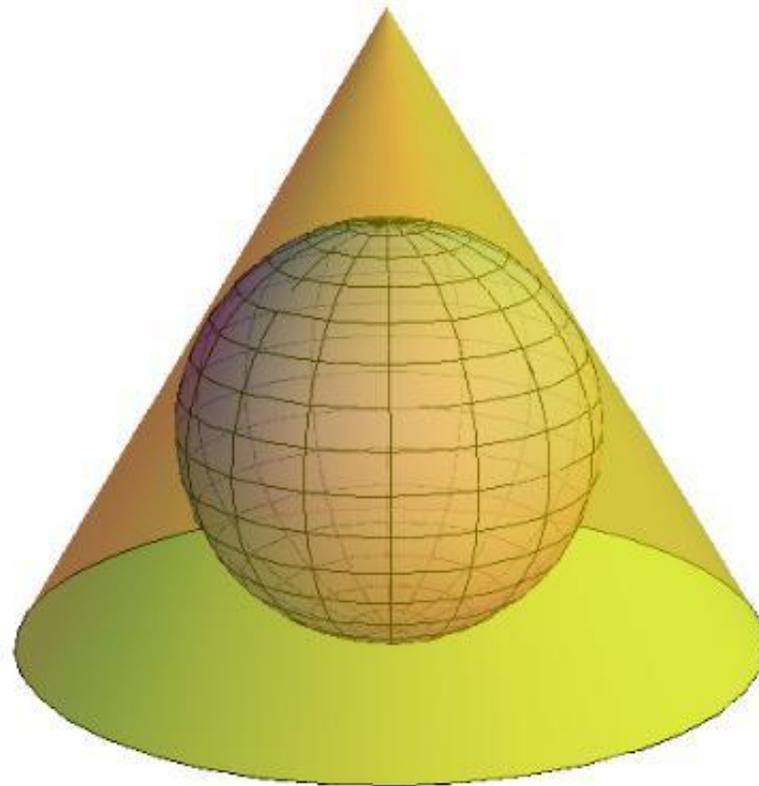
Центр – середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра.



$$\frac{H^2}{4} + R_{\text{ц}}^2 = R_{\text{ш}}^2$$

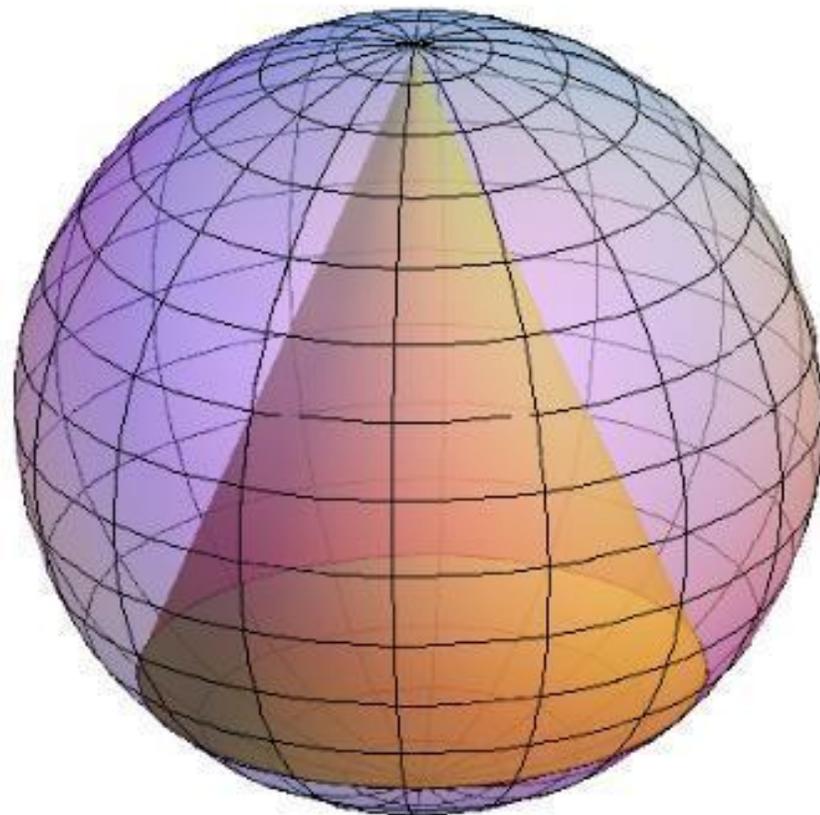
Сфера, вписанная в конус

Сфера называется вписанной в конус, если она касается его основания и боковой поверхности (касается каждой образующей). При этом конус называется описанным около сферы.



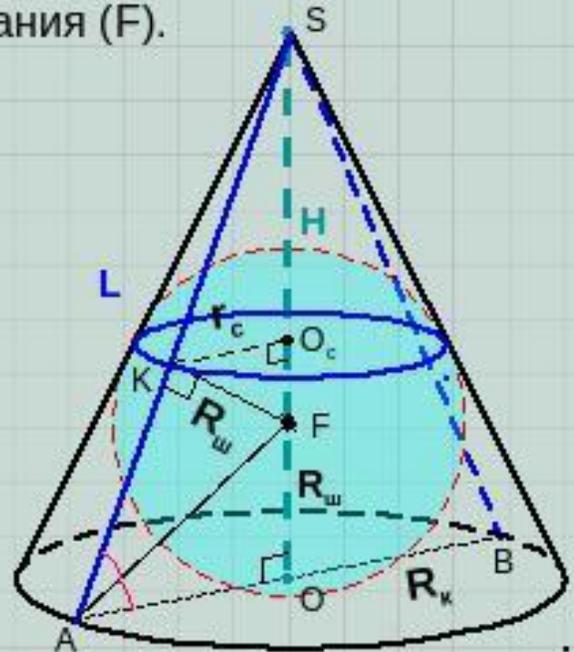
Сфера, описанная около конуса

Сфера называется описанной около конуса, если вершина и окружность основания конуса лежат на сфере. При этом конус называется вписанным в сферу.



Шар (сфера), вписанный в конус.

Центр – точка пересечения высоты конуса и биссектрисы угла между образующей конуса и плоскостью основания (F).

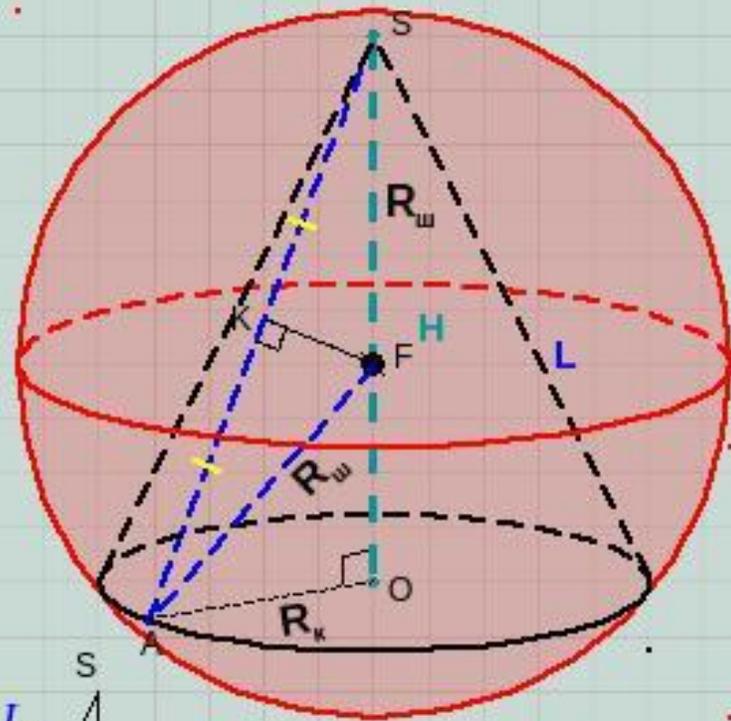


$$\triangle SKF : \triangle SOA$$

$$\frac{R_ш}{H - R_ш} = \frac{R_x}{L}$$

Шар (сфера), описанный около конуса.

Центр – точка пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра к образующей конуса (F).

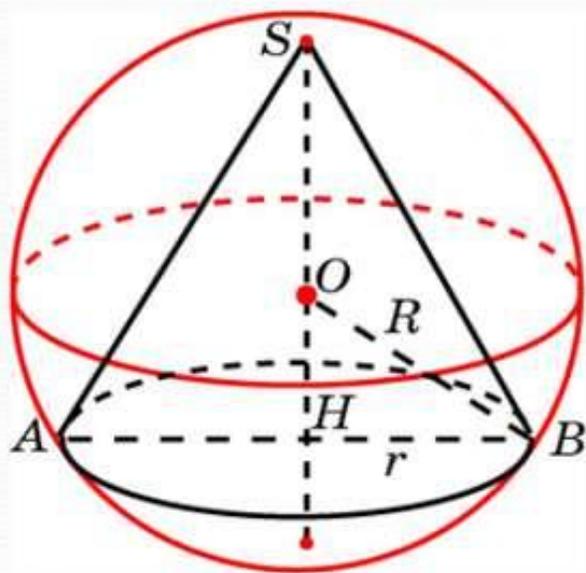


$$\triangle SKF : \triangle SOA$$

$$\frac{R_ш}{L} = \frac{L/2}{H} = \frac{KF}{R_x}$$

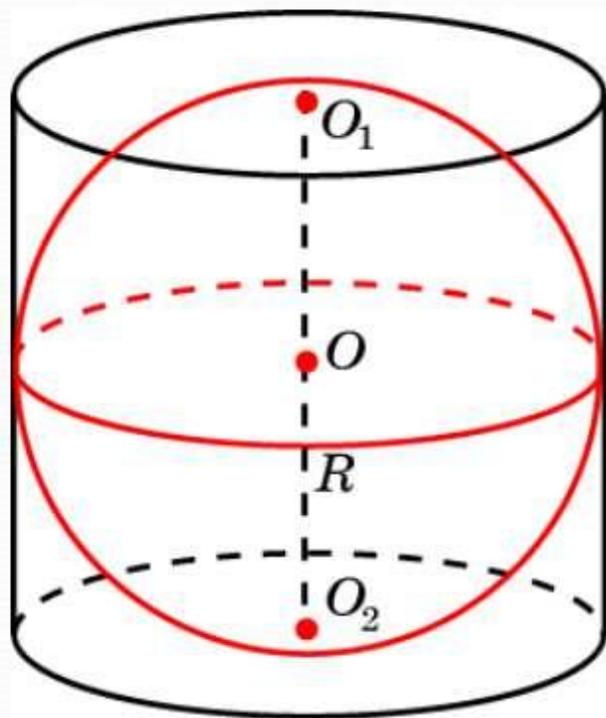
Упражнение 2

Около конуса, радиус основания которого равен 4, описана сфера радиуса 5. Найдите высоту h конуса.



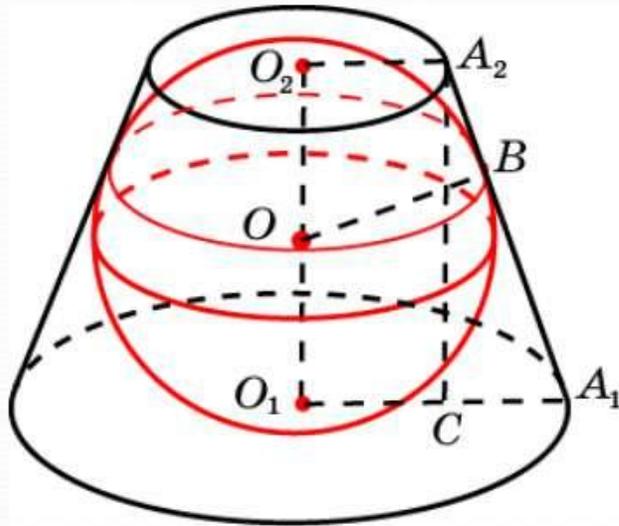
Упражнение 3

Радиус основания цилиндра равен 2. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы в него можно было вписать сферу?



Упражнение 1

В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 1, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту усеченного конуса.



Решение. Имеем: $A_1B = A_1O_1 = 2$, $A_2B = A_2O_2 = 1$. Следовательно, $A_1A_2 = 3$, $A_1C = 1$.

$$O_1O_2 = A_2C = \sqrt{A_1A_2^2 - A_1C^2} = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$r = \sqrt{2}, h = 2\sqrt{2}.$$