# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## Глава III
## Линейные пространства и линейные операторы

## Лекция № 5

**ИЯФиТ**

*доцент* ***Волков Н.П.***

## 6.3. Пересечение, сумма и прямая сумма линейных подпространств.

Пусть $\mathbf{V}$ есть линейное пространство над множеством $\mathrm{K}$, а $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ – линейные подпространства пространства $\mathbf{V}$.

**Определение 6.3.** *Пересечением линейных подпространств* $\mathbf{L}_1$ *и* $\mathbf{L}_2$ называется множество $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{x \in \mathbf{V}:\ x \in \mathbf{L}_1 \text{ и } x \in \mathbf{L}_2 \text{ одновременно}\}$.

**Определение 6.4.** *Суммой линейных подпространств* $\mathbf{L}_1$ *и* $\mathbf{L}_2$ называется множество $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \{x \in \mathbf{V}:\ \text{существуют } x_1 \in \mathbf{L}_1,\ x_2 \in \mathbf{L}_2 \text{ такие, что } x_1 + x_2 = x\}$.

**Теорема 6.5.** *Множества* а) $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ *и* б) $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ *являются линейными подпространствами линейного пространства* $\mathbf{V}$.

\# Покажем выполнение условий 1) и 2) определения 6.1.

а) : Для любых $x, y \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ в силу определения 6.3 следует, что $x, y \in \mathbf{L}_1$ и $x, y \in \mathbf{L}_2$ одновременно. Тогда 1): $x + y \in \mathbf{L}_1$ и $x + y \in \mathbf{L}_2$ одновременно. Итак, $x + y \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$.

2): $\forall\ \lambda \in \mathrm{K}$ при всех $x \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ следует, что $\lambda \cdot x \in \mathbf{L}_1$ и $\lambda \cdot x \in \mathbf{L}_2$ одновременно. Тогда по определению 6.3 получаем $\lambda \cdot x \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$. Следовательно, $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ есть линейное подпространство.

б) : Для любых $x, y \in L_1 + L_2$ существуют $x_1, y_1 \in L_1$ и $x_2, y_2 \in L_2$ такие, что $x_1 + x_2 = x$ и $y_1 + y_2 = y$. Тогда 1): $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, где $(x_1 + y_1) \in L_1$ и $(x_2 + y_2) \in L_2$. Итак, $x + y \in L_1 + L_2$.

2): $\forall\ \lambda \in K$ при всех $x \in L_1 + L_2$ существуют $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$ такие, что $x_1 + x_2 = x$.

Тогда $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$, где $\lambda x_1 \in L_1$ и $\lambda x_2 \in L_2$. Итак, $\lambda \cdot x \in L_1 + L_2$.

Следовательно, $L_1 + L_2$ является линейным подпространством. #

**Определение 6.5.** Говорят, что *линейное пространство* $\mathbf{V}$ *есть прямая сумма линейных подпространств* $L_1$ *и* $L_2$, если для любого $x \in \mathbf{V}$ существует единственная пара $x_1, x_2$ ($x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$) такая, что $x = x_1 + x_2$. Пишут: $\mathbf{V} = L_1 \oplus L_2$.

**Лемма 6.1.** *Для любых линейных подпространств* $L_1$ *и* $L_2$ *прямая сумма* $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$ *тогда и только тогда, когда* $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

\# Доказательство проведем методом от противного.

Необходимость. Предположим, что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$, но существует ненулевой $x \in L_1 \cap L_2$, тогда существует и противоположный элемент $x' = -x \in L_1 \cap L_2$ такой, что $x + x' = \theta$, где $x \in L_1$ и $x' \in L_2$ или $x' \in L_1$ и $x \in L_2$. А это означает, что нет единственности представления нулевого элемента $\theta$ – противоречие прямой суммы.

Достаточность. Пусть $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{\theta\}$, но $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \neq \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$, т.е. существуют ненулевые $x_1 \in \mathbf{L}_1$ и $x_2 \in \mathbf{L}_2$ такие, что $x_1 + x_2 = \theta$. Отсюда $x_2 = x_1'$, т.е. $x_1 \in \mathbf{L}_2$, а также $x_2 \in \mathbf{L}_1$. Это означает, что в подпространстве $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ содержится ненулевой элемент, что противоречит предположению, что $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{\theta\}$. #

**Теорема 6.6.** *Линейное пространство* $\mathbf{V} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

I) $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{L}_1 + \dim \mathbf{L}_2$,

II) $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{\theta\}$.

\# Необходимость. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$.

I): а) Предположим, что $[f] = \{f_1, \cdots, f_k\}$ – базис линейного подпространства $\mathbf{L}_1$, а $[g] = \{g_1, \cdots, g_m\}$ – базис линейного подпространства $\mathbf{L}_2$, тогда в силу теоремы 5.4 $\dim \mathbf{L}_1 = k$, а $\dim \mathbf{L}_2 = m$.

Возьмем числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \mu_1, \cdots, \mu_m \in \mathrm{K}$ и составим линейную комбинацию вида: $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_m g_m = \theta$ **(*)**, тогда в силу единственности разложения элементов из $\mathbf{V}$ (см. определение 6.5) $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k = \theta$ и $\mu_1 g_1 + \cdots + \mu_m g_m = \theta$. Но системы $\{f_1, \cdots, f_k\}$ и $\{g_1, \cdots, g_m\}$ являются линейно независимыми в своих подпространствах (как базисы), следовательно, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$, а из равенства **(*)** следует, что объединенная система $[e] = \{f_1, \cdots, f_k, g_1, \cdots, g_m\}$ является линейно независимой в $\mathbf{V}$.

б) Далее, в силу определения 6.5 для любого $x \in \mathbf{V}$ существуют $x_1 \in \mathbf{L}_1$, $x_2 \in \mathbf{L}_2$ такие, что $x = x_1 + x_2$, но $x_1 = \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^k f_k$, а $x_2 = \beta^1 g_1 + \cdots + \beta^m g_m$, тогда получим разложение $x = \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^k f_k + \beta^1 g_1 + \cdots + \beta^m g_m$.

В силу выводов из а) и б) получаем, что $[e] = \{f_1, \cdots, f_k, g_1, \cdots, g_m\}$ является базисом линейного пространства $\mathbf{V}$ (см. определение 5.4).
Тогда по теореме 5.4 $\dim \mathbf{V} = k + m = \dim \mathbf{L}_1 + \dim \mathbf{L}_2$.

II): Пусть $x \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, но $x$ есть элемент из $\mathbf{V}$, тогда, с одной стороны, $x = x + \theta$, а, с другой, $x = \theta + x$, где элементы $x, \theta \in \mathbf{L}_1$ и $x, \theta \in \mathbf{L}_2$ одновременно. Тогда в силу единственности разложения элементов из $\mathbf{V}$, получим $x = \theta$, т.е. $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{\theta\}$.

Достаточность. Существование. Пусть $[f] = \{f_1, \cdots, f_k\}$ – базис линейного подпространства $\mathbf{L}_1$, а $[g] = \{g_1, \cdots, g_m\}$ – базис линейного подпространства $\mathbf{L}_2$.

Возьмем числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \mu_1, \cdots, \mu_m \in \mathrm{K}$ и составим линейную комбинацию вида:
$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k + \mu_1 g_1 + \cdots + \mu_m g_m = \theta$ $(*)$, откуда $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k = -\mu_1 g_1 - \cdots - \mu_m g_m$,
где $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k \in \mathbf{L}_1$, а $-\mu_1 g_1 - \cdots - \mu_m g_m \in \mathbf{L}_2$. Из условия $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{\theta\}$ следует, что $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k = \theta$ и $\mu_1 g_1 + \cdots + \mu_m g_m = \theta$, а поскольку системы $\{f_1, \cdots, f_k\}$ и $\{g_1, \cdots, g_m\}$ являются линейно независимыми в своих подпространствах (как базисы), то $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$. Тогда из равенства $(*)$ следует, что система $[e] = \{f_1, \cdots, f_k, g_1, \cdots, g_m\}$ является линейно независимой, при этом в силу условия II) $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{L}_1 + \dim \mathbf{L}_2 = k + m$. Следовательно, в силу теоремы 5.4 система $\{f_1, \cdots, f_k, g_1, \cdots, g_m\} = [e]$ является базисом пространства $\mathbf{V}$. Тогда для любого $x \in \mathbf{V}$ существуют числа $\alpha^1, \cdots, \alpha^k, \beta^1, \cdots, \beta^m \in \mathrm{K}$ такие, что $x = \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^k f_k + \beta^1 g_1 + \cdots$ $\cdots + \beta^m g_m = x_1 + x_2$, где $x_1 = \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^k f_k \in \mathbf{L}_1$, $x_2 = \beta^1 g_1 + \cdots + \beta^m g_m \in \mathbf{L}_2$.

Итак, для любого $x \in \mathbf{V}$ существуют $x_1 \in \mathbf{L}_1$ и $x_2 \in \mathbf{L}_2$ такие, что $x = x_1 + x_2$.

Единственность докажем от противного. Пусть в $\mathbf{V}$ существует элемент $\tilde{x}$, который имеет два разложения, т.е. существуют $x_1, \tilde{x}_1 \in \mathbf{L}_1$ и $x_2, \tilde{x}_2 \in \mathbf{L}_2$ такие, что $\tilde{x} = x_1 + x_2$ и $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$. Тогда $\theta = \tilde{x} - \tilde{x} = (x_1 + x_2) - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = (x_1 - \tilde{x}_1) + (x_2 - \tilde{x}_2)$, откуда получаем $x_1 - \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 - x_2$, где $x_1 - \tilde{x}_1 \in \mathbf{L}_1$, а $\tilde{x}_2 - x_2 \in \mathbf{L}_2$, но $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{\theta\}$. Это означает, что $\tilde{x}_1 = x_1$ и $\tilde{x}_2 = x_2$. Итак, мы показали, что, если выполнено условие II), то для любого элемента из $\mathbf{V}$ не может быть различных разложений.

Следовательно, выполнены все условия определения 6.5, т.е. $\mathbf{V} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$. #

**Следствие 6.1.** *Пусть линейное пространство* $\mathbf{V} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$, $[f]$ *– базис линейного подпространства* $\mathbf{L}_1$, *а* $[g]$ *– базис линейного подпространства* $\mathbf{L}_2$.
*Тогда объединение этих базисов есть базис пространства* $\mathbf{V}$, т.е. $[e] = [f] \cup [g]$ *– базис линейного пространства* $\mathbf{V}$.

Доказательство следует из доказательства теоремы 6.6.

**Следствие 6.2.** *Пусть* $\mathbf{L}_1$ *– произвольное линейное подпространство линейного пространства* $\mathbf{V}$, *тогда существует линейное подпространство* $\mathbf{L}_2 \subset \mathbf{V}$ *такое, что* $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 = \mathbf{V}$.

# Пусть $\dim \mathbf{L}_1 = k \le n = \dim \mathbf{V}$.

1) Если $k = n$, то возьмем $\mathbf{L}_2 = \{\theta\}$. Тогда $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 = \mathbf{V}$.

2) Пусть теперь $k < n$, тогда возьмем в $\mathbf{L}_1$ базис $[f] = \{f_1, \cdots, f_k\}$. По теореме 6.4 существуют элементы $g_1, \cdots, g_{n-k} \in \mathbf{V}$ такие, что $[e] = \{f_1, \cdots, f_k, g_1, \cdots, g_{n-k}\}$ будет базисом в $\mathbf{V}$. Возьмем $\mathbf{L}_2 = L(g_1, \cdots, g_{n-k})$, где $L(g_1, \cdots, g_{n-k})$ – линейная оболочка, порожденная элементами $g_1, \cdots, g_{n-k}$.

Итак, $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{\theta\}$, и $\dim \mathbf{L}_1 + \dim \mathbf{L}_2 = k + (n-k) = n = \dim \mathbf{V}$. Тогда по теореме 6.6 следует, что $\mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2 = \mathbf{V}$. #

**Следствие 6.3.** *Пусть* $\mathbf{L}_1$ *и* $\mathbf{L}_2$ *– произвольные линейные подпространства линейного пространства* $\mathbf{V}$ *, тогда справедлива следующая формула:*

$$\dim(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)=\dim\mathbf{L}_1+\dim\mathbf{L}_2-\dim(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2). \qquad (14)$$

# 1) Пусть $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2=\{\theta\}$ , тогда в силу теоремы 6.5, а затем и теоремы 6.6 получаем

$\dim(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)=\dim(\mathbf{L}_1\oplus\mathbf{L}_2)=\dim\mathbf{L}_1+\dim\mathbf{L}_2-0=\dim\mathbf{L}_1+\dim\mathbf{L}_2-\dim(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2)$.

2) Пусть $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2\neq\{\theta\}$ , тогда в силу следствия 6.2 для линейного подпространства $\mathbf{L}_1$ существует линейное подпространство $\mathbf{L}_1'$ такое, что $\mathbf{L}_1=\mathbf{L}_1'\oplus(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2)$, по теореме 6.6 $\dim\mathbf{L}_1=\dim\mathbf{L}_1'+\dim(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2)$, при этом $\mathbf{L}_1'\cap\mathbf{L}_2=\{\theta\}$ , тогда $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2=\mathbf{L}_1'+\mathbf{L}_2=\mathbf{L}_1'\oplus\mathbf{L}_2$ .

Следовательно, в силу теоремы 6.6

$$\dim(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2)=\dim\mathbf{L}_1'+\dim\mathbf{L}_2=\dim\mathbf{L}_1-\dim(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2)+\dim\mathbf{L}_2 . \qquad \#$$

**Пример 6.2.** Найти размерности суммы и пересечения линейных оболочек $\mathbf{L}_1=L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ и $\mathbf{L}_2=L(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, где $\vec{a}_1=(1,2,1,3)$, $\vec{a}_2=(-1,8,-6,5)$, $\vec{a}_3=(0,10,-5,8)$ и $\vec{b}_1=(1,4,-1,5)$ , $\vec{b}_2=(3,-2,6,3)$ , $\vec{b}_3=(4,2,5,8)$ из пространства $\mathrm{R}^4$ .

Р е ш е н и е . Составим матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\-1&8&-6&5\\0&10&-5&8\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&4&-1&5\\3&-2&6&3\\4&2&5&8\end{pmatrix}$ и

преобразуем их к трапецевидным матрицам:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\mathbf{Rg\ A} = 2$, т.е. базисом в $\mathbf{L}_1$ может быть система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, и $\mathbf{dim L}_1 = 2$.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\mathbf{Rg\ B} = 2$, т.е. базисом в $\mathbf{L}_2$ может быть система $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, и $\mathbf{dim L}_2 = 2$.

Найдем размерность суммы $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$, составив матрицу из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -8 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\mathbf{Rg\ C} = 3$, а базисом подпространства $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ может быть система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\}$.

Следовательно, $\mathbf{dim}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2) = 3$, а из формулы (14) $\mathbf{dim}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2) = 4 - 3 = 1$.

## § 7. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах

### 7.1. Основные понятия, свойства и примеры линейных операторов.

Пусть $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ – линейные пространства над множеством $\mathrm{K}$.

**Определение 7.1.** Говорят, что *задан оператор* $\mathcal{A}$, *отображающий пространство* $\mathbf{V}$ *в пространство* $\mathbf{W}$ (записывают $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$), если существует закон (правило), по которому любому элементу $x \in \mathbf{V}$ ставится в соответствие единственный элемент $\boldsymbol{y} \in \mathbf{W}$, будем писать $\mathcal{A}x = \boldsymbol{y}$ или $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(x)$. При этом элемент $\boldsymbol{y}$ называется *образом элемента* $\boldsymbol{x}$, а $x$ – *прообразом* $\boldsymbol{y}$.

**Определение 7.2.** Оператор $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ называется *линейным*, если:

1) для любых элементов $x_1, x_2 \in \mathbf{V}$ выполняется $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2)$;

2) для любого элемента $x \in \mathbf{V}$ и любого числа $\lambda \in \mathrm{K}$ выполняется $\mathcal{A}(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x)$.

**Определение 7.3.** Линейный оператор $\mathcal{A}$, отображающий пространство $\mathbf{V}$ в $\mathbf{V}$ (в себя), т.е. $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ называется *линейным преобразованием линейного пространства* $\mathbf{V}$.

**Определение 7.4.** Пусть линейные операторы $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ и $\mathcal{B}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$.
Эти операторы называются *равными*, если для любого элемента $x \in \mathbf{V}$ имеет место равенство $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$.

**Лемма 7.1.** *Пусть линейный оператор* $\mathcal{A}$ *отображает линейное пространство* $\mathbf{V}$ *в линейное пространство* $\mathbf{W}$, *т.е.* $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$. *Тогда нулевому элементу пространства* $\mathbf{V}$ *ставится в соответствие нулевой элемент пространства* $\mathbf{W}$, *т.е.* $\mathcal{A}(\theta_{\mathbf{V}}) = \theta_{\mathbf{W}}$.

\# В силу свойства $3^o$ теоремы 4.1 для любого элемента $x \in \mathbf{V}$ $0 \cdot x = \theta_{\mathbf{V}}$, а для любого элемента $y \in \mathbf{W}$ $0 \cdot y = \theta_{\mathbf{W}}$.

Тогда $\mathcal{A}(\theta_{\mathbf{V}}) = \mathcal{A}(0 \cdot x) = 0 \cdot \mathcal{A}(x) = 0 \cdot y = \theta_{\mathbf{W}}$. #

**Лемма 7.2.** *Пусть линейный оператор* $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, *и* $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ *– линейно зависимая система в* $\mathbf{V}$. *Тогда система* $\{y_j = \mathcal{A}(x_j)\}_{j=1}^{m}$ *является линейно зависимой системой.*

\# Пусть $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ – линейно зависимая система в $\mathbf{V}$, т.е.существуют числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathrm{K}$ такие, что $\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| \neq 0$, а линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \theta$.

Применим к этому равенству оператор $\mathcal{A}$ и получим $\mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m) = \mathcal{A}(\theta_{\mathbf{V}})$, а тогда в силу линейности этого оператора, получим $\lambda_1 (\mathcal{A}(x_1)) + \cdots + \lambda_m (\mathcal{A}(x_m)) = \theta_{\mathbf{W}}$.

Следовательно, система $\{\mathcal{A}(x_j)\}_{j=1}^{m}$ является линейно зависимой в $\mathbf{V}$. #

**Примеры 7.1.**

I) $\boldsymbol{I}$ – тождественный оператор на пространстве $\mathbf{V}$ такой, что для любого элемента $x \in \mathbf{V}$ получаем $\boldsymbol{I}(x) = x$, т.е. $\boldsymbol{I}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

II) $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ – нулевой оператор на пространстве $\mathbf{V}$ такой, что для любого элемента $x \in \mathbf{V}$ получаем $\mathcal{O}(x) = \theta$, т.е. $\mathcal{O}: \mathbf{V} \to \{\theta\}$.

III) $\boldsymbol{\Phi}$ – оператор поворота вокруг начала координат на угол $\varphi$ в пространстве $\mathrm{R}^2$ такой, что для любого элемента $x \in \mathrm{R}^2$ получаем $\boldsymbol{\Phi}(x) = y \in \mathrm{R}^2$, т.е. $\boldsymbol{\Phi}: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, иначе говоря, это есть преобразование плоскости.

IV) $\mathcal{D}$ – оператор оператор дифференцирования, т.е. $\mathcal{D} \equiv \dfrac{d}{dt}$, при этом $\mathcal{D}: \mathrm{P}_m \to \mathrm{P}_{m-1}$.

## 7.2. Матрица линейного оператора в заданном базисе.

Пусть $\mathbf{V}$ – линейное пространство над множеством $\mathrm{K}$, $[e] = \{e_1, \cdots, e_n\}$ – базис этого пространства, линейный оператор $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Подействуем оператором $\mathcal{A}$ на базисные элементы и разложим их образы по этому базису, т.е.

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_1) = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + \cdots + a_1^n e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{A}(e_n) = a_n^1 e_1 + a_n^2 e_2 + \cdots + a_n^n e_n \end{cases} . \qquad (15)$$

**Определение 7.5.** Матрица $A_{[e]} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ называется *матрицей оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* $[e]$.

**Замечание 7.1.** Запись вида (15) эквивалентна записи в векторной форме:
$(\mathcal{A}(e_1),\cdots,\mathcal{A}(e_n)) = (e_1,\cdots,e_n)\cdot A_{[e]}$ или поэлементно $\mathcal{A}(e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_k^j e_j \ \ \forall\ k = \overline{1,n}$,

а также в матричной форме: $\begin{pmatrix} \mathcal{A}(e_1) \\ \cdots \\ \mathcal{A}(e_n) \end{pmatrix} = A_{[e]}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} e_1 \\ \cdots \\ e_n \end{pmatrix}$. Эти записи будут использоваться в дальнейшем.

**Примеры 7.2.**

I) Для оператора $\mathcal{A} = I$ матрицей в некотором базисе $[e]$ будет единичная матрица

$$A_{[e]} = E_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

II) Для оператора $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ матрицей в некотором базисе $[e]$ будет нулевая матрица

$$A_{[e]} = O_{[e]} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

III) Для оператора $\mathcal{A}=\Phi$ матрицей в базисе $[e]=\{\vec{i},\vec{j}\}$ пространства $\mathrm{R}^2$ будет матрица:

$\mathbf{A}_{[e]}=\mathbf{\Phi}_{[e]}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$, поскольку преобразование поворота на угол $\varphi$ имеет вид:

$$\begin{cases}\Phi(\vec{i})=\vec{i}\cdot\cos\varphi+\vec{j}\cdot\sin\varphi, \\ \Phi(\vec{j})=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cdot\cos\varphi\end{cases}.$$

IV) Для оператора $\mathcal{A}=\mathcal{D}$ матрицей в базисе $[e]=\{1,t,t^2,\cdots,t^m\}$ пространства $\mathrm{P}_m$ будет

матрица: $\mathbf{A}_{[e]}=\mathbf{D}_{[e]}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$, т.к. $\begin{cases}\mathcal{D}(1)=0\cdot1+0\cdot t+\cdots+0\cdot t^m, \\ \mathcal{D}(t)=1\cdot1+0\cdot t+\cdots+0\cdot t^m, \\ \mathcal{D}(t^2)=0\cdot1+2\cdot t+\cdots+0\cdot t^m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{D}(t^m)=0\cdot1+0\cdot t+\cdots+m\cdot t^{m-1}+0\cdot t^m\end{cases}$.

**Теорема 7.1.** I. *Для любого линейного оператора* $\mathcal{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ *в произвольном базисе* $[e]$ *линейного пространства* $\mathbf{V}$ *существует единственная матрица* $\mathbf{A}_{[e]}$ *такая, что* $[e]\cdot\mathbf{A}_{[e]}=(\mathcal{A}(e_1),\cdots,\mathcal{A}(e_n))$.

II. *Для любой матрицы* $\mathbf{B}\in\mathrm{M}_{n\times n}$ *существует единственный линейный оператор* $\mathcal{A}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ *такой, что в произвольном базисе* $[e]$ *линейного пространства* $\mathbf{V}$ *матрица этого оператора имеет вид:* $\mathbf{A}_{[e]}=\mathbf{B}$.