

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава III

Линейные пространства и линейные операторы

Лекция № 5

ИЯФит

доцент Волков Н.П.

6.3. Пересечение, сумма и прямая сумма линейных подпространств.

Пусть V есть линейное пространство над множеством K , а L_1, L_2 – линейные подпространства пространства V .

Определение 6.3. Пересечением линейных подпространств L_1 и L_2 называется множество $L_1 \cap L_2 = \{x \in V : x \in L_1 \text{ и } x \in L_2 \text{ одновременно}\}$.

Определение 6.4. Суммой линейных подпространств L_1 и L_2 называется множество $L_1 + L_2 = \{x \in V : \text{существуют } x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 \text{ такие, что } x_1 + x_2 = x\}$.

Теорема 6.5. Множества а) $L_1 \cap L_2$ и б) $L_1 + L_2$ являются линейными подпространствами линейного пространства V .

Покажем выполнение условий 1) и 2) определения 6.1.

а): Для любых $x, y \in L_1 \cap L_2$, в силу определения 6.3 следует, что $x, y \in L_1$ и $x, y \in L_2$ одновременно. Тогда 1): $x + y \in L_1$ и $x + y \in L_2$ одновременно. Итак, $x + y \in L_1 \cap L_2$.

2): $\forall \lambda \in K$ при всех $x \in L_1 \cap L_2$ следует, что $\lambda \cdot x \in L_1$ и $\lambda \cdot x \in L_2$ одновременно. Тогда по определению 6.3 получаем $\lambda \cdot x \in L_1 \cap L_2$. Следовательно, $L_1 \cap L_2$ есть линейное подпространство.

б) : Для любых $x, y \in L_1 + L_2$ существуют $x_1, y_1 \in L_1$ и $x_2, y_2 \in L_2$ такие, что $x_1 + x_2 = x$ и $y_1 + y_2 = y$. Тогда 1): $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, где $(x_1 + y_1) \in L_1$ и $(x_2 + y_2) \in L_2$. Итак, $x + y \in L_1 + L_2$.

2): $\forall \lambda \in K$ при всех $x \in L_1 + L_2$ существуют $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$ такие, что $x_1 + x_2 = x$.

Тогда $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$, где $\lambda x_1 \in L_1$ и $\lambda x_2 \in L_2$. Итак, $\lambda \cdot x \in L_1 + L_2$.

Следовательно, $L_1 + L_2$ является линейным подпространством. #

Определение 6.5. Говорят, что линейное пространство V есть прямая сумма линейных подпространств L_1 и L_2 , если для любого $x \in V$ существует единственная пара x_1, x_2 ($x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$) такая, что $x = x_1 + x_2$. Пишут: $V = L_1 \oplus L_2$.

Лемма 6.1. Для любых линейных подпространств L_1 и L_2 прямая сумма $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$ тогда и только тогда, когда $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Доказательство проведем методом от противного.

Необходимость. Предположим, что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$, но существует ненулевой $x \in L_1 \cap L_2$, тогда существует и противоположный элемент $x' = -x \in L_1 \cap L_2$ такой, что $x + x' = \theta$, где $x \in L_1$ и $x' \in L_2$ или $x' \in L_1$ и $x \in L_2$. А это означает, что нет единственности представления нулевого элемента θ – противоречие прямой суммы.

Достаточность. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, но $L_1 + L_2 \neq L_1 \oplus L_2$, т.е. существуют ненулевые $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$ такие, что $x_1 + x_2 = \theta$. Отсюда $x_2 = -x_1$, т.е. $x_1 \in L_2$, а также $x_2 \in L_1$. Это означает, что в подпространстве $L_1 \cap L_2$ содержится ненулевой элемент, что противоречит предположению, что $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. #

Теорема 6.6. *Линейное пространство $V = L_1 \oplus L_2$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- I) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$,
- II) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Необходимость. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$.

I): а) Предположим, что $[f] = \{f_1, \dots, f_k\}$ – базис линейного подпространства L_1 , а $[g] = \{g_1, \dots, g_m\}$ – базис линейного подпространства L_2 , тогда в силу теоремы 5.4 $\dim L_1 = k$, а $\dim L_2 = m$.

Возьмем числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m \in K$ и составим линейную комбинацию вида:
 $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m = \theta$ (*), тогда в силу единственности разложения элементов из V (см. определение 6.5) $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = \theta$ и $\mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m = \theta$.
 Но системы $\{f_1, \dots, f_k\}$ и $\{g_1, \dots, g_m\}$ являются линейно независимыми в своих подпространствах (как базисы), следовательно, $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, а из равенства (*) следует, что объединенная система $[e] = \{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m\}$ является линейно независимой в V .

б) Далее, в силу определения 6.5 для любого $x \in V$ существуют $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ такие, что $x = x_1 + x_2$, но $x_1 = \alpha^1 f_1 + \dots + \alpha^k f_k$, а $x_2 = \beta^1 g_1 + \dots + \beta^m g_m$, тогда получим разложение $x = \alpha^1 f_1 + \dots + \alpha^k f_k + \beta^1 g_1 + \dots + \beta^m g_m$.

В силу выводов из а) и б) получаем, что $[e] = \{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m\}$ является базисом линейного пространства V (см. определение 5.4).

Тогда по теореме 5.4 $\dim V = k + m = \dim L_1 + \dim L_2$.

II): Пусть $x \in L_1 \cap L_2$, но x есть элемент из V , тогда, с одной стороны, $x = x + \theta$, а, с другой, $x = \theta + x$, где элементы $x, \theta \in L_1$ и $x, \theta \in L_2$ одновременно. Тогда в силу единственности разложения элементов из V , получим $x = \theta$, т.е. $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Достаточность. Существование. Пусть $[f] = \{f_1, \dots, f_k\}$ — базис линейного подпространства L_1 , а $[g] = \{g_1, \dots, g_m\}$ — базис линейного подпространства L_2 .

Возьмем числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m \in K$ и составим линейную комбинацию вида:

$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m = \theta$ (*), откуда $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = -\mu_1 g_1 - \dots - \mu_m g_m$, где $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k \in L_1$, а $-\mu_1 g_1 - \dots - \mu_m g_m \in L_2$. Из условия $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ следует, что $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = \theta$ и $\mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m = \theta$, а поскольку системы $\{f_1, \dots, f_k\}$ и $\{g_1, \dots, g_m\}$ являются линейно независимыми в своих подпространствах (как базисы), то $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. Тогда из равенства (*) следует, что система $[e] = \{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m\}$ является линейно независимой, при этом в силу условия II)

$\dim V = \dim L_1 + \dim L_2 = k + m$. Следовательно, в силу теоремы 5.4 система

$\{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m\} = [e]$ является базисом пространства V . Тогда для любого $x \in V$ существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^k, \beta^1, \dots, \beta^m \in K$ такие, что $x = \alpha^1 f_1 + \dots + \alpha^k f_k + \beta^1 g_1 + \dots + \beta^m g_m = x_1 + x_2$, где $x_1 = \alpha^1 f_1 + \dots + \alpha^k f_k \in L_1$, $x_2 = \beta^1 g_1 + \dots + \beta^m g_m \in L_2$.

Итак, для любого $x \in V$ существуют $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$ такие, что $x = x_1 + x_2$.

Единственность докажем от противного. Пусть в V существует элемент \tilde{x} , который имеет два разложения, т.е. существуют $x_1, \tilde{x}_1 \in L_1$ и $x_2, \tilde{x}_2 \in L_2$ такие, что $\tilde{x} = x_1 + x_2$ и $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$. Тогда $\theta = \tilde{x} - \tilde{x} = (x_1 + x_2) - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = (x_1 - \tilde{x}_1) + (x_2 - \tilde{x}_2)$, откуда получаем $x_1 - \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 - x_2$, где $x_1 - \tilde{x}_1 \in L_1$, а $\tilde{x}_2 - x_2 \in L_2$, но $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Это означает, что $\tilde{x}_1 = x_1$ и $\tilde{x}_2 = x_2$. Итак, мы показали, что, если выполнено условие II), то для любого элемента из V не может быть различных разложений.

Следовательно, выполнены все условия определения 6.5, т.е. $V = L_1 \oplus L_2$. #

Следствие 6.1. Пусть линейное пространство $V = L_1 \oplus L_2$, $[f]$ – базис линейного подпространства L_1 , а $[g]$ – базис линейного подпространства L_2 .

Тогда объединение этих базисов есть базис пространства V , т.е. $[e] = [f] \cup [g]$ – базис линейного пространства V .

Доказательство следует из доказательства теоремы 6.6.

Следствие 6.2. Пусть L_1 – произвольное линейное подпространство линейного пространства V , тогда существует линейное подпространство $L_2 \subset V$ такое, что $L_1 \oplus L_2 = V$.

Пусть $\dim L_1 = k \leq n = \dim V$.

1) Если $k = n$, то возьмем $L_2 = \{\theta\}$. Тогда $L_1 \oplus L_2 = V$.

2) Пусть теперь $k < n$, тогда возьмем в L_1 базис $[f] = \{f_1, \dots, f_k\}$. По теореме 6.4 существуют элементы $g_1, \dots, g_{n-k} \in V$ такие, что $[e] = \{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_{n-k}\}$ будет базисом в V . Возьмем $L_2 = L(g_1, \dots, g_{n-k})$, где $L(g_1, \dots, g_{n-k})$ – линейная оболочка, порожденная элементами g_1, \dots, g_{n-k} .

Итак, $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, и $\dim L_1 + \dim L_2 = k + (n - k) = n = \dim V$. Тогда по теореме 6.6 следует, что $L_1 \oplus L_2 = V$. #

Следствие 6.3. Пусть L_1 и L_2 – произвольные линейные подпространства линейного пространства V , тогда справедлива следующая формула:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2). \quad (14)$$

1) Пусть $L_1 \cap L_2 = \{\emptyset\}$, тогда в силу теоремы 6.5, а затем и теоремы 6.6 получаем $\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - 0 = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$.

2) Пусть $L_1 \cap L_2 \neq \{\emptyset\}$, тогда в силу следствия 6.2 для линейного подпространства L_1 существует линейное подпространство L'_1 такое, что $L_1 = L'_1 \oplus (L_1 \cap L_2)$, по теореме 6.6 $\dim L_1 = \dim L'_1 + \dim(L_1 \cap L_2)$, при этом $L'_1 \cap L_2 = \{\emptyset\}$, тогда $L_1 + L_2 = L'_1 + L_2 = L'_1 \oplus L_2$.

Следовательно, в силу теоремы 6.6

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L'_1 + \dim L_2 = \dim L_1 - \dim(L_1 \cap L_2) + \dim L_2. \quad \#$$

Пример 6.2. Найти размерности суммы и пересечения линейных оболочек $L_1 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $L_2 = L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, где $\vec{a}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (-1, 8, -6, 5)$, $\vec{a}_3 = (0, 10, -5, 8)$ и $\vec{b}_1 = (1, 4, -1, 5)$, $\vec{b}_2 = (3, -2, 6, 3)$, $\vec{b}_3 = (4, 2, 5, 8)$ из пространства \mathbb{R}^4 .

Решение. Составим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ и

преобразуем их к трапецевидным матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\text{Rg } A = 2$, т.е. базисом в L_1 может быть система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, и $\dim L_1 = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\text{Rg } B = 2$, т.е. базисом в L_2 может быть система $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, и $\dim L_2 = 2$.

Найдем размерность суммы $L_1 + L_2$, составив матрицу из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -8 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\text{Rg } C = 3$, а базисом подпространства $L_1 + L_2$ может быть система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\}$.

Следовательно, $\dim(L_1 + L_2) = 3$, а из формулы (14) $\dim(L_1 \cap L_2) = 4 - 3 = 1$.

§ 7. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах

7.1. Основные понятия, свойства и примеры линейных операторов.

Пусть V и W – линейные пространства над множеством K .

Определение 7.1. Говорят, что задан оператор \mathcal{A} , отображающий пространство V в пространство W (записывают $\mathcal{A}: V \rightarrow W$), если существует закон (правило), по которому любому элементу $x \in V$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in W$, будем писать $\mathcal{A}x = y$ или $y = \mathcal{A}(x)$. При этом элемент y называется *образом* элемента x , а x – *прообразом* y .

Определение 7.2. Оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow W$ называется *линейным*, если:

- 1) для любых элементов $x_1, x_2 \in V$ выполняется $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2)$;
- 2) для любого элемента $x \in V$ и любого числа $\lambda \in K$ выполняется $\mathcal{A}(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x)$.

Определение 7.3. Линейный оператор \mathcal{A} , отображающий пространство V в V (в себя), т.е. $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется *линейным преобразованием линейного пространства V* .

Определение 7.4. Пусть линейные операторы $\mathcal{A}: V \rightarrow W$ и $\mathcal{B}: V \rightarrow W$.

Эти операторы называются *равными*, если для любого элемента $x \in V$ имеет место равенство $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$.

Лемма 7.1. Пусть линейный оператор \mathcal{A} отображает линейное пространство V в линейное пространство W , т.е. $\mathcal{A}: V \rightarrow W$. Тогда нулевому элементу пространства V ставится в соответствие нулевой элемент пространства W , т.е. $\mathcal{A}(\theta_V) = \theta_W$.

В силу свойства 3^о теоремы 4.1 для любого элемента $x \in V$ $\theta \cdot x = \theta_V$, а для любого элемента $y \in W$ $\theta \cdot y = \theta_W$.

Тогда $\mathcal{A}(\theta_V) = \mathcal{A}(\theta \cdot x) = \theta \cdot \mathcal{A}(x) = \theta \cdot y = \theta_W$. #

Лемма 7.2. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow W$, и $\{x_j\}_{j=1}^m$ — линейно зависящая система в V . Тогда система $\{y_j = \mathcal{A}(x_j)\}_{j=1}^m$ является линейно зависящей системой.

Пусть $\{x_j\}_{j=1}^m$ — линейно зависящая система в V , т.е. существуют числа

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ такие, что $\sum_{j=1}^m |\lambda_j| \neq 0$, а линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = \theta$.

Применим к этому равенству оператор \mathcal{A} и получим $\mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) = \mathcal{A}(\theta_V)$,

а тогда в силу линейности этого оператора, получим $\lambda_1 (\mathcal{A}(x_1)) + \dots + \lambda_m (\mathcal{A}(x_m)) = \theta_W$.

Следовательно, система $\{\mathcal{A}(x_j)\}_{j=1}^m$ является линейно зависящей в W . #

Примеры 7.1.

I) I – тождественный оператор на пространстве V такой, что для любого элемента $x \in V$ получаем $I(x) = x$, т.е. $I: V \rightarrow V$.

II) O – нулевой оператор на пространстве V такой, что для любого элемента $x \in V$ получаем $O(x) = \theta$, т.е. $O: V \rightarrow \{\theta\}$.

III) Φ – оператор поворота вокруг начала координат на угол φ в пространстве \mathbb{R}^2 такой, что для любого элемента $x \in \mathbb{R}^2$ получаем $\Phi(x) = y \in \mathbb{R}^2$, т.е. $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, иначе говоря, это есть преобразование плоскости.

IV) \mathcal{D} – оператор дифференцирования, т.е. $\mathcal{D} \equiv \frac{d}{dt}$, при этом $\mathcal{D}: P_m \rightarrow P_{m-1}$.

7.2. Матрица линейного оператора в заданном базисе.

Пусть V – линейное пространство над множеством K , $[e] = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис этого пространства, линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$. Подействуем оператором \mathcal{A} на базисные элементы и разложим их образы по этому базису, т.е.

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_1) = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + \dots + a_1^n e_n, \\ \dots \\ \mathcal{A}(e_n) = a_n^1 e_1 + a_n^2 e_2 + \dots + a_n^n e_n \end{cases} \quad (15)$$

Определение 7.5. Матрица $A_{[e]} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ называется *матрицей оператора \mathcal{A}*

в базисе $[e]$.

Замечание 7.1. Запись вида (15) эквивалентна записи в векторной форме:

$$(\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A_{[e]} \quad \text{или поэлементно} \quad \mathcal{A}(e_k) = \sum_{j=1}^n a_k^j e_j \quad \forall k = \overline{1, n},$$

а также в матричной форме: $\begin{pmatrix} \mathcal{A}(e_1) \\ \dots \\ \mathcal{A}(e_n) \end{pmatrix} = A_{[e]}^T \begin{pmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$. Эти записи будут использоваться в

дальнейшем.

Примеры 7.2.

I) Для оператора $\mathcal{A} = I$ матрицей в некотором базисе $[e]$ будет единичная матрица

$$A_{[e]} = E_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

II) Для оператора $\mathcal{A} = O$ матрицей в некотором базисе $[e]$ будет нулевая матрица

$$A_{[e]} = O_{[e]} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

III) Для оператора $\mathcal{A} = \Phi$ матрицей в базисе $[e] = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ пространства \mathbb{R}^2 будет матрица:

$A_{[e]} = \Phi_{[e]} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, поскольку преобразование поворота на угол φ имеет вид:

$$\begin{cases} \Phi(\bar{i}) = \bar{i} \cdot \cos \varphi + \bar{j} \cdot \sin \varphi, \\ \Phi(\bar{j}) = -\bar{i} \sin \varphi + \bar{j} \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

IV) Для оператора $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ матрицей в базисе $[e] = \{1, t, t^2, \dots, t^m\}$ пространства Γ_m будет

матрица: $A_{[e]} = D_{[e]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, т.к. $\begin{cases} \mathcal{D}(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot t^m, \\ \mathcal{D}(t) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot t^m, \\ \mathcal{D}(t^2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + \dots + 0 \cdot t^m, \\ \dots \\ \mathcal{D}(t^m) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dots + m \cdot t^{m-1} + 0 \cdot t^m \end{cases}$

Теорема 7.1. I. Для любого линейного оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ в произвольном базисе $[e]$ линейного пространства V существует единственная матрица $A_{[e]}$ такая, что $[e] \cdot A_{[e]} = (\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_n))$.

II. Для любой матрицы $B \in M_{n \times n}$ существует единственный линейный оператор $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ такой, что в произвольном базисе $[e]$ линейного пространства V матрица этого оператора имеет вид: $A_{[e]} = B$.

