

# Логические основы работы компьютера

# План изучения

1. Основные логические понятия.
2. Математическая логика.
3. Операции над высказываниями (логические операции).
4. Формы представления логических операций:  
логические функции, таблицы истинности, логические схемы.
5. Алгоритмы перевода представления логических операций из одной формы в другую
6. Алгебра логики и ее законы

# Логика – наука о правилах рассуждений.

Логической функцией (функцией алгебры логики) от набора логических переменных  $F(x_1, \dots, x_n)$  называется функция, которая может принимать только два значения: истина или ложь (1 или 0). Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записываются возможные наборы значений аргументов, а в правой - соответствующие им значения функции.

# Понятие о суждении

Познавая объективный мир, человек раскрывает связи между предметами и их признаками.

Эти связи и отношения отражаются в мышлении в форме СУЖДЕНИЙ.

**СУЖДЕНИЕ** – это мысль, в которой что-либо утверждается или отрицается о предмете.

Языковой формой выражения суждения является предложение (высказывание).

# Понятие о суждении

Не всякое предложение является суждением.

Не являются суждениями советы, просьбы, вопросительные и восклицательные предложения.

*Например: Закрой окно! Который час?*

**Суждение выражается повествовательным предложением.**

*Например: Я люблю информатику.*

*На улице хорошая погода. Иванов – двоечник.*

**СУЖДЕНИЕ – это повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл говорить истинно оно или ложно.**

# Математическая логика

**Основатель – Джордж Буль (1815-1864).**

Математическая логика двузначна (истина, ложь)

**Математическая логика изучает  
только суждения.**

Причем смысл высказывания не имеет значения,  
принимается во внимание  
только значение истинности.

# Математическая логика

Значение истинного высказывания = 1  
Значение ложного высказывания = 0

Для простоты высказывания обозначаются латинскими буквами A, B, C...

*У кошек четыре ноги. A=1*  
*У кошек нет хвоста. B=0*

**Высказывания бывают простые и сложные.**

**Простые** высказывания называются логическими переменными (A, B, C).

**Сложные** – логическими функциями ( $A \vee B \wedge C$ ).

# Алгебра логики

*Начальный раздел математической логики называют алгеброй логики, или булевой алгеброй.*

Использование 0 и 1 в качестве значений переменных в алгебре логики и цифр в двоичной системе счисления, позволяет описать работу логических схем ПК с помощью математического аппарата булевой алгебры.

# Операции над высказываниями

## Конъюнкция (логическое умножение)

-союз И

-обозначение  $\wedge$ ,  $\&$

-конъюнкция двух логических переменных истинна только тогда, когда истинны обе переменные.

ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ:



# Операции над высказываниями

## Дизъюнкция (логическое сложение)

-союз ИЛИ

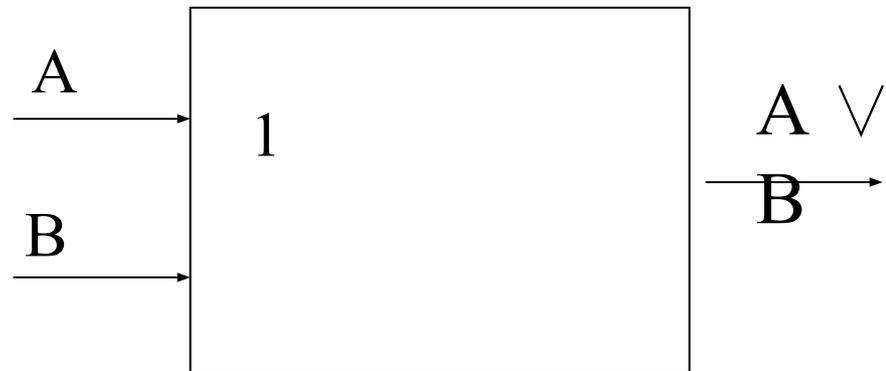
-обозначение  $\vee$

-дизъюнкция двух логических переменных истинна, если истинна хотя бы одна переменная.

ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ:



# Операции над высказываниями

## Отрицание (инверсия)

-союз НЕ

-обозначение  $\neg$ ,  $\bar{A}$

-инверсия логической переменной истинна, если сама переменная ложна.

ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ:



# Операции над высказываниями

*Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок и приоритета.*

ПРИОРИТЕТ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ:

Инверсия

Конъюнкция

Дизъюнкция

# Элементы алгебры логики

**Высказывания бывают простые и сложные.**

**Простые** высказывания называются  
логическими **переменными**  
и обозначаются латинскими буквами (A, B, C).

*У всех кошек четыре ноги.  $A=1$*

*У всех кошек нет хвоста.  $B=0$*

**1 и 0 – константы алгебры логики**

**Сложные** высказывания называются  
логическими **функциями.**

$$F(A,C,D) = A \vee D \wedge C$$

# Логические функции

Логическая функция - это формализованная запись сложного высказывания на языке алгебры логики.

$$F(A, B) = \overline{A \vee B}$$

# Таблицы истинности

Определить значение истинности сложного высказывания (функции от нескольких переменных) непросто.

Для этого составляют таблицу, в которой перечисляют все комбинации значений простых высказываний и, реализуя логическую связь, получают значения **ИСТИННОСТИ СЛОЖНОГО ВЫСКАЗЫВАНИЯ.**

$$\overline{A \vee B}$$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

# Таблицы истинности

Значения каждой логической функции можно описать таблицей истинности.

**ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ** представляет собой таблицу, устанавливающую соответствие между возможными значениями наборов переменных и значениями функции.

$\overline{A \vee B}$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

# Таблицы истинности

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦЫ:

1. **Определить** количество переменных, количество логических **операций** и последовательность их выполнения.

2. **Определить** количество строк по формуле:

**$Q=2^k+1$** , где  $k$  – количество переменных

3. **Определить** количество столбцов

**$M+N$** , где  $M$  – количество

переменных,

$N$  – количество операций

A	B	$A \vee B$	$A \vee \neg B$

# Таблицы истинности

## АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦЫ:

4. Первыми расположить столбцы с переменными.

5. За ними **по приоритету** столбцы операций.

6. **Заполнить** столбцы переменных **всеми возможными значениями**.

7. Затем, последовательно **выполняя операции**, заполнять столбцы операций.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

# Таблицы истинности

## АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦЫ:

4. Первыми расположить столбцы с переменными.

5. За ними **по приоритету** столбцы операций.

6. **Заполнить** столбцы переменных **всеми возможными значениями**.

7. Затем, последовательно **выполняя операции**, заполнять столбцы операций.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	1	

# Таблицы истинности

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦЫ:

4. Первыми расположить столбцы с переменными.

5. За ними **по приоритету** столбцы операций.

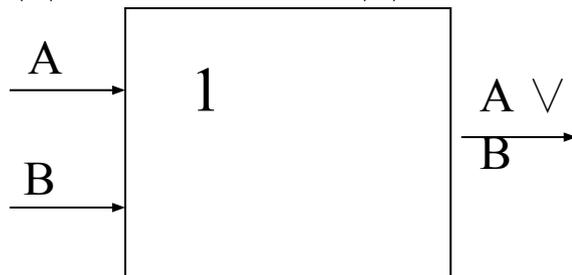
6. **Заполнить** столбцы переменных **всеми возможными значениями**.

7. Затем, последовательно **выполняя операции**, заполнять столбцы операций.

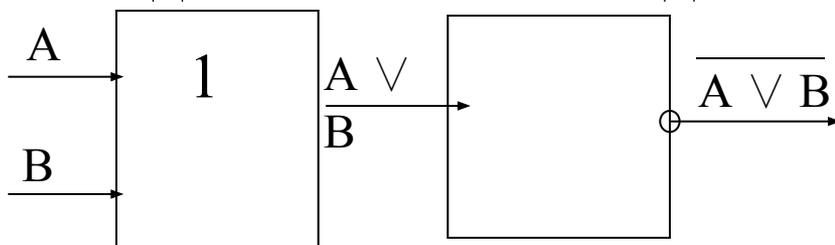
A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

# Логические схемы

**Логический элемент** (в технике) – это преобразователь информации, который устанавливает определенную взаимосвязь входных и выходных сигналов.



**Логической схемой (цепочкой)** называют соединение нескольких логических элементов, при котором выходные сигналы одних являются входными сигналами для других.



# Построение логической схемы по булеву выражению

$$F = X_1 \wedge (\overline{X_2} \vee X_3)$$

1. Определить приоритет операций.

$$F = X_1 \wedge (\overline{X_2} \vee X_3)$$

3    1    2

2. Определить количество и имена переменных.

3. Согласно приоритету дополнять в схему логические элементы, делая выходы предыдущих входами для последующих.

# Построение логической схемы по булеву выражению

$$F = X_1 \wedge (\overline{X_2} \vee X_3)$$

X1

---

X2

---

X3

---

# Построение логической схемы по булеву выражению

$$F = X_1 \wedge (\overline{X_2} \vee X_3)$$

X1

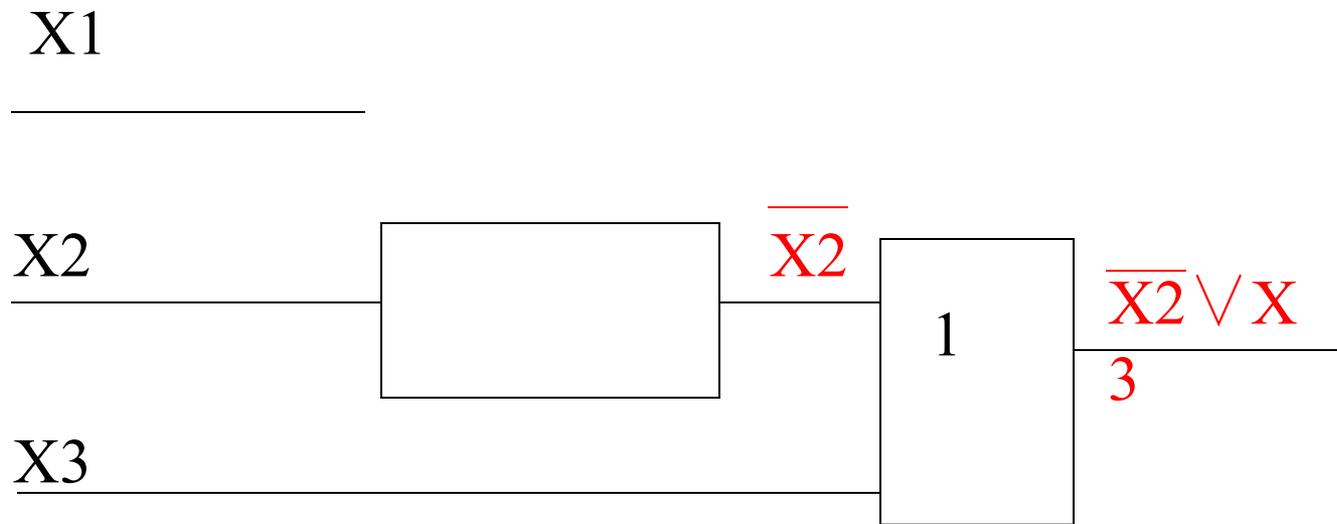
X2

X3



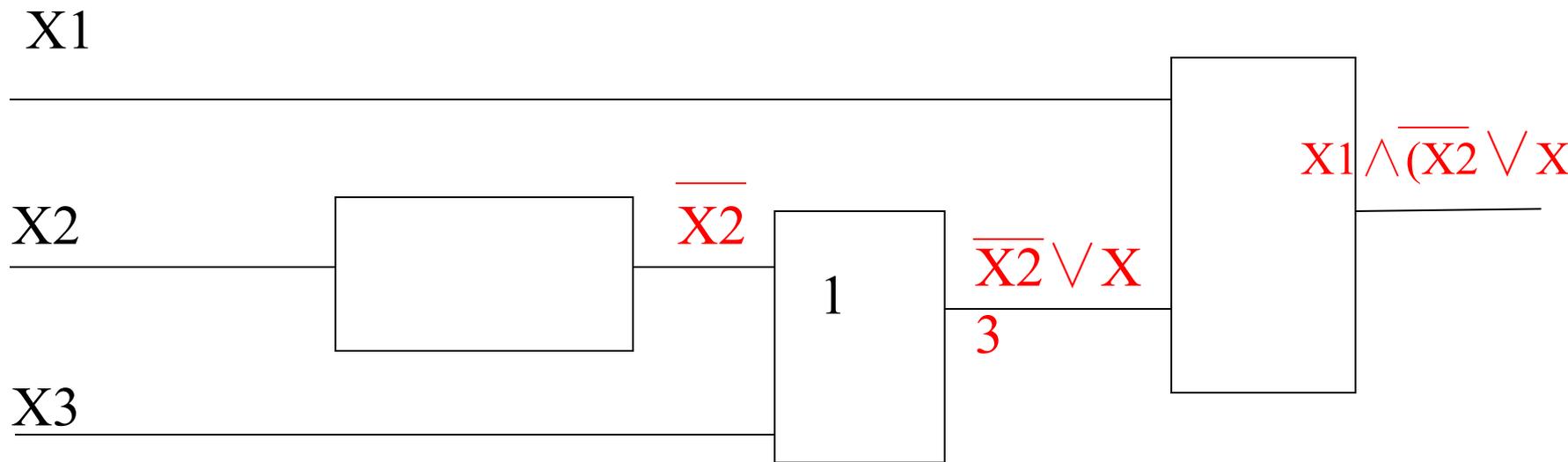
# Построение логической схемы по булеву выражению

$$F = X_1 \wedge (\overline{X_2} \vee X_3)$$



# Построение логической схемы по булеву выражению

$$F = X_1 \wedge (\overline{X_2} \vee X_3)$$



# Упрощение логических формул

Упростить функцию, означает получить функцию равносильную данной, но содержащую меньшее число вхождений переменных или операций.

*Например:*

$$B \vee A \wedge \bar{A} = B$$

$$(A \wedge \bar{A}) \wedge B \wedge C = B$$

$$\overline{\overline{A \wedge B}} = A \wedge B$$

$$(X \vee Y) \wedge X = X \wedge Y$$

Упрощение еще называют минимизацией функции, она необходима для того, чтобы функциональные схемы не были слишком громоздкими и не использовали лишних элементов.

Проектирование компьютеров не обходится без булевой алгебры начиная с 1938 года.

Электрическая схема компьютера состоит из миллионов переключательных элементов.

Алгебра Буля позволяет проводить анализ этих схем, упростить их, тем самым исключить неоправданное усложнение электронных схем работы компьютеров.

# Определите суждения

1. Завтра будет холодно.
2.  $2*2=5$
3. Какой ребенок не ждет Нового года?
4. Квадрат – это равносторонний прямоугольник.
5. Который час?
6. Идет дождь.
7. Идите сюда!
8. Завтра брат приедет к нам в гости.
9. 12 - число не простое.
10.  $10+5=15$
11. Луна – спутник Земли.
12. Принеси мне книгу.
13. Вы были в театре?
14. Мойте руки перед едой.
15. Все ученики нашей школы любят математику.

# Определите истинность суждений

1. Логический элемент ИЛИ всегда имеет два и более входов.
2. Логические элементы И и ИЛИ всегда имеют два и более входов.
3. Логический элемент КОНЪЮНКЦИЯ обозначается знаком  $\vee$ .
4. Логический элемент ИНВЕРСИЯ всегда имеет один вход.
5. Все логические элементы всегда имеют ОДИН выход.
6. Логические элементы И и ИЛИ могут иметь ОДИН вход.
7. Логический элемент ИНВЕРСИЯ может иметь несколько входов.
8. ИНВЕРСИЯ означает ПЕРЕВОРАЧИВАНИЕ.
9. Логический элемент КОНЪЮНКЦИЯ обозначается знаком  $\&$ .

# Составьте таблицы истинности

1.  $F(A,B,C) = A \vee (\overline{C} \wedge B)$

2.  $F(A,B,C) = B \wedge C \vee \bar{A}$

3.  $F(A,B,C) = \overline{(A \wedge B \wedge C)}$

4.  $F(A,B,C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

5.  $F(A,B,C,D) = (A \vee B) \wedge C \wedge (B \vee D)$

6.  $F(A,B,C,D) = (A \vee B) \vee (C \wedge (B \vee D))$

# Постройте логические схемы

1.  $F(A,B,C) = A \vee (\overline{C} \wedge B)$

2.  $F(A,B,C) = B \wedge C \vee \bar{A}$

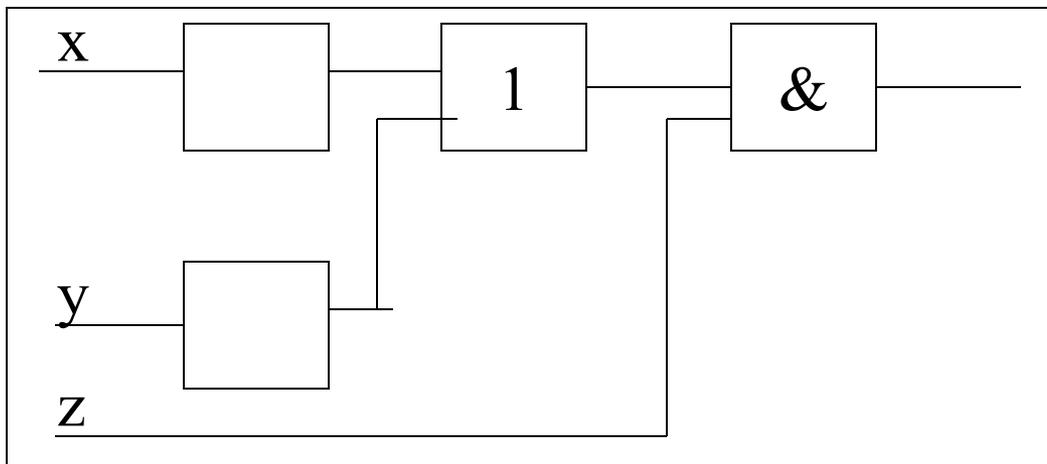
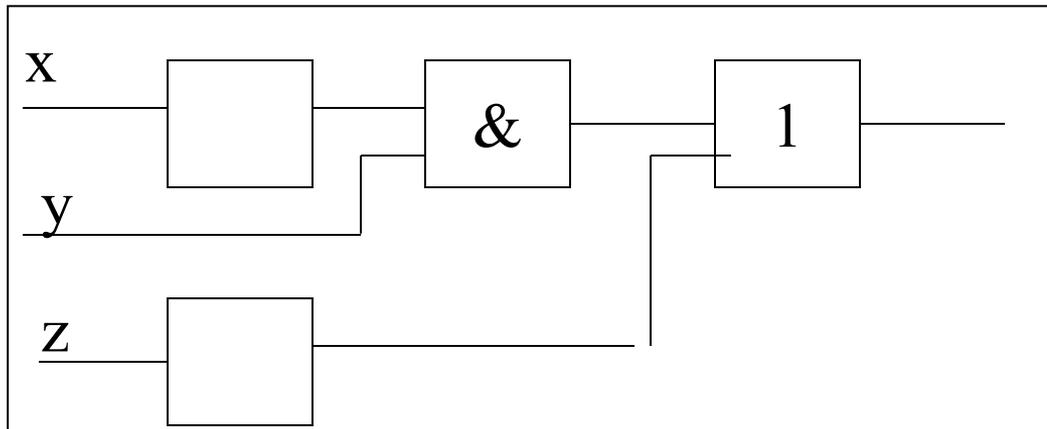
3.  $F(A,B,C) = \overline{(A \wedge B \wedge C)}$

4.  $F(A,B,C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

5.  $F(A,B,C,D) = (A \vee B) \wedge C \wedge (B \vee D)$

6.  $F(A,B,C,D) = (A \vee B) \vee (C \wedge (B \vee D))$

# Напишите логические формулы



# Запишите сложные высказывания в виде логических формул

1. Можно пойти в магазин и на рынок или не выходить из дома.
2. Наташа или не была в школе или получила двойку.
3. Подозреваемый не врал и не изворачивался.
4. Оля не испугалась и продолжила путь.
5. Это могли сделать Саша и Вика или Коля и Таня.

# Сформулируйте отрицания следующих высказываний

1. Саша занимается спортом.
2. Компьютер работает без сбоев.
3. На улице сухо.
4. Сегодня выходной день.
5. Антон сегодня не готов к урокам.
6. В школу поставили новые компьютеры.

# Составьте логические формулы по таблицам истинности

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1