Определение производной. Правила нахождения производных. Производная степенной функции с действительным показателем.

Определение. ***Приращением аргумента*** *для функции $y = f(x)$ называется значение разности двух значений аргумента из области определения этой функции.*

Малое, но конечное приращение аргумента принято обозначать Δx. Записывают: $x_2 - x_1 = \Delta x$.

Определение. ***Приращением функции*** *$y = f(x)$ называется значение разности соответствующих двух значений функции из ее области (множества) значений.*

Приращение функции принято обозначать Δy.

Записывают: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

Приращение функции находят по схеме.

Пусть аргумент x получил приращение Δx. Тогда получим $x + \Delta x$ — наращенное значение аргумента и соответствующее ему наращенное значение функции $f(x) + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Следовательно, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

ПРИМЕР

1. Найдем приращение аргумента и приращение функции $f(x) = 4x^2 - 2x + 4$, если аргумент изменил свое значение от 1 до 1,5.

Решение. Найдем приращение аргумента $\Delta x = 1,5 - 1 = 0,5$. Поскольку $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, найдем $f(x_2)$ и $f(x_1)$. Получим: $f(x_2) = f(1,5) = 4 \cdot 2,25 - 3 + 4 = 10$, $f(x_1) = f(1) = 6$, поэтому $\Delta y = 10 - 6 = 4$.

Ответ: 0,5 и 4.

ПРИМЕР

2. Найдем приращение функции $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ при $x = -2$ и $\Delta x = 0,5$.

Решение. Поскольку $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то получим: $\Delta y = -(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 4 + x^2 - 2x + 4 = -x^2 - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 4 + x^2 - 2x + 4 = -2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 2\Delta x = 2 - 0,25 + 1 = 2,75$.

Ответ: 2,75.

Определение. ***Производной функции в точке*** x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует.*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Определение. *Функцию, имеющую конечную производную, называют* ***дифференцируемой в точке.*** *Если функция имеет конечную производную в каждой точке множества, то говорят, что она* ***дифференцируема на множестве.***

ПРИМЕР

3. Найдем производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. По определению производной получим:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Значит, $(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

Ответ: $(x^2)' = 2x$.

Определение. *Процесс вычисления производной называется* ***дифференцированием.***

Поскольку $(x^2)' = 2x$ для всех действительных чисел, поэтому функция $y = x^2$ дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

ПРИМЕР

4. Найдем производную функции $y(x) = \frac{1}{x}$.

Решение. По определению производной получим:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

ПРИМЕР

5. Найдем производную функции $y(x) = \sqrt{x}$.

Решение. Применяя определение производной, получим:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$. Заметим, что

$$\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2 = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Тогда:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ответ: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Правила нахождения производных.

Теорема. *Производная суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных:*

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

Учитывая, что разность можно рассматривать как алгебраическую сумму, кратко эту формулу записывают в виде:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Доказательство.

$$(u + v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Доказанная формула распространяется на случай суммы трех и более слагаемых.

ПРИМЕР

1. Найдем производную функции $g(x) = x + x^2 - 3$.

Решение. Функция $y = g(x)$ — это сумма трех дифференцируемых функций, поэтому:

$g'(x) = (x + x^2 - 3)' = (x)' + (x^2)' + (-3)' = 1 + 2x + 0 = 1 + 2x.$

Ответ: $g'(x) = 1 + 2x$.

Теорема. *Производная произведения двух дифференцируемых функций находится с помощью формулы:*

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Кратко эту формулу записывают в виде:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Доказательство.

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \left| \begin{matrix} u(x_0 + \Delta x) = u + \Delta u \\ v(x_0 + \Delta x) = v + \Delta v \end{matrix} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u)v + (\Delta v)u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u + u' \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}_{0} = u'v + v'u.$$

ПРИМЕР

2. 1) Найдем производные функций $f(x) = \dfrac{5}{x}$; 2) $g(x) = -7\sqrt{x}$.

Решение. 1) Функция $y = f(x)$ представляет собой произведение константы: числа 5 и дифференцируемой функции $y = \dfrac{1}{x}$, поэтому:

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5 \cdot \frac{1}{x}\right)' = 5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot (5)' = 5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot 0 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^2}.$$

2) Первый множитель функции $y = g(x)$ представляет собой константу: число -7, второй — дифференцируемую функцию $y = \sqrt{x}$.

$$g'(x) = (-7\sqrt{x})' = -7(\sqrt{x})' + \sqrt{x} \cdot (-7)' = -7(\sqrt{x})' + \sqrt{x} \cdot 0 = -7 \cdot (\sqrt{x})' = -7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{7}{2\sqrt{x}}.$$

Ответ: $f'(x) = -\dfrac{5}{x^2}$; $g'(x) = -\dfrac{7}{2\sqrt{x}}$.

Теорема. *Производная частного двух дифференцируемых функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, причем $g(x) \neq 0$ находится с помощью формулы:*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Кратко эту формулу записывают в виде:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Доказательство.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \left\{\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u)v - (\Delta v)u}{\Delta x v(v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(v + \Delta v)} -$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{u}{v(v + \Delta v)} = \frac{u'}{v} - \frac{v'u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \quad \blacksquare$$

ПРИМЕР

4. Найдем производную степени с натуральным показателем $(x^n)'$. Поскольку $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, то можно предположить, что $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Докажем это равенство.

Доказательство проведем методом математической индукции. Проверим, истинно ли данное утверждение при $n = 1$. $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}$ — верно. Допустим, что утверждение истинно, при $n=k$, т. е. $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ докажем, что утверждение истинно при $n=k+1$, т.е. убедимся в истинности утверждения $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

Действительно, $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = (x)' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = (k + 1)x^k$.

Следовательно, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ответ: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Значение произведения константы и дифференцируемой функции $(Cu)'$ можно вычислить по формуле: $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$, т. е. константу можно вынести за знак производной.

Кратко эту формулу записывают в виде:

$(cu)' = cu'$, где c — const.

ПРИМЕР

3. Определим производную от выражения $2x^2$.

Решение. $(2x^2)' = 2 \cdot (x^2)' = 2 \cdot 2x = 4x$.

Ответ: $4x$.

Запомните формулу: $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого натурального числа n.

ПРИМЕР

5. Если $g(x) = x^4$, то $g'(x) = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$.

Ответ: $4x^3$.

Таблица производных :

$C' = 0$	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(x^n)' = n\,x^{n-1}$
будем заполнять постепенно! оставить побольше места!					

Домашнее задание:

1. Выпишите правила дифференцирования!!!

2. Переписать таблицу производных Выделите страницу для заполнения таблицы производных!!!

3. Решить задачи №41.1- №41.3

Пользуясь правилами вычисления производных, найдите $f'(x)$ (41.1—41.2):

41.1. 1) $f(x) = 3x - \sqrt{3}$;
2) $f(x) = x^3 - \sqrt{3}x$;
3) $f(x) = x^2 + 3x - \sqrt{2}$;
4) $f(x) = x^3 - \sqrt{7}\,x + \pi$;
5) $f(x) = 5x^{-4} + 2x - \sqrt{5}$;
6) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sqrt{3}x^2 - 7$.

41.2. 1) $f(x) = 3x(x - 1)$;
2) $f(x) = x^2(x^3 - \sqrt{3}\,x)$;
3) $f(x) = (x^2 + 3)(x - 5)$;
4) $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{7}\,x$;
5) $f(x) = \frac{x - 2}{x + 3} - 5x$;
6) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 4} - 3x + 2$.

41.3. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:
1) $f(x) = x \cdot (x - 3)$, $x_0 = 4$;
2) $f(x) = (x^2 - 5) \cdot (x - 3)$, $x_0 = 1{,}1$;
3) $f(x) = 4 \cdot (x^2 + 3x) \cdot (x - 1)$, $x_0 = -0{,}4$;
4) $f(x) = (2x - 1)(x + 3) - x$, $x_0 = 1\frac{1}{3}$.