Арифметические операции над пределами. Первый замечательный предел

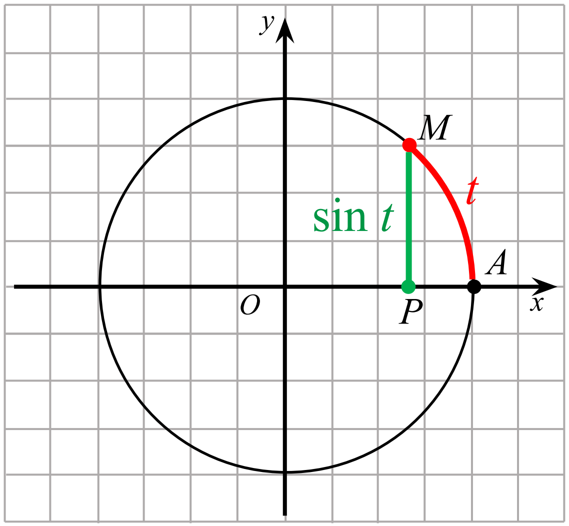
ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

11 класс (базовый уровень)
§ 4. Предел функции в точке

Первый замечательный предел

Рассмотрим числовую окружность.



Выберем близкое к нулю значение t и отметим точку $M\ (t)$.

Длина дуги AM равна t.

Опустим перпендикуляр MP на ось абсцисс.

Длина этого перпендикуляра равна ординате точки $M\ (t)$, а значит, $MP = \sin t$.

Для достаточно малых значений t длина дуги AM примерно равна длине отрезка MP, то есть $\sin t \approx t$, следовательно, $\dfrac{\sin t}{t} \approx 1$.

Чем ближе к нулю значение t, тем точнее это приближенное равенство.

В курсе высшей математики доказано, что $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1}$

Равенство $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ называют *первым замечательным пределом*.

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1}$$

Вычислим:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}.$$

Положим $t=2x$ и заметим, что если $x\to 0$, то и $t\to 0$.

$$\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{5}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1\ \text{(первый замечательный предел)}}=\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{5}$.

№4.17(е)

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin 4x}$ [ ]

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\right)=\frac{1}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}.$$

Положим $t=4x$ и заметим, что если $x\to 0$, то и $t\to 0$.

$$\frac{1}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{1}{8}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}}_{\text{не совсем первый замечательный предел}}=\frac{1}{8}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\lim\limits_{t\to 0}1}{\underbrace{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{8}$.

№4.10(г)

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\sin 5x}{6x^2}$ $\quad\left[\qquad\qquad\right]$

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin 5x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{\sin x\cdot\sin 5x}{x\cdot 5x}\right)=$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin 5x}{x\cdot 5x}=\frac{5}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\right)=$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}_{=1}=\frac{5}{6}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{6}$.

Ответьте на вопросы теста, пройдя по ссылке:

https://forms.gle/UyNWGP1c8mrUdzfdA