

# Векторы в пространстве

[ВХОД](#)

# Содержание

- I. Понятие вектора в пространстве
- II. Коллинеарные векторы
- III. Компланарные векторы
- IV. Действия с векторами
- V. Разложение вектора
- VI. Базисные задачи

*Проверь себя*

*Об авторе*

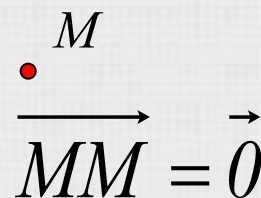
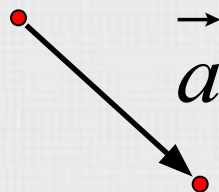
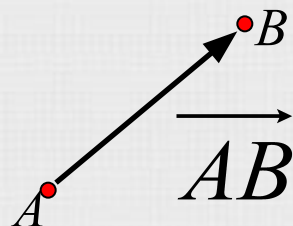
*Помощь в управлении презентацией*

*Выход*

# Понятие вектора в пространстве

*Вектор(направленный отрезок) –*

*отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.*



*Длина вектора  $\overrightarrow{AB}$  – длина отрезка AB.*

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \quad |\vec{0}| = 0$$





# Коллинеарные векторы

*Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.*

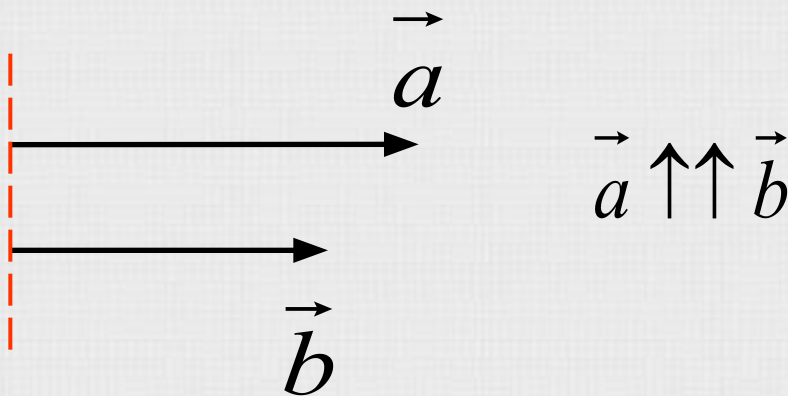
*Среди коллинеарных различают:*

- Сонаправленные векторы
- Противоположно направленные векторы



# Сонаправленные векторы

*Сонаправленные векторы - векторы, лежащие по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.*



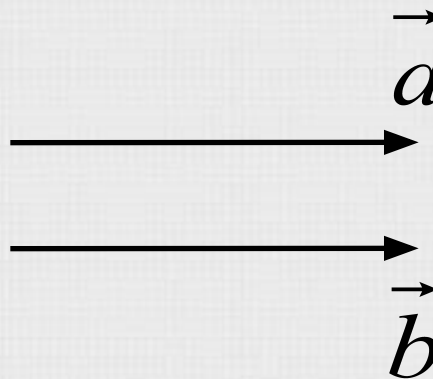
*Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.*

- Равные векторы



# Равные векторы

*Равные векторы - сонаправленные векторы, длины которых равны.*


$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

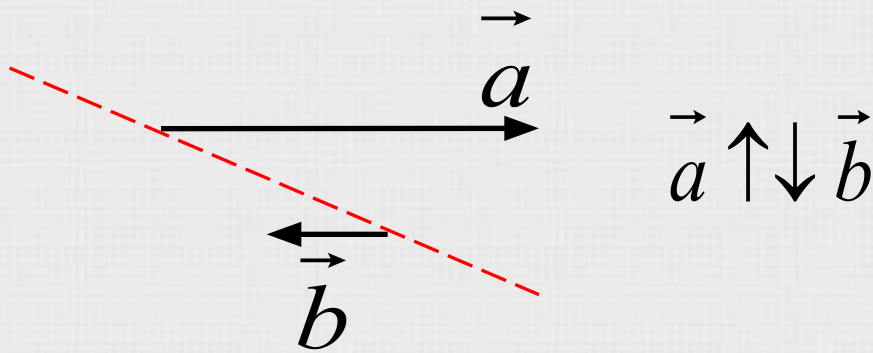
*От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.*





# Противоположно направленные векторы

*Противоположно направленные векторы – векторы, лежащие по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.*

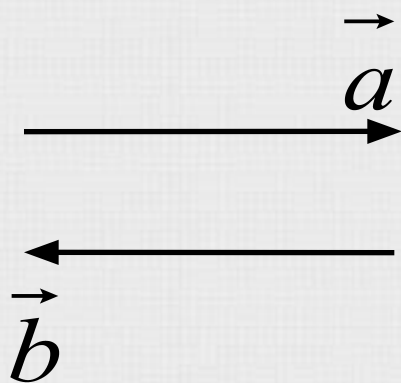


- Противоположные векторы



# Противоположные векторы

*Противоположные векторы – противоположно направленные векторы, длины которых равны.*


$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

*Вектором, противоположным нулевому, считается нулевой вектор.*





# Признак коллинеарности

*Если существует такое число  $k$  при котором выполняется равенство  $\vec{a} = k\vec{b}$  и при том вектор  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.*

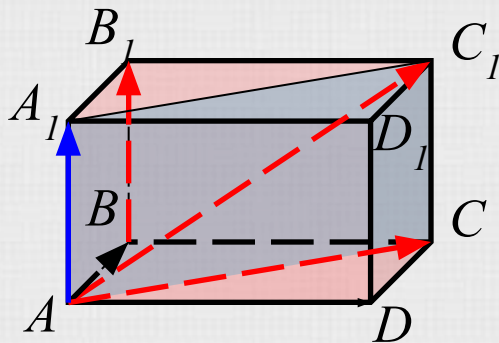
*Доказательство*



# Определение компланарных векторов

*Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

*Пример:*

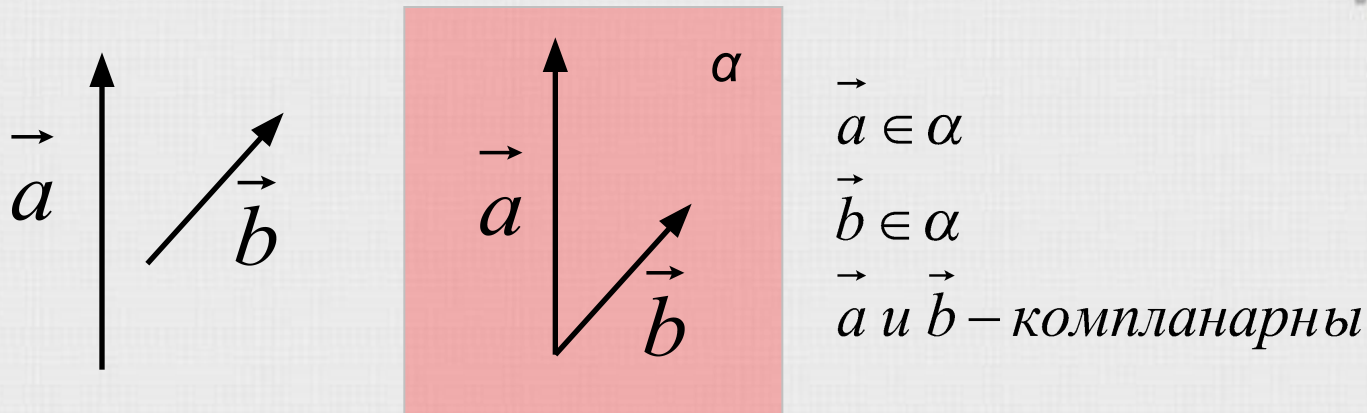


$\vec{BB_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$  – компланарны, т.к.  
 $\vec{BB_1} = \vec{AA_1}$ , а векторы  $\vec{AA_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$   
лежат в плоскости  $(AA_1C)$



# О компланарных векторах

*Любые два вектора всегда компланарны.*



*Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.*

$\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  –

компланарны

*если*

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$   
 $\vec{a} = k\vec{b}$





# Признак компланарности

Если вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

где  $x$  и  $y$  – некоторые числа, то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

Доказательство

Задачи



# Свойство компланарных векторов

*Если векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде :*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

*причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.*



# Действия с векторами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение вектора на число
- Скалярное произведение





# Сложение векторов

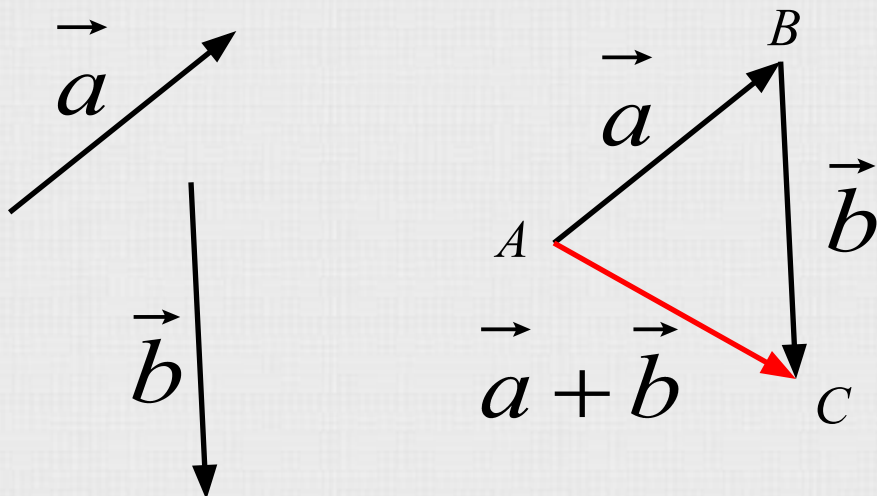
- Правило треугольника
- Правило параллелограмма
- Правило многоугольника
- Правило параллелепипеда
- Свойства сложения



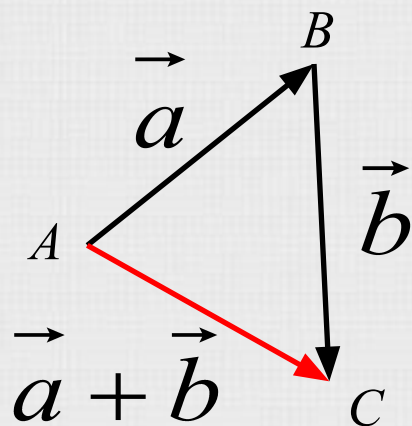
# Правило треугольника

Для сложения двух векторов необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный  $\vec{a}$
2. от точки  $B$  отложить вектор  $\overrightarrow{BC}$ , равный  $\vec{b}$
3. вектор  $\overrightarrow{AC}$  называется суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$



# Правило треугольника



Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \underline{\vec{AC}}$$

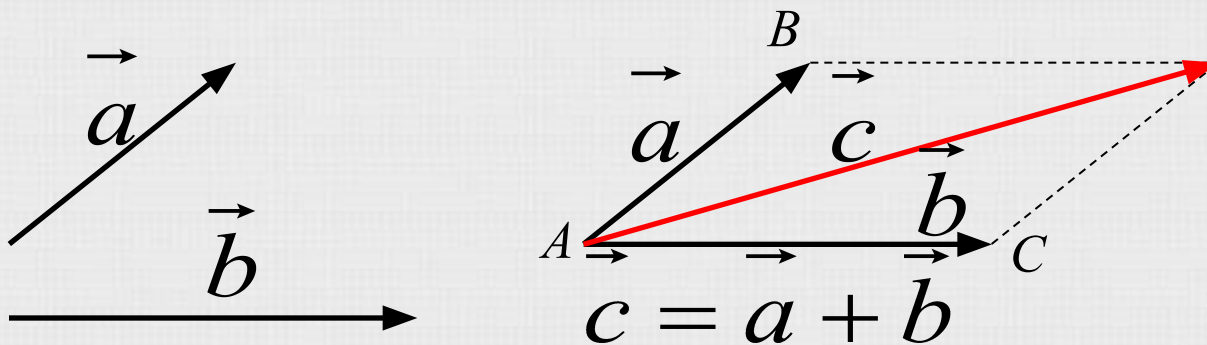




# Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный  $\vec{a}$
2. от точки  $A$  отложить вектор  $\overrightarrow{AC}$ , равный  $\vec{b}$
3. достроить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам
4. диагональ параллелограмма – сумма векторов



# Свойства сложения

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  справедливы  
равенства :

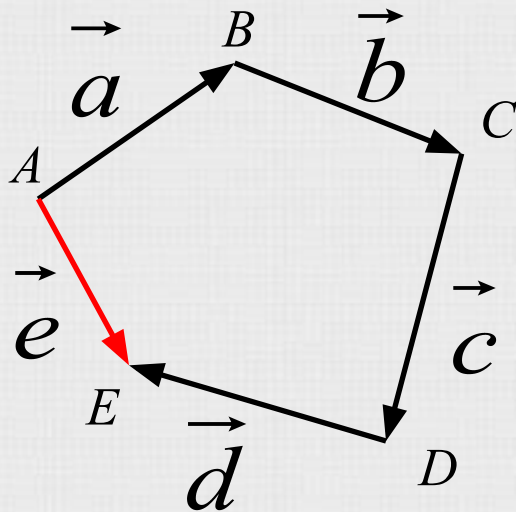
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{переместительный закон}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{сочетательный закон}$$



# Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего (при последовательном откладывании).



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

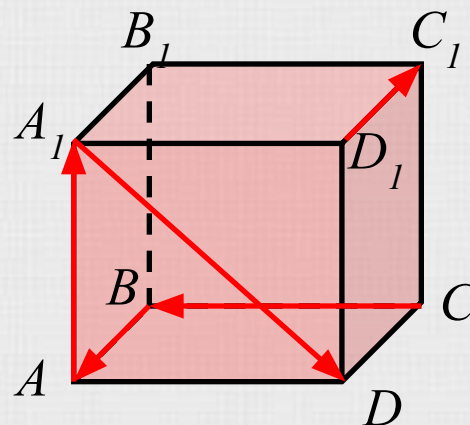
Пример

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{\overrightarrow{AE}}$$





# Пример

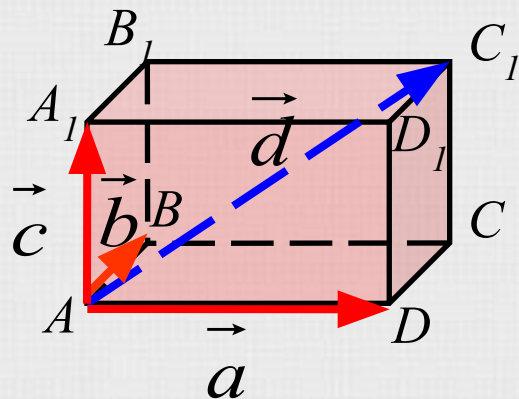


$$\vec{AA_1} + \vec{D_1C_1} + \vec{A_1D} + \vec{BA} + \vec{CB} = \vec{0}$$



# Правило параллелепипеда

*Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.*



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

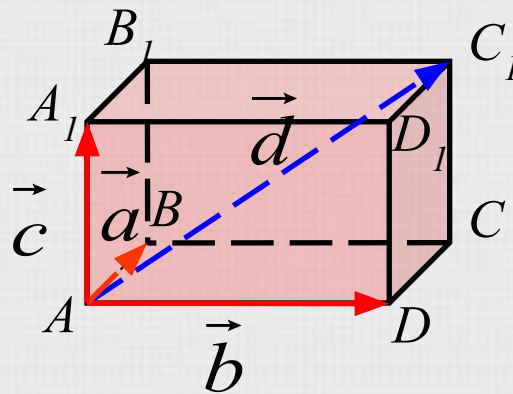
$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$



# Свойства



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  для любого параллелепипеда  
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$  для прямоугольного  
параллелепипеда





# Вычитание векторов

- Вычитание
- Сложение с противоположным



# Вычитание

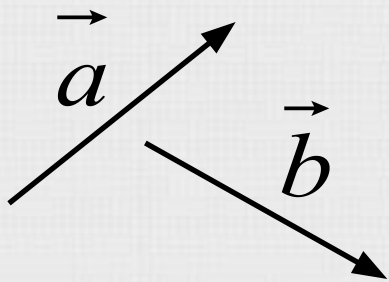
Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор, сумма которого с вектором  $\vec{b}$  равна вектору  $\vec{a}$ .



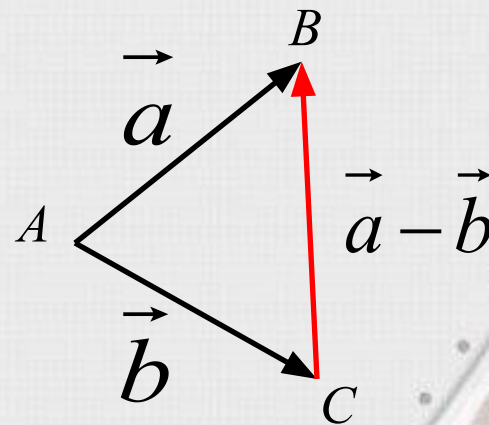
# Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный  $\vec{a}$
2. от этой же точки  $A$  отложить вектор  $\overrightarrow{AC}$ , равный  $\vec{b}$
3. вектор  $\overrightarrow{CB}$  называется разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$



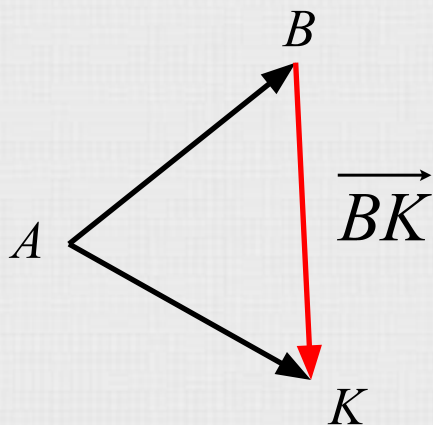
Правило трех точек





# Правило трех точек

*Любой вектор можно представить как разность двух векторов, проведенных из одной точки.*



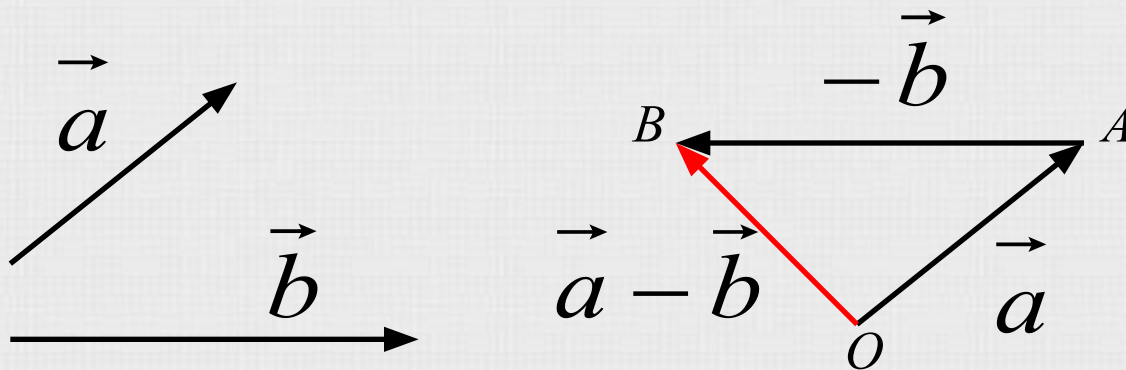
$$\underline{\overrightarrow{BK}} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$$



# Сложение с противоположным

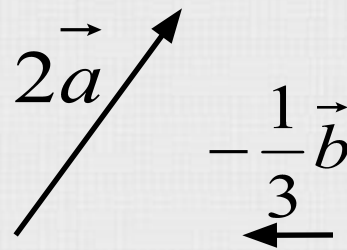
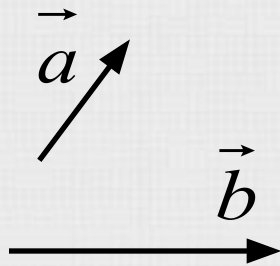
Разность векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно представить как сумму вектора  $\vec{a}$  и вектора, противоположного вектору  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



# Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$ , длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$ , при чем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k \geq 0$  и противоположно направлены при  $k < 0$ .





# Свойства

- Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

$$\vec{0} \cdot n = \vec{0}$$

- Произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор.

$$n \cdot \vec{0} = \vec{0}$$



# Свойства

Для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и любых чисел  $k, l$  справедливы равенства :

$$(\vec{k}l)\vec{a} = \vec{k}(\vec{l}a) \quad \text{сочетательный закон}$$

$$\vec{k}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{k}a + \vec{k}b \quad \text{1-ый распределительный закон}$$

$$(\vec{k} + \vec{l})\vec{a} = \vec{k}a + \vec{l}a \quad \text{2-ой распределительный закон}$$



# Скалярное произведение

*Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения





# Справедливые утверждения

- *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

- *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$$



# Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  выражается формулой

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательство



# Свойства скалярного произведения

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы равенства :

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ причем } \vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \text{ при } \vec{a} \neq 0$$

$$2^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{переместительный закон})$$

$$3^0. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{распределительный закон})$$

$$4^0. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{сочетательный закон})$$





# Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам



# Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

## Теорема.

*Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.*

## Доказательство



# Разложение вектора по трем некопланарным векторам

*Если вектор  $\vec{p}$  представлен в виде*

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

*где  $x, y, z$  – некоторые числа, то говорят, что вектор  $\vec{p}$  разложен по векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .*

*Числа  $x, y, z$  называются коэффициентами разложения.*

## **Теорема**

*Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.*

**Доказательство**

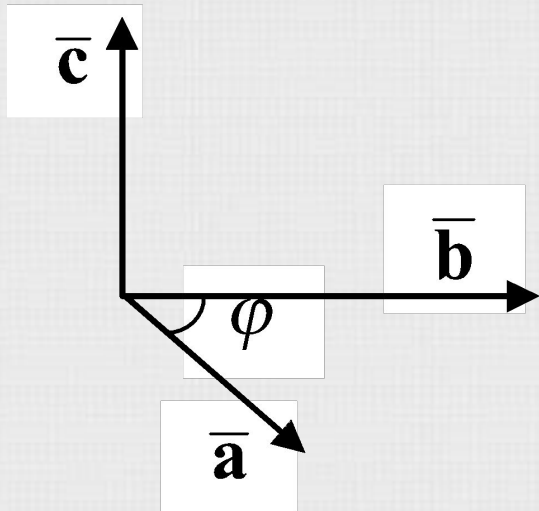




*Определение.* **Векторным произведением** двух ненулевых векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  называется вектор  $\bar{\mathbf{c}}$ , для которого выполняются следующие условия:

- 1)  $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin \varphi$ ,
- 2)  $\bar{\mathbf{c}}$  ортогонален векторам  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$ ,
- 3)  $\bar{\mathbf{c}}$  направлен так, что тройка векторов  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$  – правая, то есть ориентирована одинаково с базисной тройкой  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$$



Если хотя бы один из векторов нулевой, то полагают, что векторное произведение равно нулевому вектору.

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k} \quad [\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$$

$$[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i} \quad [\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}$$

$$[\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j} \quad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$$

Свойства векторного произведения

1.  $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}]$

2.  $[\alpha\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \alpha\bar{\mathbf{b}}] = \alpha[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$

3.  $[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}]$

4.  $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] = \bar{\mathbf{0}}$

*Лемма 6.1.* Векторное произведение двух ненулевых векторов есть нулевой вектор тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.

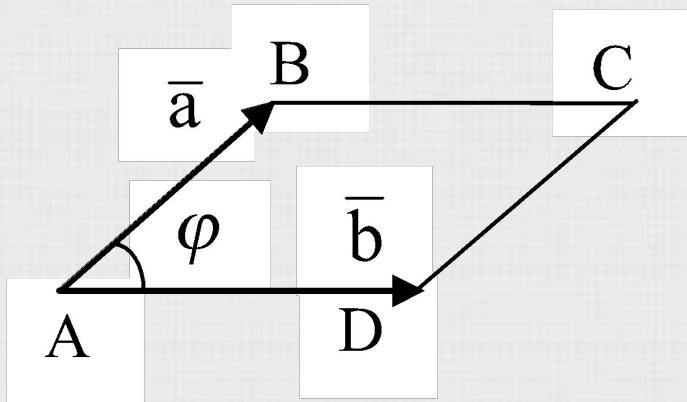
# Вычисление векторного произведения по координатам

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$



**Лемма 6.2.** Пусть  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  – неколлинеарные вектора. Тогда площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна модулю векторного произведения векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$ :  $S = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|$ .



**Следствие 6.3.** Пусть  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  – неколлинеарные вектора. Тогда площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна половине модуля векторного произведения векторов  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$ :  $S = \frac{1}{2} \cdot |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|$ .

*Определение.* Смешанным произведением трёх векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение  $[\bar{a}, \bar{b}]$  умножаем скалярно на  $\bar{c}$ :

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}).$$

*Лемма 7.1.* Пусть  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$  – некопланарные вектора. Тогда объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен модулю смешанного произведения векторов  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$ :

$$V = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$

*Следствие 7.2.* Пусть  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$  – некопланарные вектора. Тогда объём пирамиды, построенной на этих векторах, равен одной шестой модуля смешанного произведения векторов  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$ :

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$



# Вычисление смешанного произведения

Пусть  $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$ ,  $\bar{\mathbf{c}} = \{c_x, c_y, c_z\}$ .

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$