Здравствуйте!

Лекция №1

Часть 1

Неопределенный интеграл

Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Пример.

Рассматриваемый ниже пример очень важен для дальнейшего. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Утверждается, что в этом случае первообразная $F(x) = \ln|x|$.

Проверяем:

Пусть $x > 0$. Тогда $|x| = x$ и $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Пусть теперь $x < 0$. Тогда $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$,

так что всегда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$, то $F_1(x)-F_2(x)=C$.

Доказательство.

Действительно, в этом случае $[F_1(x)-F_2(x)]'=f(x)-f(x)\equiv 0$ и поэтому, согласно условия постоянства функции, $F_1(x)-F_2(x)=C$.

Следствие. Если $F(x)$ есть одна из первообразных функции $f(x)$, то любая другая первообразная имеет вид $F(x)+C$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ есть любая из первообразных функции $f(x)$.

Термины.

$f(x)$ – **подынтегральная функция**;

$f(x)dx$ – **подынтегральное выражение.**

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Действительно, если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$

Действительно, $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

Подытоживая эти два свойства можно сказать, что стоящие рядом знаки d и $\int$ **взаимно уничтожаются**, то есть операция дифференцирования и операция интегрирования есть взаимно обратные операции.

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Действительно, пусть $\int f(x)dx = F(x)$ и $\int g(x)dx = G(x)$. Но тогда

$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

и поэтому

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = F(x) \pm G(x) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

4. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$.

Действительно, пусть $\int f(x)dx = F(x)$. Но тогда $[cF(x)]' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$ и поэтому

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot F(x) = c \cdot \int f(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$,
$\mu \neq -1$

$\int dx = x + C$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10 $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

11. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

12. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

Основные приемы интегрирования

Замена переменных

Пусть надо вычислить $\int f(x)dx$. Перейдем от переменной x к переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, так что $t = \varphi^{(-1)}(x)$. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и мы получаем

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пусть нам каким-то способом удалось вычислить последний интеграл и он оказался равен $G(t)$, то есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)$. Тогда утверждается, что

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{(-1)}(x)).$$

Докажем это. Итак

1. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)$. Это значит, что $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

2. Найдем производную от $G(\varphi^{(-1)}(x))$. Вспоминая формулу производной от сложной функции, а затем формулу производной от обратной функции, получим

$$[G(\varphi^{(-1)}(x))]' = G'(\varphi^{(-1)}(x)) \cdot \left(\varphi^{(-1)}(x)\right)' =$$

$$= f(\varphi(\varphi^{(-1)}(x)))\varphi'(\varphi^{(-1)}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{(-1)}(x))} = f(x),$$

так как сомножители $\varphi'(\varphi^{(-1)}(x))$ сокращаются, а $\varphi(\varphi^{(-1)}(x)) = x$.

Следовательно, $\int f(x)dx = G(\varphi^{(-1)}(x))$.

Эта формула является основным методом вычисления неопределенных интегралов. Ее пишут в виде цепочки

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) = G(\varphi^{(-1)}(x)).$$

Интегрирование по частям

Пусть даны две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Тогда, по свойствам дифференциалов,

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Интегрируя это соотношение, получим $\int d(uv) = uv = \int udv + \int vdu$.

Отсюда следует, что

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

В развернутом виде эта формула имеет вид

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx.$$

Эта формула и носит название формулы интегрирования по частям.

Пример.

Пусть надо вычислить интеграл $\int x \ln x dx$.

Разбиваем подынтегральное выражение на кусочки $u = \ln x$, $dv = xdx$. Отсюда получается, что $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}$. Формула интегрирования по частям дает тогда

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$