

Здравствуйте!

Лекция №1

Часть 1

Неопределенный интеграл

Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Пример.

Рассматриваемый ниже пример очень важен для дальнейшего. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Утверждается, что в этом случае первообразная $F(x) = \ln |x|$.

Проверяем:

Пусть $x > 0$. Тогда $|x| = x$ и $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Пусть теперь $x < 0$. Тогда $|x| = -x$ и

$$(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

так что всегда $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Доказательство.

Действительно, в этом случае $[F_1(x) - F_2(x)]' = f(x) - f(x) \equiv 0$ и поэтому, согласно условия постоянства функции, $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Следствие. Если $F(x)$ есть одна из первообразных функции $f(x)$, то любая другая первообразная имеет вид $F(x) + C$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ есть любая из первообразных функции $f(x)$.

Термины.

$f(x)$ – **подынтегральная функция;**

$f(x)dx$ – **подынтегральное выражение.**

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

Действительно, если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то
 $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx.$

2. $\int dF(x) = F(x) + C$

Действительно, $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C.$

Подытоживая эти два свойства можно сказать, что стоящие рядом знаки d и \int взаимно уничтожаются, то есть операция дифференцирования и операция интегрирования есть взаимно обратные операции.

$$3. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Действительно, пусть $\int f(x) dx = F(x)$ и $\int g(x) dx = G(x)$. Но тогда

$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$$

и поэтому

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = F(x) \pm G(x) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$4. \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx.$$

Действительно, пусть $\int f(x) dx = F(x)$. Но тогда

$$[cF(x)]' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x) \text{ и поэтому}$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot F(x) = c \cdot \int f(x) dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

$$1. \int 0 \cdot dx = C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$2. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C,$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\mu \neq -1$$

$$\int dx = x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$11. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$12. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

Основные приемы интегрирования

Замена переменных

Пусть надо вычислить $\int f(x)dx$. Перейдем от переменной x к переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, так что $t = \varphi^{(-1)}(x)$. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и мы получаем

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пусть нам каким-то способом удалось вычислить последний интеграл и он оказался равен $G(t)$, то есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)$.

Тогда утверждается, что

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{(-1)}(x)).$$

Докажем это. Итак

1. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)$. Это значит, что $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

2. Найдем производную от $G(\varphi^{(-1)}(x))$. Вспоминая формулу производной от сложной функции, а затем формулу производной от обратной функции, получим

$$\begin{aligned} [G(\varphi^{(-1)}(x))] &= G'(\varphi^{(-1)}(x)) \cdot (\varphi^{(-1)}(x))' = \\ &= f(\varphi(\varphi^{(-1)}(x)))\varphi'(\varphi^{(-1)}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{(-1)}(x))} = f(x), \end{aligned}$$

так как сомножители $\varphi'(\varphi^{(-1)}(x))$ сокращаются, а $\varphi(\varphi^{(-1)}(x)) = x$.

Следовательно, $\int f(x)dx = G(\varphi^{(-1)}(x))$.

Эта формула является основным методом вычисления неопределенных интегралов. Ее пишут в виде цепочки

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) = G(\varphi^{(-1)}(x)).$$

Интегрирование по частям

Пусть даны две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Тогда, по свойствам дифференциалов,

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Интегрируя это соотношение, получим $\int d(uv) = uv = \int u dv + \int v du$.

Отсюда следует, что

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

В развернутом виде эта формула имеет вид

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

Эта формула и носит название формулы интегрирования по частям.

Пример.

Пусть надо вычислить интеграл $\int x \ln x dx$.

Разбиваем подынтегральное выражение на кусочки $u = \ln x$, $dv = x dx$. Отсюда получается, что $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$. Формула

интегрирования по частям дает тогда

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$