

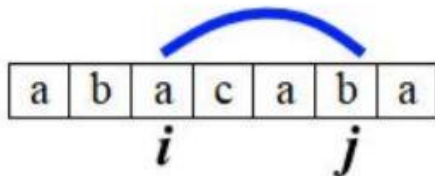
Определения: строка, подстрока

Строка – это конечная (возможно, пустая) последовательность символов алфавита. Длина строки s обозначается как $|s|$. Символы будем считать пронумерованными от 0 до $|s|-1$.

Примеры строк: $s_1 = \langle 010101 \rangle$, $s_2 = \langle abacaba \rangle$, $s_3 = [31, 34, 41]$ (символы – целые числа), $s_4 = \langle \rangle$.

Подстрока – последовательность подряд идущих символов строки.

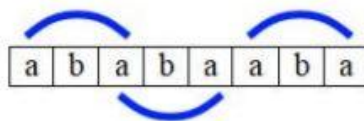
Например, все подстроки строки «apple»: «apple», «appl», «pple», «app», «rpl», «ple», «ар», «pp», «pl», «le», «а», «р», «l», «е», «».



Обозначим $s[i \dots j]$ подстроку, которая начинается в i и заканчивается в j . Её длина равна $j-i+1$.

Определения: вхождение, префикс, суффикс

Вхождением строки p в строку t будем называть такую пару индексов (i, j) , что $p = t[i \dots j]$. Например, в строке $t = \text{«ababaaba»}$ всего 3 вхождения строки $p = \text{«aba»}$.



Префиксом строки s называется подстрока вида $s[0 \dots i]$. Всего у строки $|s|+1$ префиксов (пустой и полный тоже учитываются). Например, если $s = \text{«abc»}$, то префиксы это — «», «a», «ab», «abc».

Суффиксом строки s называется подстрока вида $s[j \dots |s|-1]$. Всего у строки $|s|+1$ суффиксов (пустой и полный тоже учитываются). Например, если $s = \text{«abc»}$, то суффиксы это — «», «c», «bc», «abc».

Z-функция: определение

Для заданной строки строки $s=s_0s_1\dots s_{n-1}$ её **z-функцией** является массив z длины n , проиндексированный от 0 до $n-1$, что $z[i]$ — это длина наидлиннейшего общего префикса всей строки s и её суффикса $s[i \dots n-1]$.

Для $i=0$ обычно $z[0] = 0$ (иногда удобно считать, что $z[0] = n$).

Пример. Пусть $s=«abacaba»$

0	1	2	3	4	5	6
a	b	a	c	a	b	a

- $z[0] = 0$ — по определению
- $z[1] = 0$ — ищем длину наидл. общего префикса у abacaba и bacaba
- $z[2] = 1$ — ищем ДНОП у abacaba и acaba
- $z[3] = 0$ — ищем ДНОП у abacaba и caba
- $z[4] = 3$ — ищем ДНОП у abacaba и aba
- $z[5] = 0$ — ищем ДНОП у abacaba и ba
- $z[6] = 1$ — ищем ДНОП у abacaba и a

Z-функция: примеры

Для заданной строки строки $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ её **z-функцией** является массив z длины n , проиндексированный от 0 до $n-1$, что $z[i]$ – это длина наидлиннейшего общего префикса всей строки s и её суффикса $s[i \dots n-1]$. Для $i=0$ обычно $z[0] = 0$ (иногда удобно считать, что $z[0] = n$).

Примеры

- $s = \text{«abacaba»}$, $z = [0, 0, 1, 0, 3, 0, 1]$
- $s = \text{«aaaaaaaaa»}$, $z = [0, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$
- $s = \text{«abababab»}$, $z = [0, 0, 6, 0, 4, 0, 2, 0]$

Z-function: НАИВНЫЙ АЛГОРИТМ

```
49 vector<int> zFunction(vector<int> &s) {  
50     int n = s.size();  
51     vector<int> z(n);  
52     for (int i = 1; i < n; ++i)  
53         while (z[i] + i < n && s[z[i] + i] == s[z[i]])  
54             z[i] += 1;  
55     return z;  
56 }
```

Z-функция: использования для поиска вхождений

Предположим, что умеем находить z -функцию эффективно. Тогда и задачу о нахождении подстроки в строке можно решить эффективно.

Пусть дан текст t и образец p . Требуется найти все вхождения образца p в текст t .

Построим новую строку s следующим образом: $s := p + '$' + t$, где '\$' – это такой символ, которого нет ни в t ни в p .

$t =$

a	a	b	a	a	b	a	b	a	a
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$p =$

a	b	a	a
---	---	---	---

$s =$

a	b	a	a	\$	a	a	b	a	a	b	a	b	a	a
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Z-функция: использования для поиска вхождений

Пусть дан текст t и образец p . Требуется найти все вхождения образца p в текст t .

$t =$

a	a	b	a	a	b	a	b	a	a
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$p =$

a	b	a	a
---	---	---	---

$s =$

a	b	a	a	\$	a	a	b	a	a	b	a	b	a	a
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

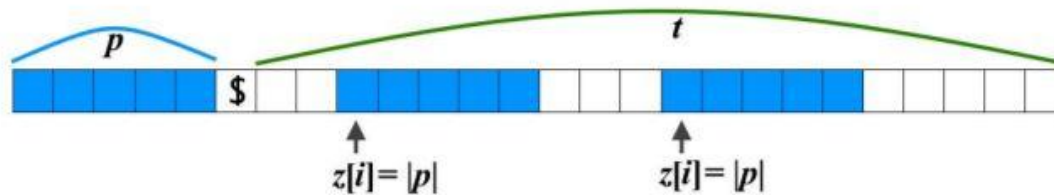
Найдем z -функцию строки s .

$s =$	a	b	a	a	\$	a	a	b	a	a	b	a	b	a	a
$z =$	0	0	1	1	0	1	4	0	1	3	0	4	0	1	1

Если $z[i]=|p|$, то подстрока длины $|p|$, которая начинается в i совпадает с первыми $|p|$ символами s , то есть она равна p . Следовательно, есть вхождение p в t с позиции $i-|p|-1$. Обратное тоже верно.

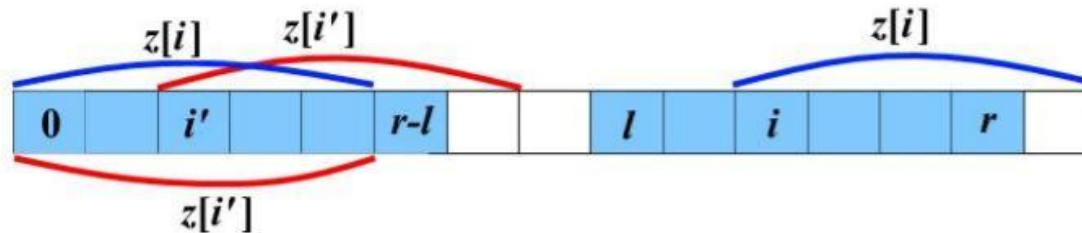
Z-функция: использования для поиска вхождений

Пусть дан текст t и образец p . Требуется найти все вхождения образца p в текст t .



1. Построим $s := p + '$' + t$
2. Найдем z -функцию строки s
3. $z[i] = |p|$ тогда и только тогда, когда в t есть вхождение p с позиции $i - |p| - 1$.

Z-алгоритм

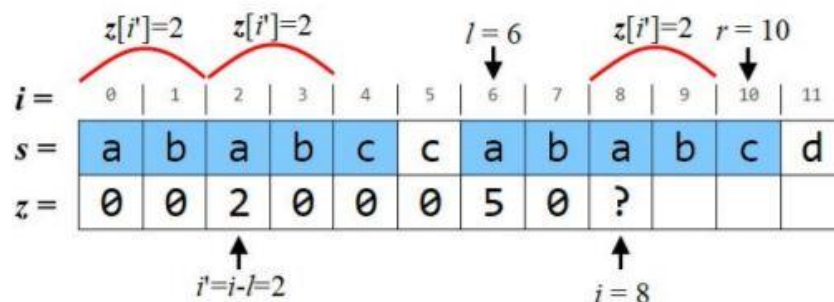


- Будем вычислять значение $z[i]$ слева направо, начиная с $i=1$.
- Будем поддерживать такие два индекса l и r , что $s[l..r]$ – это префикс строки s , а значение r – максимально.
- В частности, это означает, что $s[l]=s[0]$, $s[l+1]=s[1]$, ..., $s[i]=s[i-l]$, ..., $s[r]=s[r-l]$.
- Если $i \leq r$, то пусть $i'=i-l$, посмотрим на $z[i']$ – это значение поможет найти $z[i]$.
- По определению $z[i']$ верно: $s[0]=s[i']$, $s[1]=s[i'+1]$, ..., $s[z[i']-1]=s[i'+z[i']-1]$, но помним, что $s[i']=s[i]$, $s[i'+1]=s[i+1]$, ..., $s[r-l]=s[r]$. Следовательно, $s[0]=s[i]$, $s[1]=s[i+1]$, ... и так далее всего $\min(z[i'], r-i+1)$ раз. То есть $z[i]$ частично посчитана ($z[i] \geq \min(z[i'], r-i+1)$).

Z-алгоритм: случай 1.1

Предположим $i \leq r$, то есть i принадлежит $[l, r]$. Тогда $s[i]=s[i-l]$, $s[i+1]=s[i-l+1]$, ..., $s[r]=s[r-l]$.

Пусть $i'=i-l$ — в некотором смысле отражение символа i в обработанной ранее части строки.



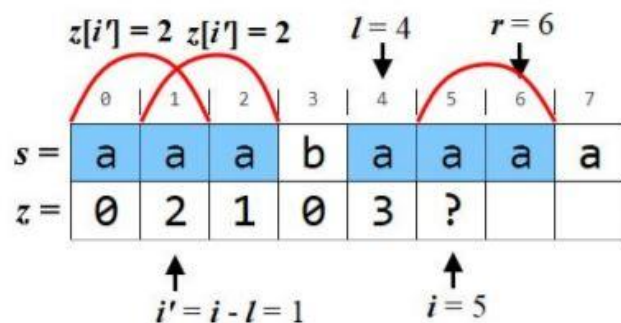
Тогда если значение $z[i']$ такое, что правая граница совпадения $i'+z[i']-1$ строго меньше $r-l$, то и начиная с символа i есть точно такое же совпадение, но нет совпадения длиннее. По определению $z[i']$ символы $s[z[i']]$ и $s[i'+z[i']]$ различаются (иначе $z[i']$ можно увеличить), но так как $s[i'+z[i']] = s[i+z[i']]$, то значит и различаются $s[z[i']]$ и $s[i+z[i']]$. Следовательно, значение $z[i]$ в точности равно $z[i']$.

Например, на рисунке $z[i]=2$. В самом деле, все все красные дуги обозначают одинаковые подстроки, $s[2] \neq s[4]$ (иначе $z[i']$ было бы 3). Однако так как $s[4]=s[10]$, то и $s[2] \neq s[10]$. Следовательно, $z[8]=z[2]=2$.

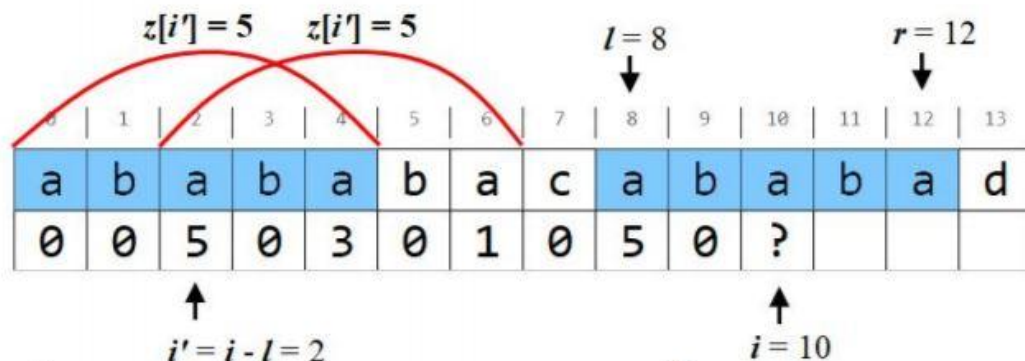
Z-алгоритм: случай 1.2

Предположим $i \leq r$, то есть i принадлежит $[l, r]$. Тогда $s[i]=s[i-l]$, $s[i+1]=s[i-l+1]$, ..., $s[r]=s[r-l]$.

Пусть $i'=i-l$ — в некотором смысле отражение символа i в обработанной ранее части строки.



На этом рисунке показано, что после $z[i]:=r-i+1$ значение $z[i]$ надо увеличить, чтобы оно стало корректным.



На этом рисунке показано, что иногда для $z[i]$ нельзя использовать $z[i']$, здесь $z[i']=5$, но $z[i]=3$.

Если значение $z[i']$ такое, что правая граница совпадения $i'+z[i']-1 \geq r-l$, то всё совпадение от $z[i']$ использовать нельзя, а только ту часть, что попала в префикс длины $r-l+1$ (голубую часть). Иными словами мы можем быть только уверенными, что $z[i] \geq r-l-i'+1 = r-l-(i-l)+1 = r-i+1$. Поэтому присвоим $z[i]:=r-l+1$ и потом попробуем увеличить (до корректного значения) наивным образом.

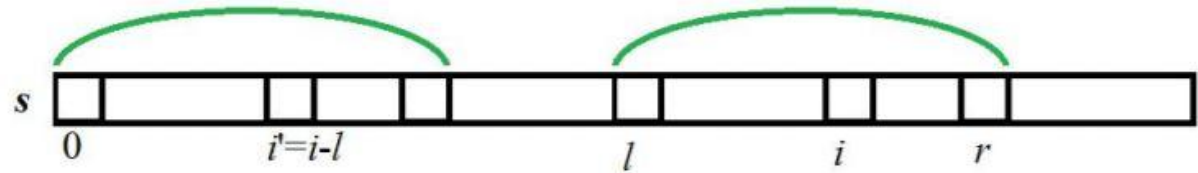
Z-алгоритм: случай 2

Предположим $i > r$, тогда предыдущие вычисленные значение z использовать нельзя.

$$s = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{0} & & & \mathbf{r-l} & & & \mathbf{l} & & & \mathbf{r} & & \mathbf{i} & \dots \\ \hline \end{array}$$

В этом случае будем увеличивать $z[i]$ начиная со значения 0 наивным образом (пока можно).

Z-алгоритм



- Будем вычислять значение $z[i]$ слева направо, начиная с $i=1$.
- Будем поддерживать такие два индекса l и r , что $s[l..r]$ – это префикс строки s , а значение r – максимально.
- В частности, это означает, что $s[l]=s[0], s[l+1]=s[1], \dots, s[i]=s[i-l], \dots, s[r]=s[r-l]$.
- Если $i \leq r$, то посмотрим на $z[i-l]$ – это значение поможет найти $z[i]$.
 - В самом деле подстроки длины $r-i+1$, которые начинаются в i и $i-l$ равны.
 - Если $z[i-l] < r-i+1$, то тогда и $z[i]=z[i-l]$. В этом случае значение $z[i]$ подсчитано.
 - Если $z[i-l] \geq r-i+1$, то $z[i]$ точно больше или равно $r-i+1$, то точное значение неизвестно. Наивным способом будем увеличивать $z[i]$ пока можно, получим точное значение.
- Если $i > r$, то доп. информации для $z[i]$ нет и будем вычислять $z[i]$ наивно.
- Заметим, что подстрока длины $s[i \dots i + z[i] - 1]$ совпадает с префиксом, пересчитаем l и r , если нужно (то есть, если $r < i + z[i] - 1$).

Z-function: Компактная реализация

```
49     vector<int> zFunction(vector<int> &s) {
50         int n = s.size();
51         vector<int> z(n);
52         for (int i = 1, l = 0, r = 0; i < n; ++i) {
53             if (i <= r)
54                 z[i] = min(r - i + 1, z[i - 1]);
55             while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]])
56                 ++z[i];
57             if (i + z[i] - 1 > r)
58                 l = i, r = i + z[i] - 1;
59         }
60         return z;
61     }
```