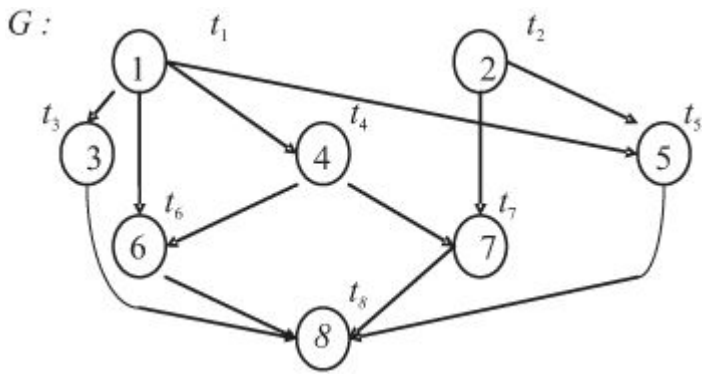
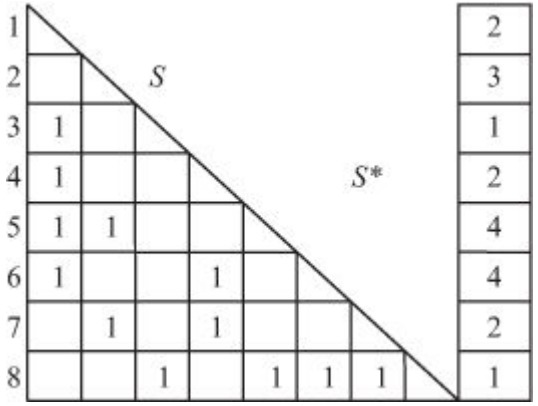
Лекция 5

Алгоритмы определения ПМВНР и ранних и поздних сроков выполнения операций

Алгоритм определения ПМВНР

Матрица следования





$S = A^T$, где A – матрица смежности.

Определение. Путь максимальной длины $T_{кр}$ в информационном графе G назовём **критическим**.

Внимание. Критических путей может быть несколько.

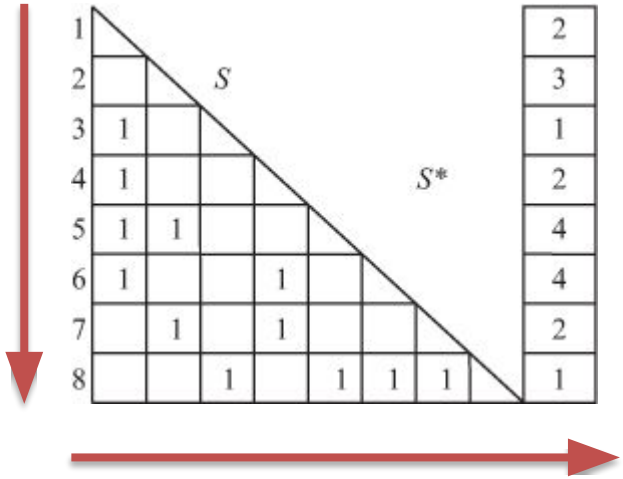
Определение. Пусть в G существуют прямые связи – ребра – (a, b), (b, c), но не существует прямой связи (a, c). Тогда связь (a, c) называется **транзитивной**.

Алгоритм 1 дополнения треугольной матрицы S транзитивными связями

1. Организуем просмотр сверху вниз строк матрицы следования S.

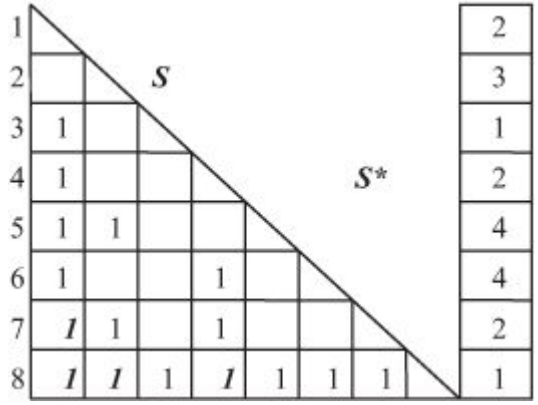
2. В очередной i-й строке организуем просмотр элементов в порядке увеличения j номеров столбцов.

3. Если (i, j)=1, складываем строки i и j по операции дизъюнкции.



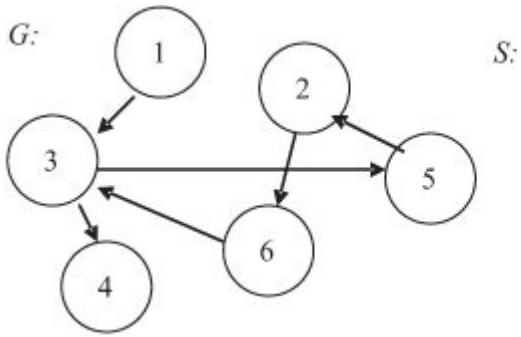
4. Если исходная матрица следования S **не треугольная**, последовательный просмотр её строк производится неоднократно до установления факта неизменности окончательно полученной матрицы.)

$\overline{S} =$



Определение контуров

Пусть задан граф G:



S:

1						
2					1	
3	1					1
4			1			
5			1			
6		1				

После первого шага преобразования S принимает вид:

1						
2			1		1	
3	1	1				1
4	1	1	1			1
5	1	1	1			1
6		1	1		1	

После второго шага преобразования S принимает вид:

1						
2	1	*1*	1		1	1
3	1	1	*1*		1	1
4	1	1	1		1	1
5	1	1	1		*1*	1
6	1	1	1		1	*1*

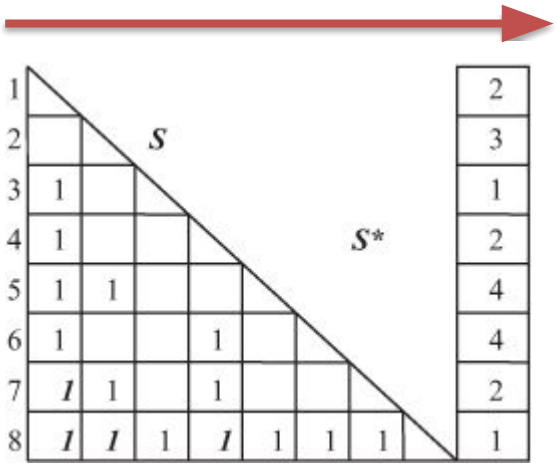
Контур:
2 → 6 → 3 → 5 →2

Полное множество взаимно независимых работ (ПМВНР)

Определение. Работы a и b будем называть взаимно независимыми, если в матрице следования S выполняется условие (a, b) = (b, a) = 0.

1. Организуем просмотр слева направо столбцов матрицы следования S.
2. В очередном j-м столбце организуем просмотр элементов в порядке увеличения i номеров строк, i>j. ПМВНР={j}.

Пример. Столбец 2. Просматриваем строки начиная с 2-й.

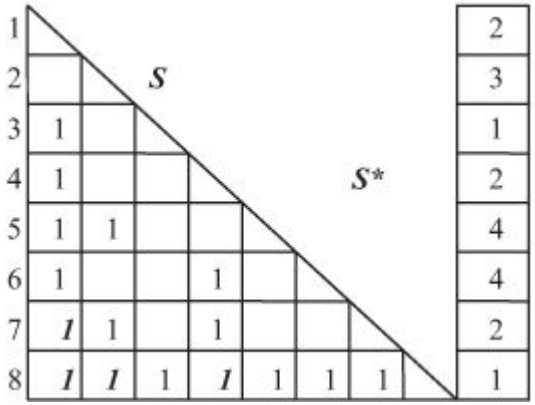


Определение. Работы {i}, i = 1, ... , n, образуют полное множество взаимно независимых работ (ПМВНР), если для любой работы k ∉ {i}, существует задающая или транзитивная связь (μ , k) = 1 или (k, ν) =1, μ, ν ∈ {i}, но между работами μ, ν ∈ {i} связей нет, т.е. (μ , ν) = 0

3. Работа {i} ∈ ПМВНР, если (i, k) = (k, i) = 0 для k ∈ ПМВНР.

Полное множество взаимно независимых работ (ПМВНР)

Порядок рассмотрения:
В столбце 2: нулевые элементы {2,3,4,6}
Т.к. (6,4)=1, то множество {2,3,4,6} разбивается на два:
{2,3,4}, {2,3,6}



В столбце 3: нулевые элементы {3,4,5,6,7}
Т.к. (6,4)=1, то множество {3,4,5,6,7}
разбивается на два: A1={3,4,5,7}, A2={3,5,6,7}
Т.к. (7,4)=1, то множество A1={3,4,5,7}
разбивается на два: A11={3,4,5}, A12={3,5,7}⊂A2,

Столбец 1. ПМВНР = {1, 2}
Столбец 2. ПМВНР = {2, 3, 4}, {2, 3, 6}
Столбец 3. ПМВНР = {3, 4, 5}, {3, 5, 6, 7}
~~Столбец 4. ПМВНР = {4, 5}~~
~~Столбец 5. ПМВНР = {5, 6, 7}~~
~~Столбец 6. ПМВНР = {6, 7}~~
~~Столбец 7. ПМВНР = {7}~~
Столбец 8. ПМВНР = {8}

Итого ПМВНР:
{1,2}, {2,3,4}, {3,4,5},
{2,3,6}, {3,5,6,7}, {8}.

Алгоритмы определения ранних и поздних сроков выполнения операций

Ранние и поздние сроки выполнения работ

Ранний срок τ_{1i} окончания выполнения работы – минимальный срок окончания выполнения работы.

Поздний срок $\tau_{2i}(T)$ окончания выполнения работы – максимальный срок окончания выполнения работы при ограничении на время выполнения алгоритма $T > T_{кр}$, где $T_{кр}$ – минимальное время выполнения алгоритма.

При $T = T_{кр}$ ранние сроки окончания выполнения работ, составляющих критические пути, совпадают с поздними сроками окончания их выполнения.

Алгоритм нахождения ранних сроков окончания выполнения работ

1. Полагаем первоначально $\boldsymbol{\tau_{11} = \tau_{12} = \ldots = \tau_{1m} = 0}$.
2. Производя циклический обзор строк матрицы следования S, находим очередную из необработанных строк. Если все строки обработаны, выполнение алгоритма заканчивается.
3. Пусть j — номер найденной необработанной строки. Если j-я строка не содержит единичных элементов, полагаем $\boldsymbol{\tau_{1j} = t_j}$. Переходим к выполнению шага 6.
4. Если j-я строка содержит единичные элементы, выбираем элементы множества $\{\tau_{11}, \ldots, \tau_{1m}\}$, соответствующие номерам единичных элементов j-й строки.

Если все выбранные таким образом элементы, образующие множество $\{\tau_{1j(\nu)}\}$, $\nu = 1, \ldots, k_j$, отличны от нуля, полагаем $\boldsymbol{\tau_1 j = \max \tau_{1\,j\nu} + t_j}$.

Если хотя бы один из выбранных элементов нулевой (соответствующий ранний срок ещё не найден), выполняем шаг 2.

Обработанную j-ю строку метим, чтобы исключить её повторную обработку.

Переходим к выполнению шага 2.

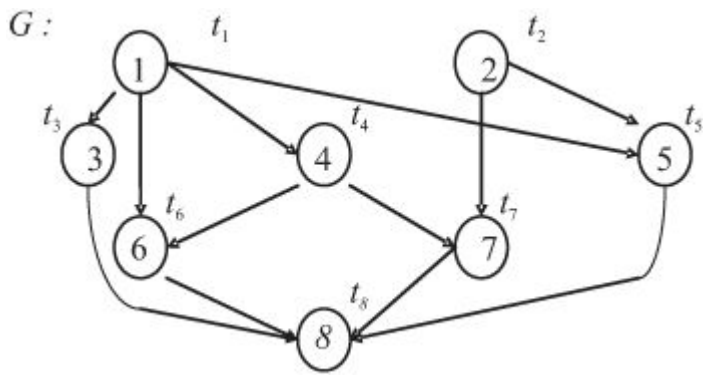
Примечания

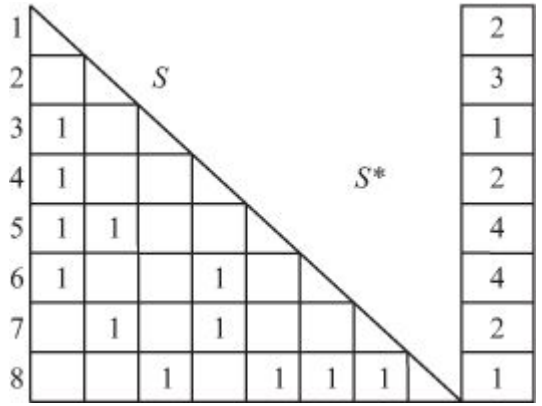
Если граф G не содержит контуров, зацикливание при этом невозможно.

Если матрица S треугольная, то никогда не складываются условия для многократного циклического обзора строк. Тогда ранние сроки окончания выполнения работ находятся за один последовательный просмотр строк матрицы S.

$T_{кр} = \max \{\tau_{11}, \ldots, \tau_{1m}\}$.

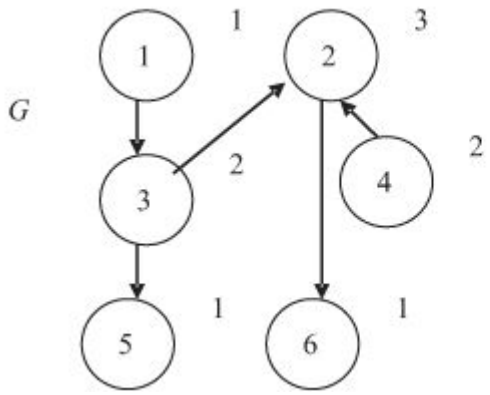
Пример:

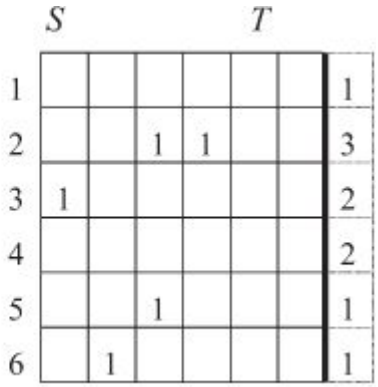




$\tau_{11} = t_1 = 2$, $\tau_{12} = t_2 = 3$, $\tau_{13} = \tau_{11} + t_3 = 3$, $\tau_{14} = \tau_{11} + t_4 = 4$, $\tau_{15} = \max \{\tau_{11}, \tau_{12}\} + t_5 = 7$, $\tau_{16} = \max \{\tau_{11}, \tau_{14}\} + t_6 = 8$, $\tau_{17} = \max \{\tau_{12}, \tau_{14}\} + t_7 = 6$, $\tau_{18} = \max \{\tau_{13}, \tau_{15}, \tau_{16}, \tau_{17}\} + t_8 = 9$; $T_{кр} = 9$.

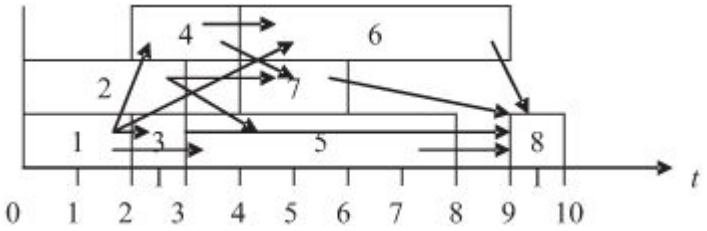
Приме
р





$\tau_{11} = 1,$
$\tau_{13} = \tau_{11} + t_3 = 3,$
$\tau_{14} = 2,$
$\tau_{15} = \tau_{13} + t_5 = 4,$
$\tau_{12} = \max\{\tau_{13}, \tau_{14}\} + t_2 = 6,$
$\tau_{16} = \tau_{12} + t_6 = 7.$
$T_{кр} = 7.$

Временная диаграмма выполнения работ при ранних сроках окончания:



Алгоритм нахождения поздних сроков окончания выполнения работ при заданном значении T

1. Полагаем первоначально $\boldsymbol{\tau_{21}(T) = ... = \tau_{2m}(T) = 0.}$
2. Производя циклический обзор справа налево столбцов матрицы S, находим очередной из не обработанных ещё столбцов. Если все столбцы обработаны, выполнение алгоритма заканчивается.

3. Пусть j — номер найденного необработанного столбца. Если j-й столбец не содержит единичных элементов, полагаем $\boldsymbol{\tau_{2j}(T) = T.}$ Переходим к выполнению шага 6.

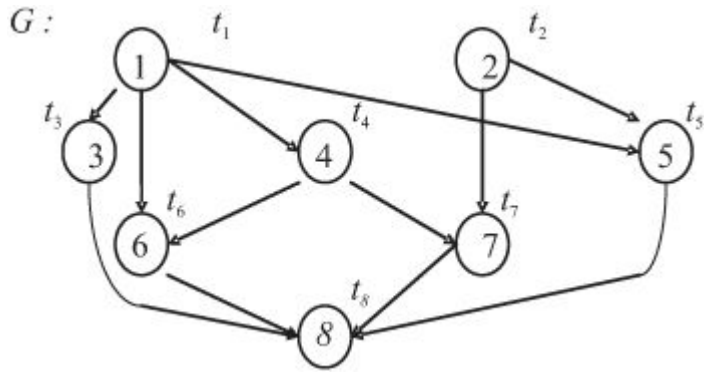
4. Если j-й столбец содержит единичные элементы, выбираем элементы множества $\{ \tau_{21}(T) , ... ,\tau_{2m}(T) \}$, соответствующие номерам единичных элементов j-го столбца.

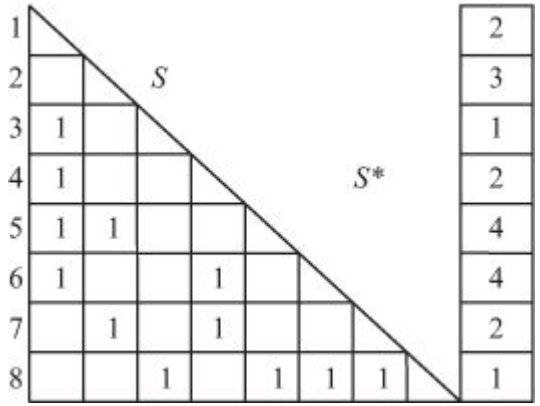
5. Если все выбранные таким образом элементы $\{\tau_{2jv}\}(T)\} \subset \{\tau_{21}(T), ... , \tau_{2m}(T)\}$, $v = 1 , ... , k_j$, отличны от нуля, полагаем
$$\boldsymbol{\tau_{2j} (T) = \min \{\tau_{2jv} (T) - t_{jv} \}.}$$
В противном случае выполняем шаг 2.

6. Обработанный j-й столбец метим с целью исключения его повторной обработки. Переходим к выполнению шага 2.

Пример 1

Для T = 10:

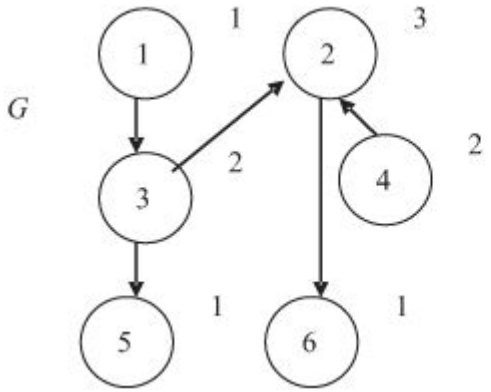




$\tau_{28}(10) = 10,$
$\tau_{27}(10) = \tau_{28}(10) - t_8 = 9,$
$\tau_{26}(10) = \tau_{28}(10) - t_8 = 9,$
$\tau_{25}(10) = \tau_{28}(10) - t_8 = 9,$
$\tau_{24} = \min \{\tau_{26}(10), - t_6, \tau_{27}(10) - t_7\} = 5,$
$\tau_{23}(10) = \tau_{28}(10) - t_8 = 9,$
$\tau_{22}(10) = \min \{\tau_{25}(10) - t_5, \tau_{27}(10) - t_7\} = 5,$
$\tau_{21}(10) = \min \{\tau_{23}(10) - t_3, \tau_{24}(10) - t_4, \tau_{25}(10) - t_5, \tau_{26}(10) - t_6\} = 3.$

Пример 2

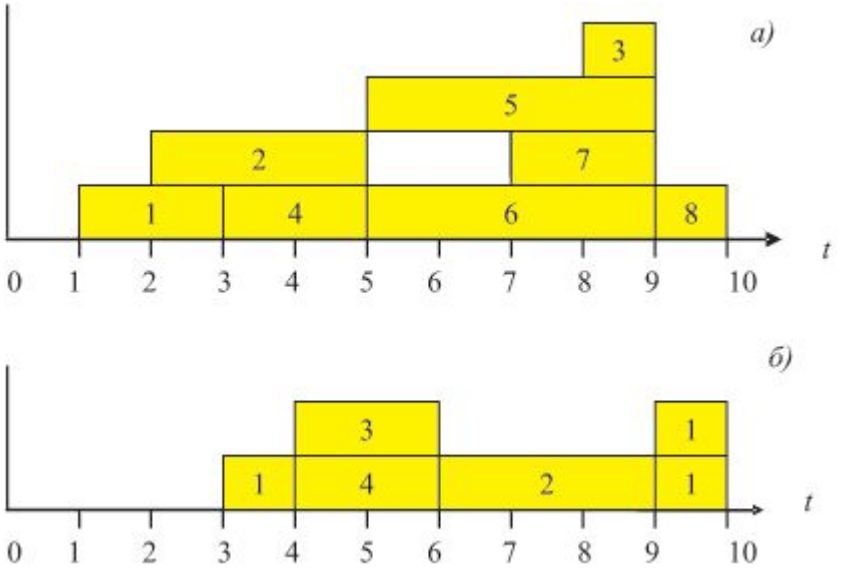
Для T = 10:



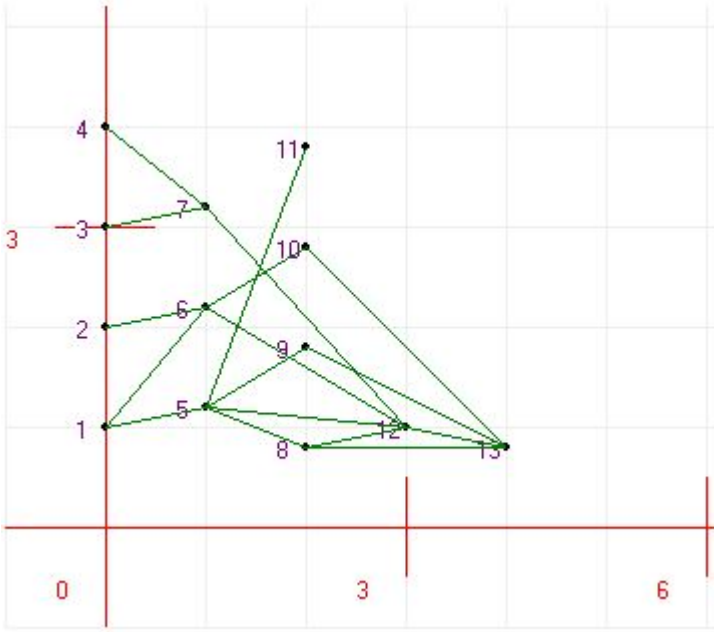
	S					T	
1							1
2			1	1			3
3	1						2
4							2
5			1				1
6		1					1

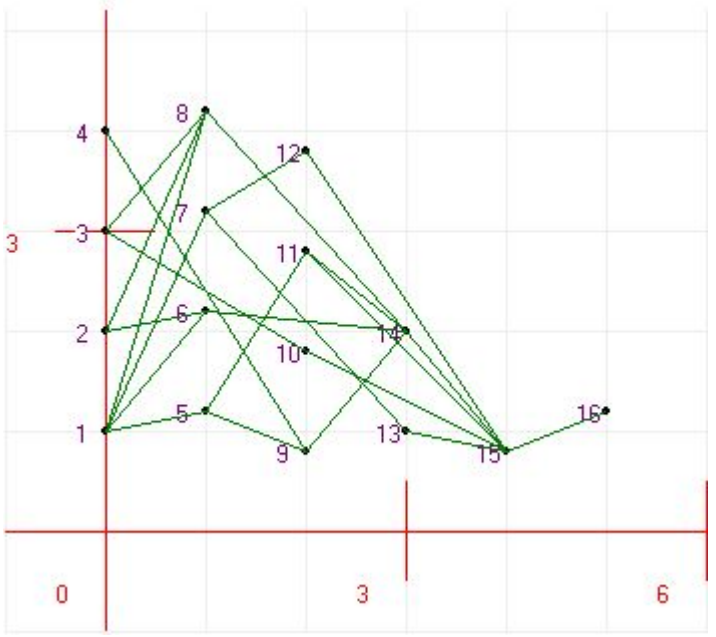
$\tau_{26}(10) = \tau_{25}(10) = 10.$
$\tau_{22}(10) = \tau_{26}(10) - t_6 = 9.$
$\tau_{24}(10) = \tau_{22}(10) - t_2 = 6.$
$\tau_{23}(10) = \min \{\tau_{22}(10) - t_2, \tau_{25}(10) - t_5\} = 6.$
$\tau_{21}(10) = \tau_{23}(10) - t_3 = 4.$

Диаграммы выполнения работ при поздних сроках окончания в примерах 1 и 2.



Самостоятельная работа





$t_1=1, t_2=2, t_3=1, t_4=3, t_5=2, t_6=5, t_7=2, t_8=2, t_9=1, t_{10}=6, t_{11}=1, t_{12}=2, t_{13}=4.$ $T = T_{кр} + 2$

$t_1=4, t_2=1, t_3=3, t_4=3, t_5=1, t_6=4, t_7=6, t_8=2, t_9=5, t_{10}=1, t_{11}=1, t_{12}=2, t_{13}=4, t_{14}=2, t_{15}=1, t_{16}=2.$ $T = T_{кр} + 3$

1. Найдите ранние и поздние сроки выполнения работ.
2. Постройте диаграммы по ранним и поздним срокам выполнения работ

Алгоритмы поиска наименьших ресурсов: процессов и времени

Плотность загрузки вычислительной системы

Пусть τ_j — произвольное значение момента окончания выполнения j-й работы:

$$\tau_{1j} \le \tau_j \le \tau_{2j}(T) \; (\tau_j \in [\tau_{1j}, \tau_{2j}(T)]) \quad , j = 1, \ldots, m,$$

Меняя значения $\{\tau_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, но соблюдая при этом порядок следования работ, мы получим множество допустимых расписаний выполнения работ.

Определение. Функция

где:

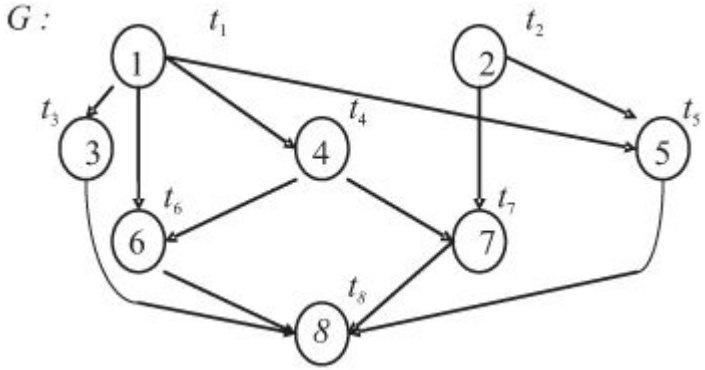
$$F(\tau_1, \tau_2 \tau_m, t) = \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j, t),$$

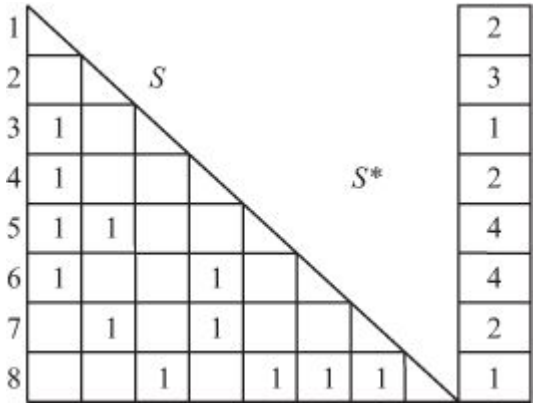
$$f(\tau_j, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \lfloor \tau_j - t_j, \tau_j \rfloor \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases},$$

называется **плотностью загрузки**, найденной для значений $\tau_1, \ldots, \tau_m$

Для заданных $\tau_1, \ldots, \tau_m$ значение функции F в каждый момент времени t совпадает с числом **одновременно** (параллельно) выполняющихся в этот момент работ.

Приме
р

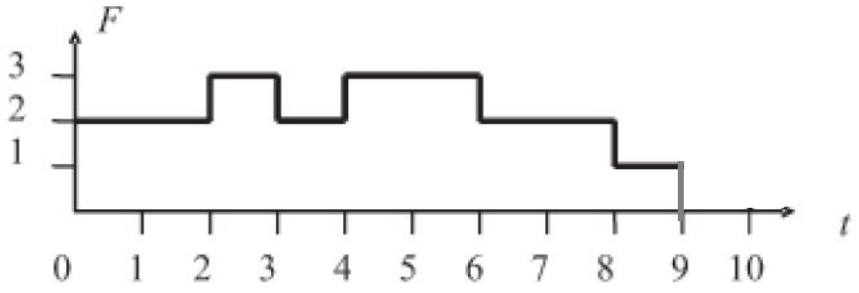




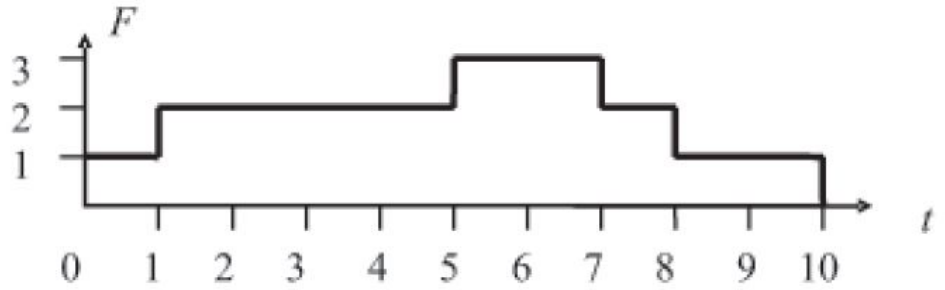
$\tau_{11} = 2,$ $\tau_{21} = 3,$
$\tau_{12} = 3,$ $\tau_{22} = 5,$
$\tau_{13} = 3,$ $\tau_{23} = 9,$
$\tau_{14} = 4,$ $\tau_{24} = 5,$
$\tau_{15} = 7,$ $\tau_{25} = 9,$
$\tau_{16} = 8,$ $\tau_{26} = 9,$
$\tau_{17} = 6,$ $\tau_{27} = 9,$
$\tau_{18} = 9;$ $\tau_{28} = 10,$
$T_{кр} = 9.$
$T = 10.$

$$F(\tau_1, \tau_2 \tau_m, t) = \sum_{j=1}^{m} f(\tau_j, t), \qquad f(\tau_j, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \lfloor \tau_j - t_j, \tau_j \rfloor \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

F(2, 3, 3, 4, 7, 8, 6, 9, t):



F(2, 4, 3, 4, 8, 9, 7, 10, t):

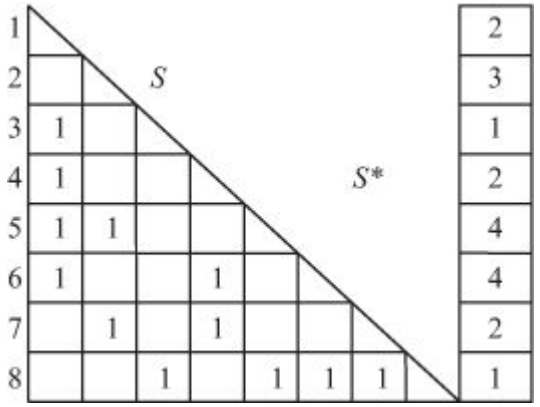


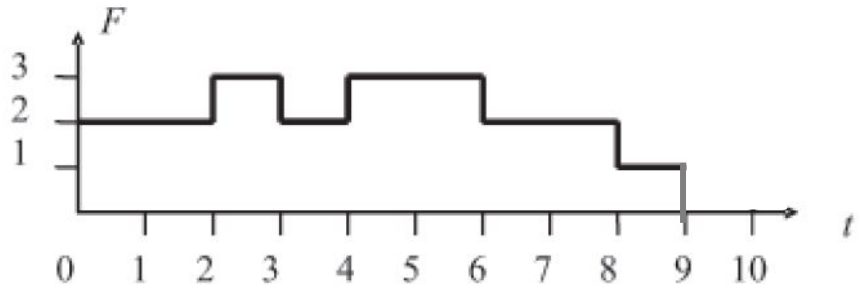
Приме
р

j		Промежуточное значение								
		0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
1	[0,2]	x	x							
2	[0,3]	x	x	x						
3	[2,3]			x						
4	[2,4]			x	x					
5	[3,7]				x	x	x	x		
6	[4,8]					x	x	x	x	
7	[4,6]					x	x			
9	[8,9]									x
Итого		**2**	**2**	**3**	**2**	**3**	**3**	**2**	**1**	**1**

$$f(\tau_j, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [\tau_j - t_j, \tau_j] \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

F(2, 3, 3, 4, 7, 8, 6, 9, t)





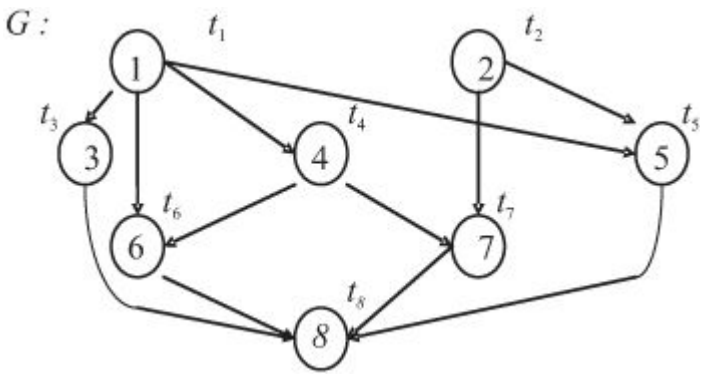
Максимальная ширина графа

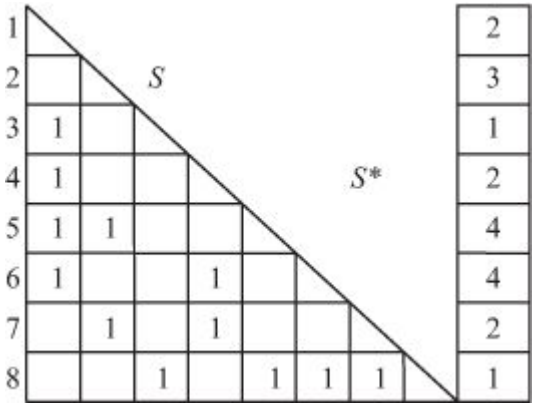
Дано:
граф G,
L – число ПМВНР,
r_i – число работ, образующих i-е полное множество;
i = 1 , ... , L,
Пусть **R = max {r1 , ... , rl}**
Тогда:

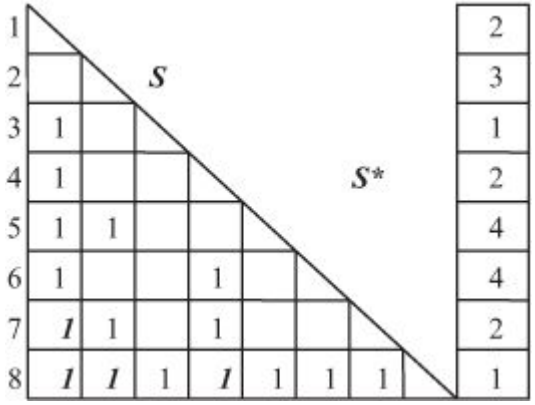
$$R = \max_{\tau_1, \tau_2 \tau_m} F(\tau_1, \ldots \tau_m, t)$$

Лемма. Минимальное число n процессоров одинаковой специализации и производительности (т.е. в однородной ВС), способных выполнить данный алгоритм за время $T >= T_{кр}$, не превышает $R = \max \{r_1 , ... , r_l \}$,
где r_i , i = 1 , ... , L, — число работ, входящих в i -е ПМВНР, которое составлено по взвешенному графу G, соответствующему этому алгоритму.

Приме
р

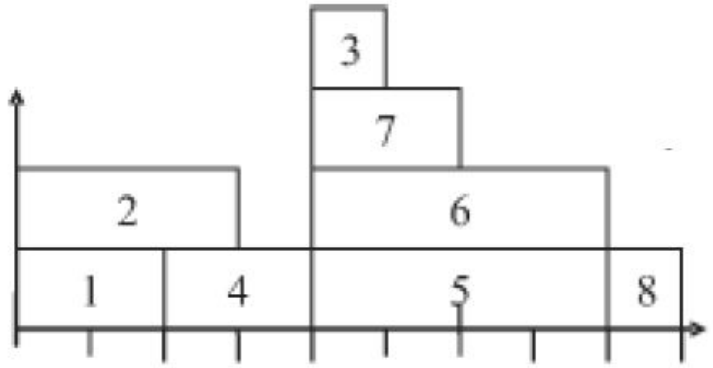


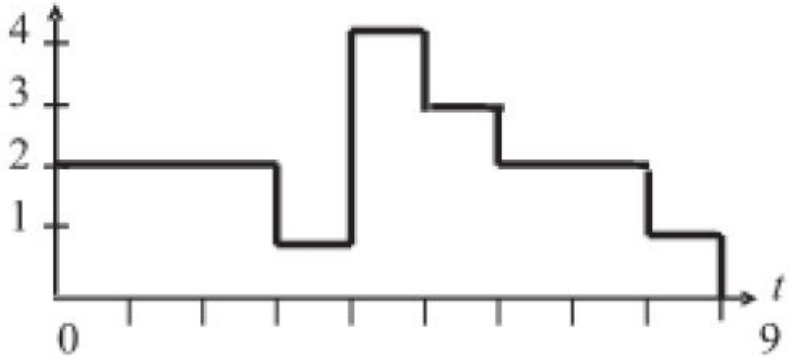




ПМВНР:
{1,2}, {2,3,4}, {3,4,5},
{2,3,6}, **{3,5,6,7},** {8}.

Существует допустимое расписание, например, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 5$, $\tau_4 = 4$, $\tau_5 = 8$, $\tau_6 = 8$, $\tau_7 = 6$, $\tau_8 = 9$ такое, при котором максимальное значение плотности загрузки F равно четырём





Загрузка отрезка для допустимого расписания

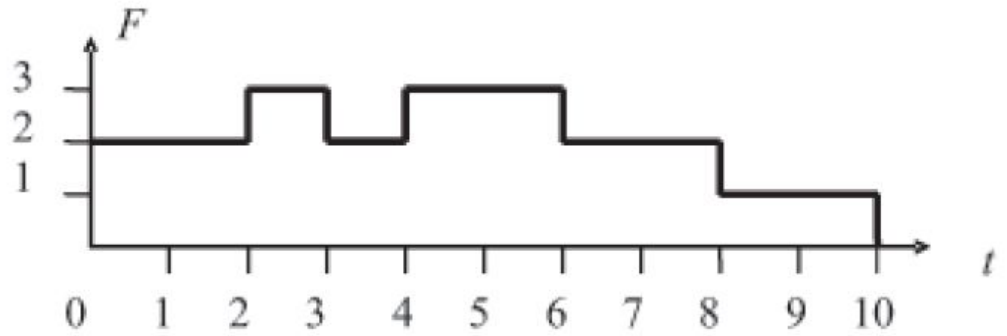
Определение. Функция

$$\Phi(\tau_1 \tau_m, \theta_1, \theta_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\tau_1 \tau_m, t)dt$$

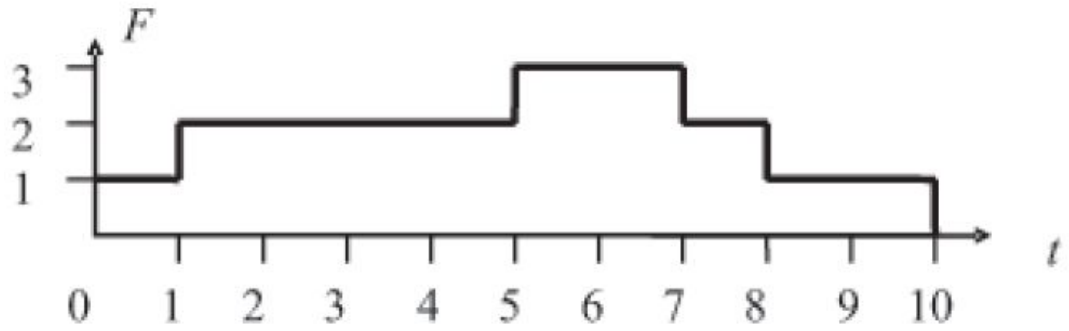
называется загрузкой отрезка $[\theta_1, \theta_2] \subset [0,T]$ для заданного допустимого расписания $\tau_1, \ldots, \tau_m$.

*Функция Ф определяет **объём работ (суммарное время их выполнения)** на фиксированном отрезке их выполнения при заданном допустимом расписании.*

Пример



Для отрезка времени $[0, 4] \subset [0, 10]$:
$\Phi = 9$



Для отрезка времени $[1, 3]$:
$\Phi = 4$

Для отрезка времени $[2, 5]$:
$\Phi = 6$

Минимальные оценки работ и вычислительных ресурсов

Определение.
Функция

$$\varphi^{(T)}(\theta_1, \theta_2) = \min_{\tau_1 \tau_m} \Phi(\tau_1 \tau_m, \theta_1, \theta_2)$$

называется минимальной загрузкой отрезка $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, T]$.

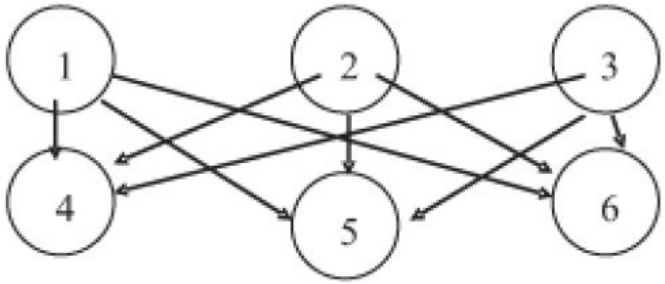
*Функция $\phi^{(T)}$ определяет **минимально возможный объём работ**, который при данном T и при различных допустимых значениях (расписаниях) $\tau_1, \ldots, \tau_m$ должен быть выполнен на отрезке времени $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, T]$.*

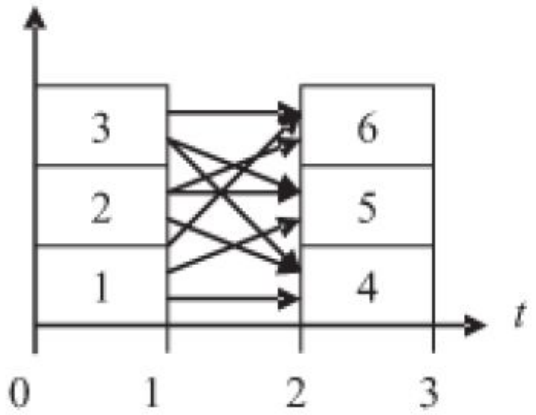
Теорема 1. Для того чтобы T было наименьшим временем выполнения данного алгоритма на однородной вычислительной системе, состоящей из n процессоров, либо чтобы n процессоров было достаточным для выполнения данного алгоритма за время T, необходимо, чтобы для данного отрезка времени $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, T]$ выполнялось соотношение:

$$\varphi^{(T)}(\theta_1, \theta_2) \leq n(\theta_2 - \theta_1)$$

Приме
р

Пусть T=3.





Из теоремы имеем:

$$\varphi^{(T)}(\theta_1, \theta_2) \leq n(\theta_2 - \theta_1)$$

Откуда получаем общее соотношение:

$$n \geq \frac{\varphi^{(T)}(\theta_1, \theta_2)}{\theta_2 - \theta_1}$$

Для получения полной оценки надо перебрать все отрезки $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, T]$ и найти:

$$\max_{[\theta_1, \theta_2] \subset [0, T]} \frac{\varphi^{(T)}(\theta_1, \theta_2)}{\theta_2 - \theta_1}$$

Продолжение примера

$$n \geq \max_{[\theta_1,\theta_2]\subset[0,T]} \frac{\varphi^{(T)}(\theta_1,\theta_2)}{\theta_2-\theta_1} \qquad (*)$$

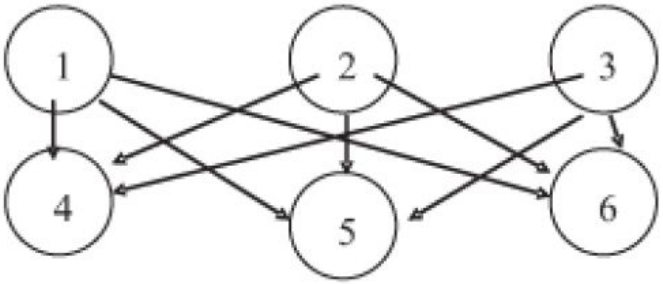
Проанализируем все возможные отрезки $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, 3]$:

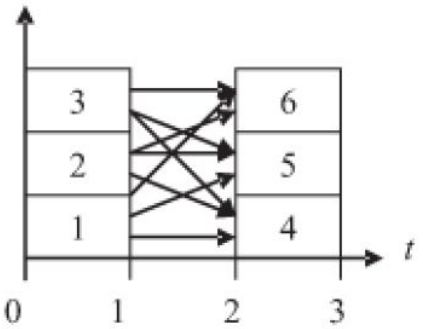
$\phi^{(3)}(0, 1) = \phi^{(3)}(1, 2) = \phi^{(3)}(2, 3) = 0,$

$\phi^{(3)}(0, 2) = \phi^{(3)}(1, 3) = 3,$

$\phi^{(3)}(0, 3) = 6.$

Минимальное n, удовлетворяющее условию (*): n = 2.





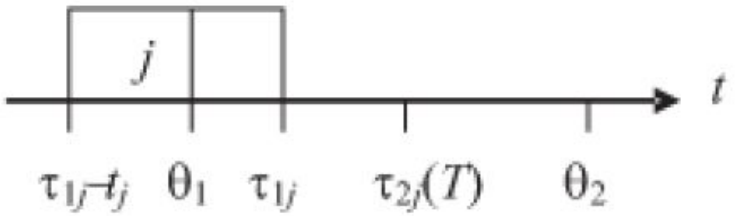
Но за время T=3 минимально достаточное число процессоров n = 3.

Условный объём части работы j на отрезке времени [θ1, θ2]

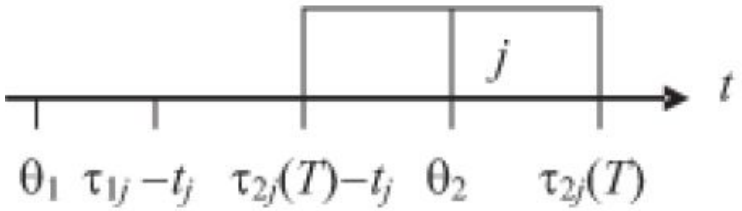
Определим функцию:

$$\xi(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

1) Значение $\xi(\tau 1_j - \theta 1)$ характеризует условный объём части работы j на отрезке времени [θ1, θ2] при условии $\tau 1_j - t_j \leq \theta 1$ и при максимальном смещении времени выполнения работы j влево.

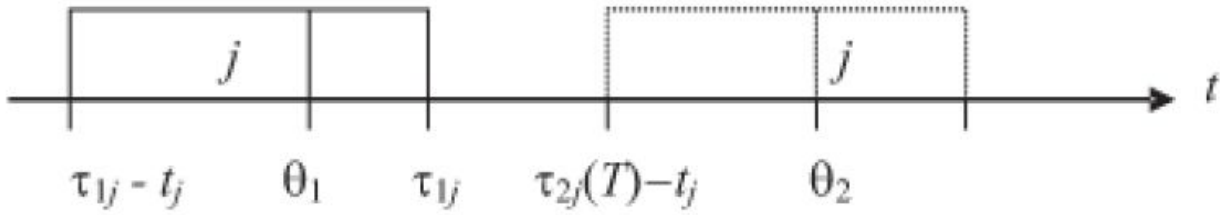


2) Значение $\xi(\theta 2 - \tau 2_j(T) + t_j)$ характеризует аналогичный объём работы j при максимальном смещении времени выполнения работы j вправо.



Условный объём части работы j на отрезке времени [θ1, θ2]

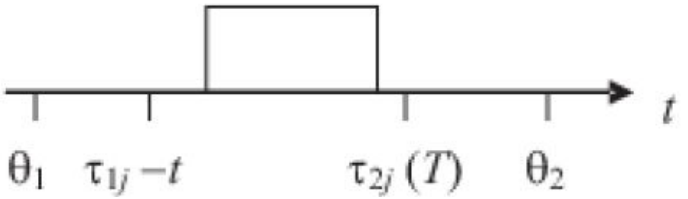
Если для работы j оба указанных выше значения функции ξ отличны от нуля, но не превышают значение t_j и θ2 - θ1, то максимально разгрузить отрезок [θ1, θ2] от работы j можно смещением времени его выполнения в сторону, обеспечивающую меньшее из двух указанных выше значений ξ



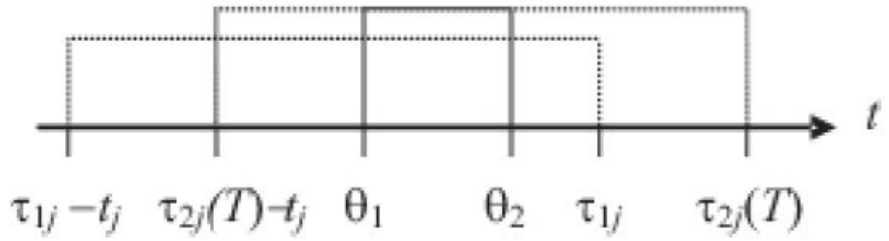
Условный объём части работы j на отрезке времени [θ1, θ2]

Два случая, когда работа j не может быть хотя бы частично смещена с отрезка [θ1, θ2] :

а) $\theta_1 \le \tau_{1j} - t_j < \tau_{2j}(T) \le \theta_2$, в этом случае $t_j \le \theta_2 - \theta_1$ и объём работы j, выполняемой на отрезке, совпадает с объёмом t_j всей этой работы;



б) $\tau_{1j} \ge \theta_2 \wedge \tau_{2j}(T) - t_j \le \theta_1$, в этом случае очевидно, что $t_j \ge \theta_2 - \theta_1$ и объём части работы j, выполняемой на отрезке [θ1, θ2] совпадает со значением θ2 - θ1.



Алгоритм нахождения значения функции $\phi^{(T)}(\theta 1, \theta 2)$.

1. Предполагаем, что для каждой работы $j = 1, \dots, m$, известны значения t_j, $\tau 1_j$, $\tau 2_j(T)$. Полагаем равным нулю значение переменной ϕ.

2. Организуем последовательный анализ работ $j = 1, \dots, m$.

3. Для каждой работы j полагаем

$$\phi := \phi + \min \{\xi (\tau 1_j - \theta 1), \xi(\theta 2 - \tau 2_j(T) + t_j), t_j, \theta 2 - \theta 1\}.$$

После перебора всех работ $\phi = \phi^{(T)}(\theta 1, \theta 2)$.

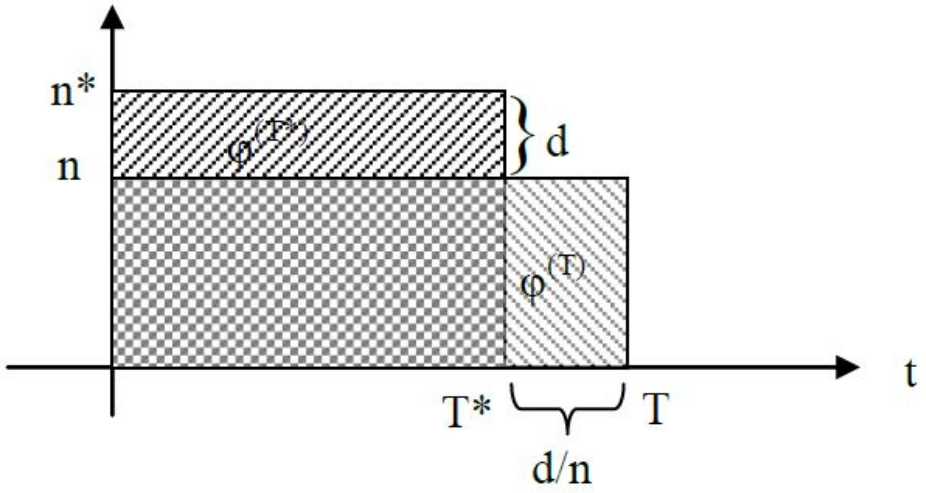
Алгоритм нахождения значения функции $\phi^{(T)}(\theta 1, \theta 2)$.

Теорема 2. Пусть заданный алгоритм выполняется на ВС, состоящей из n* процессоров, и T* — текущее значение оценки снизу времени выполнения алгоритма. Пусть на отрезке времени $[\theta 1, \theta 2] \in [0, T^*]$ выполняется соотношение:

$$\phi^{(T^*)}(\theta 1,\theta 2) - n(\theta 2 - \theta 1) = d > 0.$$

Тогда минимальное время T выполнения алгоритма на n процессорах удовлетворяет соотношению:

$$T \geq T^* + \frac{d}{n}$$



Нижняя оценка минимального числа процессоров, необходимого для выполнения алгоритма за заданное время

1. Первоначально полагаем n = 0

2. Организуем перебор всех отрезков [θ1, θ2] [0, T] в порядке

$$[0,1];$$
$$[0,2];\ [1,2];$$
$$[0,3];\ [1,3];\ [2,3];$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[0,T];\ [1,T];\ \ldots,\ [T-1,T]$$

3. Для очередного анализируемого отрезка времени [θ1, θ2] находим значение

$$n' = \left\lceil \frac{\varphi^{(T^*)}(\theta_1,\theta_2)}{\theta_2-\theta_1} \right\rceil$$

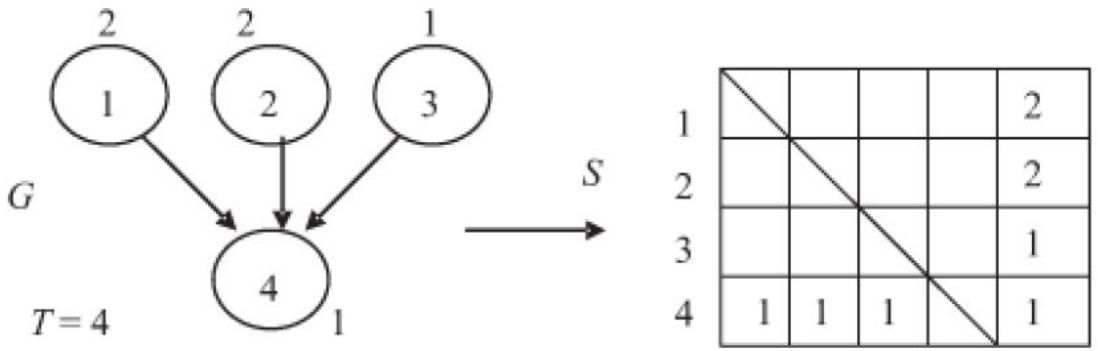
4. Если n' > n, выполняем операцию n := n'.

После перебора всех отрезков окажется найденным значение n, которое равно максимальному из значений, удовлетворяющих условию:

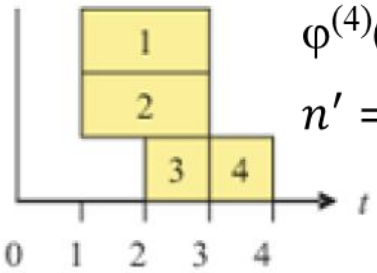
$$T \geq T^* + \frac{d}{n}$$

Пример

Задача: Найти $\phi^{(4)}(\theta_1,\theta_2)$ и n'.

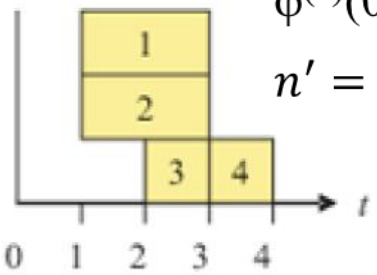


$\varphi[\theta_1,\theta_2]$	Номер узла j	τ_{1j}	τ_{2j}	$\tau_{1j}-\theta_1$	$\theta_2-\tau_{2j}+t_j$	t_j	$\theta_2-\theta_1$	*min*
$\varphi[0,1]$	1	2	3	2-0	1-3+2	2	1	0
	2	2	3	2-0	1-3+2	2	1	0
	3	1	3	1-0	1-3+1	1	1	0
	4	3	4	3-0	1-4+1	1	1	0
	Итог $\varphi^{(4)}[0,1]=\Sigma min=0+0+0+0=0$							
$\varphi[0,2]$	1	2	3	2-0	2-3+2	2	2	1
	2	2	3	2-0	2-3+2	2	2	1
	3	1	3	1-0	2-3+1	1	2	0
	4	3	4	3-0	2-4+1	1	2	0
	Итог $\varphi^{(4)}[0,2]=\Sigma min=1+1+0+0=2$							



$\varphi^{(4)}(0,1)=0$

$n' = \frac{\varphi^{(4)}(0,1)}{1-0}=0$

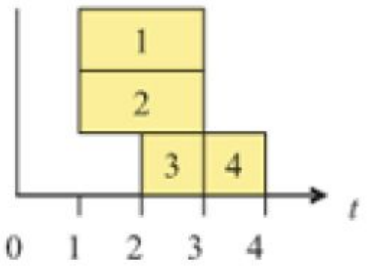


$\varphi^{(4)}(0,2)=2$

$n' = \frac{\varphi^{(4)}(0,2)}{2-0}=1$

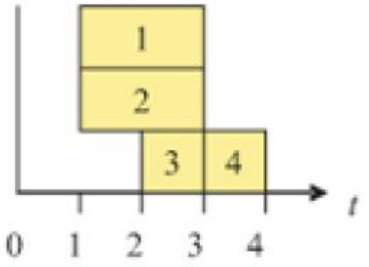
Пример

φ[1,2]	1	2	3	2-1	2-3+2	2	1	1
	2	2	3	2-1	2-3+2	2	1	1
	3	1	3	1-1	2-3+1	1	1	0
	4	3	4	3-1	2-4+1	1	1	0
	Итог $\varphi^{(4)}[1,2]=\Sigma min=1+1+0+0=2$							



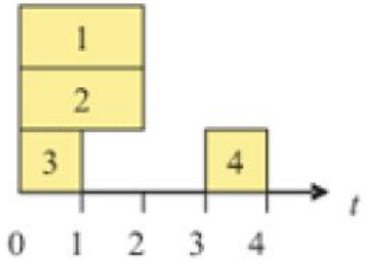
$\varphi^{(4)}(1,2) = 2$
$n' = 2$

φ[0,3]	1	2	3	2-0	3-3+2	2	3	2
	2	2	3	2-0	3-3+2	2	3	2
	3	1	3	1-0	3-3+1	1	3	1
	4	3	4	3-0	3-4+1	1	3	0
	Итог $\varphi^{(4)}[0,3]=\Sigma min=2+2+1+0=5$							



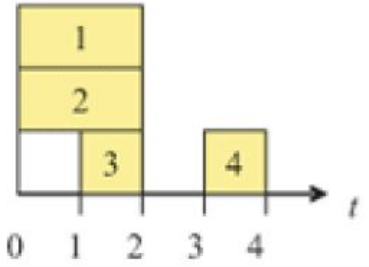
$\varphi^{(4)}(0,3) = 5$
$n' = 2$

φ[1,3]	1	2	3	2-1	3-3+2	2	2	1
	2	2	3	2-1	3-3+2	2	2	1
	3	1	3	1-1	3-3+1	1	2	0
	4	3	4	3-1	3-4+1	1	2	0
	Итог $\varphi^{(4)}[1,3]=\Sigma min=1+1+0+0=2$							



$\varphi^{(4)}(1,3) = 2$
$n' = 1$

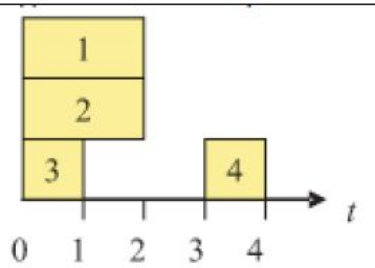
φ[2,3]	1	2	3	2-2	3-3+2	2	1	0
	2	2	3	2-2	3-3+2	2	1	0
	3	1	3	1-2	3-3+1	1	1	0
	4	3	4	3-2	3-4+1	1	1	0
	Итог $\varphi^{(4)}[2,3]=\Sigma min=0+0+0+0=0$							



$\varphi^{(4)}(2,3) = 0$
$n' = 0$

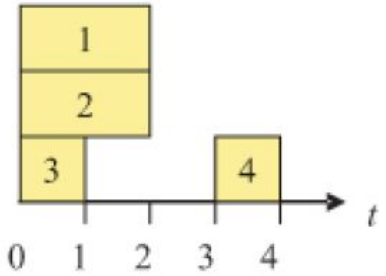
Пример

φ[0,4]	1	2	3	2-0	4-3+2	2	4	2
	2	2	3	2-0	4-3+2	2	4	2
	3	1	3	1-0	4-3+1	1	4	1
	4	3	4	3-0	4-4+1	1	4	1
	Итог $\varphi^{(4)}[0,4]=\Sigma min=2+2+1+1=6$							



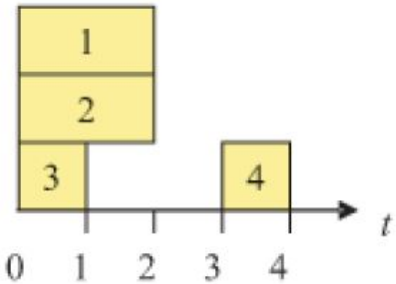
$\varphi^{(4)}(0,4) = 6$
$n' = 2$

φ[1,4]	1	2	3	2-1	4-3+2	2	3	1
	2	2	3	2-1	4-3+2	2	3	1
	3	1	3	1-1	4-3+1	1	3	0
	4	3	4	3-1	4-4+1	1	3	1
	Итог $\varphi^{(4)}[1,4]=\Sigma min=1+1+0+1=3$							



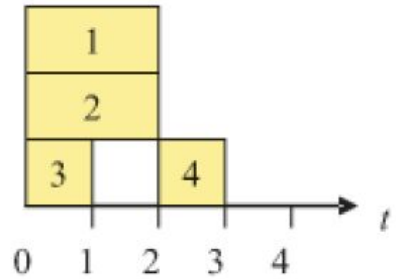
$\varphi^{(4)}(1,4) = 3$
$n' = 1$

φ[2,4]	1	2	3	2-2	4-3+2	2	2	0
	2	2	3	2-2	4-3+2	2	2	0
	3	1	3	1-2	4-3+1	1	2	0
	4	3	4	3-2	4-4+1	1	2	1
	Итог $\varphi^{(4)}[2,4]=\Sigma min=0+0+0+1=1$							



$\varphi^{(4)}(2,4) = 1$
$n' = 1$

φ[3,4]	1	2	3	2-3	4-3+2	2	1	0
	2	2	3	2-3	4-3+2	2	1	0
	3	1	3	1-3	4-3+1	1	1	0
	4	3	4	3-3	4-4+1	1	1	0
	Итог $\varphi^{(4)}[3,4]=\Sigma min=0+0+0+0=0$							



$\varphi^{(4)}(3,4) = 0$
$n' = 0$

$n = \max n' = 2.$

Нижняя оценка минимального времени выполнения данного алгоритма на ВС

1. Первоначально полагаем:

$$T = \max\left\{ \left]\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} t_j\right[, T_{\text{кр}} \right\}$$

2. Организуем перебор всех отрезков $[\theta_1, \theta_2]$ $[0, T]$ в той же последовательности, что и в предыдущем алгоритме.
3. Для очередного анализируемого отрезка времени $[\theta_1, \theta_2]$ находим значение:

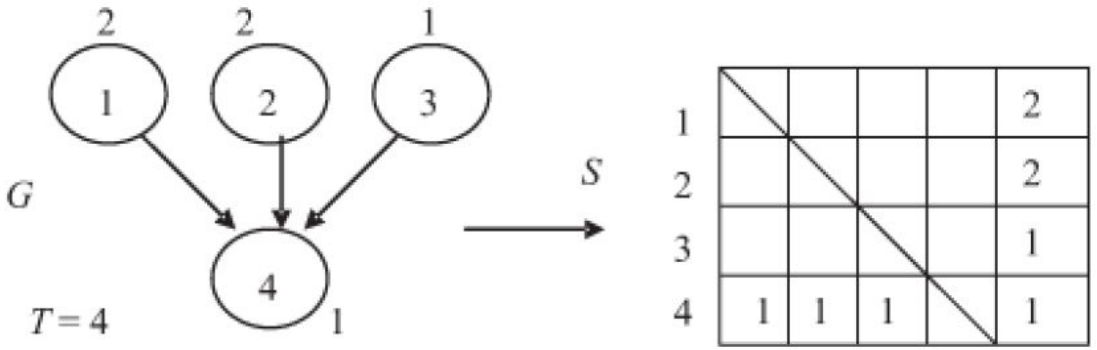
$$d = \Phi^{(T)}(\theta_1,\theta_2) - n(\theta_2 - \theta_1)$$

4. Если $d > 0$, выполняем операцию $T := T + \left] d/n \right[$.
5. Полагаем $\tau_{2j}(T) := \tau_{2j}(T) + \left] d/n \right[$, $j = 1, \ldots, m$.

После перебора всех отрезков $[\theta_1, \theta_2]$ окажется найденным окончательное значение T — нижняя оценка минимального времени выполнения данного алгоритма на данной ВС.

Пример

Пусть число процессоров: n = 2



Первоначально находим:

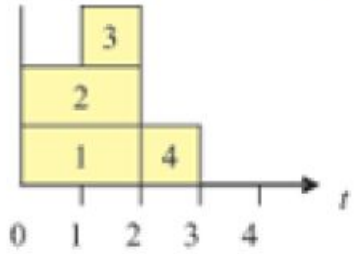
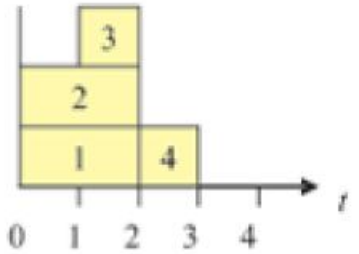
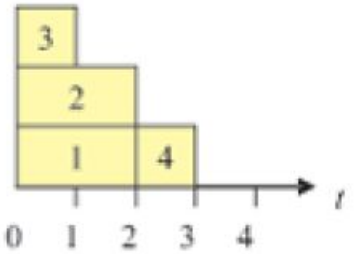
$$T = \max\left\{\frac{1}{2}\cdot(2+2+1+1), T_{\text{кр}} = 3\right\} = 3$$

Ткр=Т=3

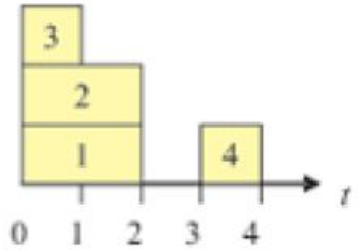
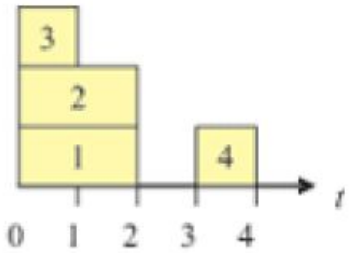
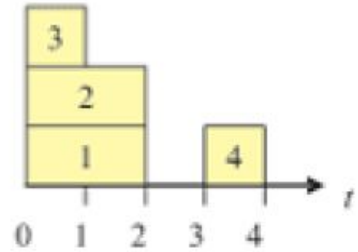
Находим для Ткр новые поздние сроки:

$\tau_{21}=2$, $\tau_{22}=2$, $\tau_{23}=2$, $\tau_{24}=3$

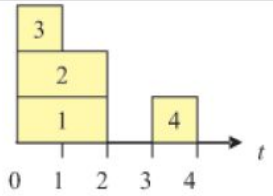
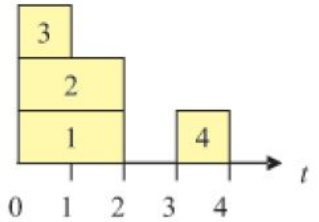
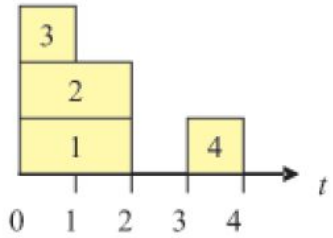
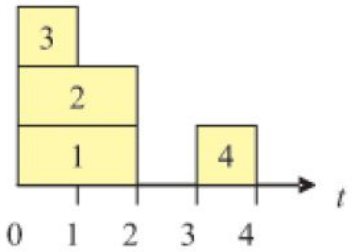
Пример

$\varphi[\theta_1,\theta_2]$	Значение $\varphi[\theta_1,\theta_2]$	$d= \varphi[\theta_1,\theta_2]-n(\theta_2- \theta_1)$	$T=T +]d/n[$	Диаграмма **(построены не верно)**
$\varphi^{(3)}[0,1]$	2	2-2(1-0)=0	3	
$\varphi^{(3)}[0,2]$	5	5-2(2-0)=1>0	3+]1/2[=4	
$\varphi^{(4)}[1,2]$	2	2-2(2-1)=0	4	

Пример

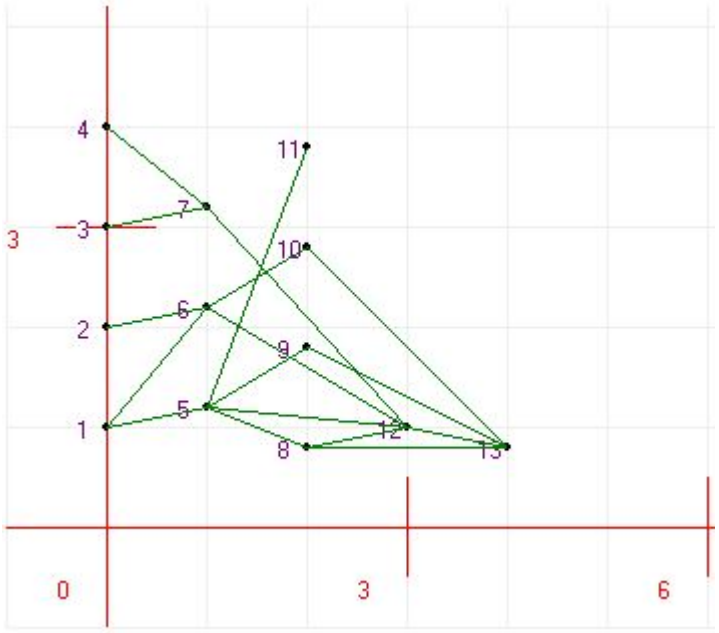
$\varphi[\theta_1,\theta_2]$	Значение $\varphi[\theta_1,\theta_2]$	$d= \varphi[\theta_1,\theta_2]-n(\theta_2- \theta_1)$	$T=T +]d/n[$	Диаграмма **(построены не верно)**
$\varphi^{(4)}[0,3]$	2	$2-2(3-0)=-4<0$	4	
$\varphi^{(4)}[1,3]$	2	$2-2(3-1)=-1$	4	
$\varphi^{(4)}[2,3]$	0	$0-2(3-2)=-2$	4	

Пример

$\varphi[\theta_1,\theta_2]$	Значение $\varphi[\theta_1,\theta_2]$	$d= \varphi[\theta_1,\theta_2]-n(\theta_2- \theta_1)$	$T=T +]d/n[$	Диаграмма **(построены не верно)**
$\varphi^{(4)}[0,4]$	6	6-2(4-0)=-2	4	
$\varphi^{(4)}[1,4]$	3	3-2(4-1)=-3	4	
$\varphi^{(4)}[2,4]$	1	1-2(4-2)=-3	4	
$\varphi^{(4)}[3,4]$	2	2-2(4-3)=0	4	

T = 4

Самостоятельная работа итоговая



$t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=1$, $t_4=3$, $t_5=2$, $t_6=5$, $t_7=2$, $t_8=2$, $t_9=1$, $t_{10}=6$, $t_{11}=1$, $t_{12}=2$, $t_{13}=4$.

$$T = T_{кр} + 2$$

1. Постройте параллельную форму графа;
2. Распределите операции по ярусам (группам);
3. Проведите оптимизацию групп;
4. Найдите ПМВНР;
5. Найдите ранние сроки выполнения работ;
6. Найдите поздние сроки выполнения работ при T=Tкр+3;
7. Постройте F – функцию плотности загрузки ВС при T;
8. Найдите минимальное число процессоров n’, необходимое для выполнения алгоритма за время T=Tкр;
9. Найдите минимальное время выполнения данного алгоритма на ВС с числом процессоров равным: n=2;