Семинар 3

доцент Волков Н.П.

Занятие 3.

Векторное и смешанное произведения векторов

Определение 1 Векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка векторов, если $\vec{c} \neq \vec{0}$

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv [\vec{a}, \vec{b}]$

Утверждение 1. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \subset V_3$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

а) геометрические свойства:

1° $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\square OBDA}$

2° $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

3° Для правого ОНБ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

б) алгебраические свойства:

1° $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

2° $(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda (\vec{a} \times \vec{c}) + \mu (\vec{b} \times \vec{c})$

3° $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Определение 2 Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \subset V_3$ называется число $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \equiv \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Утверждение 2 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \subset V_3$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства:

а) геометрические:

1° $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{cases} \Omega_п, \text{ если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{правая тройка} \\ -\Omega_п, \text{ если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{левая тройка} \end{cases}$

2° $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} \Longleftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны

б) алгебраические:

1° $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$

2° $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

3° $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = -\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}$

4° $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})\cdot\vec{c}\cdot\vec{d} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d}) + \mu(\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{d})$

Утверждение 3 Пусть в правом ОНБ $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $\vec{c} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Тогда

) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$

) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

839) $\vec{a}, \vec{b}$: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi = \frac{\pi}{6}$; $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = ?$

Решение: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$

$= 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{15}$

841) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

Решение: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 72$

$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{72}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{72}{3 \cdot 26} = \frac{12}{13}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = 3 \cdot 26 \cdot \left(\pm\frac{5}{13}\right) = \pm 30$

847) Даны векторы: $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{n}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$\vec{a} = \vec{p} \times \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{q} \times \vec{n}$, $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{n}$

Доказать, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Док-во: $\vec{a} \perp \vec{n}$, $\vec{b} \perp \vec{n}$, $\vec{c} \perp \vec{n}$

$\Rightarrow \vec{n}$ - вектор, ортогональный плоскости π

$\Rightarrow \vec{a} \parallel \pi$, $\vec{b} \parallel \pi$ и $\vec{c} \parallel \pi$, т.е.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарные векторы.

849 Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$:

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ и $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$

Доказать коллинеарность векторов $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$, т.е. $(\vec{a}-\vec{d})\parallel(\vec{b}-\vec{c})$?

Решение: $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{d}-\vec{b}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{c}\times\vec{d}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\vec{a}-\vec{d})\parallel(\vec{b}-\vec{c})$

851 $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ и $C(3;2;1)$

Найти: 1) $\vec{AB}\times\vec{BC}$; 2) $(\vec{BC}-2\vec{CA})\times\vec{CB}$

Решение: 1) $\vec{AB}=\{-1;3;-3\}$, $\vec{BC}=\{2;0;2\}$

$\Rightarrow \vec{AB}\times\vec{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & -3\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=(6+0)\vec{i}-(-2+6)\vec{j}+(0-6)\vec{k}=$

$=\boxed{\{6;-4;-6\}}$

2) $\vec{BC}=\{2;0;2\}$, $\vec{CA}=\{-1;-3;1\}$, $\vec{CB}=\{-2;0;-2\}$

$\vec{BC}-2\vec{CA}=\{4;6;0\}$

$(\vec{BC}-2\vec{CA})\times\vec{CB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 6 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{vmatrix}=-12\vec{i}-(-8)\vec{j}+(12)\vec{k}$

$(\vec{BC}-2\vec{CA})\times\vec{CB}=\boxed{\{-12;8;12\}}$

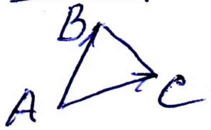
853| Сила $\vec P=\{2;-4;5\}$; $M_0(4;-2;3)$ – точка приложения. Найти момент силы P относительно точки $A(3;\ 2;-1)$

$\vec m_A$ – ?

$m_A = \vec P \times \vec{M_0A} =]\ \vec{M_0A}=\{-1;4;-4\}\ [= \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k\\ 2&-4&5\\ -1&4&-4\end{vmatrix} =$

$=(16-20)\vec i-(-8+5)\vec j+(8-4)\vec k = \boxed{-4\vec i+3\vec j+4\vec k}$

857| $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$ – вершины треугольника



Найти $S_{\Delta ABC}=?$

Решение $\vec{AB}=\{2;-2;-3\}$, $\vec{AC}=\{4;0;6\}$

$S_{\Delta ABC}=\frac12 S_{\square} = \frac12|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac12 \left|\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\2&-2&-3\\4&0&6\end{vmatrix}\right| =$

$=\frac12|(-12)\vec i-(12+12)\vec j+8\vec k| = \frac12\sqrt{144+576+64}=\frac12 28=$

$=\boxed{14}$

861| Дан вектор $\vec a=\{8;-15;3\}$

Найти $\vec m$: $\vec m\perp\vec a$, $\vec m\perp\vec k$, $\vec m\cdot\vec i>0$, $|\vec m|=51$

Решение: $\vec m = x(\vec a\times\vec k) = x\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\8&-15&3\\0&0&1\end{vmatrix} = x(-15\vec i-8\vec j)$

$|\vec m|=|x|\cdot|15\vec i+8\vec j|=|x|\sqrt{225+64}=|x|\sqrt{289}=17|x|$

$\Rightarrow |x|=\frac{51}{17}=3 \Rightarrow x=\pm3$

Из $\vec m\cdot\vec i>0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow \boxed{\vec m=\{45;24;0\}}$

864) Даны векторы $\vec{a}=\{2;-3;1\}$, $\vec{b}=\{-3;1;2\}$, $\vec{c}=\{1;2;3\}$ Найти 1) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=?$
2) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=?$

Решение:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-6-1)\vec{i}-(4+3)\vec{j}+(2-9)\vec{k}=\{-7;-7;-7\}$

$\Rightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -7 & -7 & -7\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(-21+14)\vec{i}-(-21+7)\vec{j}+$
$+(-14+7)\vec{k}=\boxed{\{-7;14;-7\}}$

2) $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(3-4)\vec{i}-(-9-2)\vec{j}+(-6-1)\vec{k}=$
$=\{-1;11;-7\}$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 11 & -7\end{vmatrix}=(21-11)\vec{i}-(-14+1)\vec{j}+$
$+(22-3)\vec{k}=\boxed{\{10;13;19\}}$

866) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка, $\vec{a}\perp\vec{b}\perp\vec{c}$
$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$
$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=?$

Решение:

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=$] тройка правая [$=\Omega_{п.д}=4\cdot2\cdot3=\boxed{24}$

869| Доказать: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a}) \overset{?}{=} 2\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$

Решение:

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a}) = (\vec{a}+\vec{b})\cdot[(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})] =$

$= (\vec{a}+\vec{b})\cdot[\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\underbrace{\vec{c}\times\vec{c}}_{\vec{0}}+\vec{c}\times\vec{a}] =$

$= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+$

$+\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a} =$

$= 2(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$

873| Даны векторы $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$, $\vec{c}=\{3;-2;5\}$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Решение:

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(10+2)+1(-10-3)+$

$+3(4-6) = 12-13-6 = \boxed{-7}$

875| Даны точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$; $D(2;1;3)$.

Доказать, что точки $A,B,C,D \in \pi$.

Решение

$\vec{AB}=\{-1;-1;6\}$, $\vec{AC}=\{-2;0;2\}$, $\vec{AD}=\{1;-1;4\}$

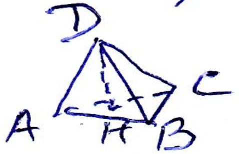
$\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot(2)+1\cdot(-8-2)+6(2) =$

$= -12+12 = 0 \Leftrightarrow \vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}$ - компланарны

$\Rightarrow A,B,C,D \in \pi$

877) $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$ - вершины тетраэдра

Найти DH - высоту.



Решение: $\Omega_{T} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DH$

$DH = \frac{3\Omega_T}{S_{\Delta ABC}}$

$\Omega_T = \frac{1}{6}|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}| =]\ \vec{AB}=\{2;-2;-3\}$, $\vec{AC}=\{4;0;6\}$; $\vec{AD}=\{-7;-7;7\}\ [=$

$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|2\cdot 42 \ +2(28+42)\ -3(-28)| =$

$= \frac{1}{6}\cdot 4\cdot 7(3+5+3) = \frac{14\cdot 11}{3}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}\right| =$

$= \frac{1}{2}|-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}| = 2\cdot|-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}| =$

$= 2\cdot\sqrt{9+36+4} = 2\cdot 7 = 14$

$DH = \frac{3\cdot 14\cdot 11}{3\cdot 14} = \boxed{11}$

Дома: К.840, 844, 848, 850, 852, 856, 860, 862; 867, 870, 874, 876, 878