

Семинар 3

доцент Волков Н.П.

Занятие 3.

Векторное и смешанное произведения векторов

Определение 1 Векторным произведением векторов \vec{a}, \vec{b} называется вектор \vec{c} :

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
- 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов, если $\vec{c} \neq \vec{0}$

Обозначение:
 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv [\vec{a}, \vec{b}]$

Утверждение 1. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

а) геометрические свойства:

1° $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\square OABD}$



2° $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

3° Для правого ОНБ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

б) алгебраические свойства:

1° $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

2° $(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{c}) + \mu(\vec{b} \times \vec{c})$

3° $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Определение 2 Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ называется число $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \equiv \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Утверждение 2 $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V_3$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
справедливы следующие свойства:

а) геометрические:

$$1^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{cases} \Omega_{\pi}, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - правая тройка} \\ -\Omega_{\pi}, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - левая тройка} \end{cases}$$

$$2^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ коллинеарны}$$

б) алгебраические:

$$1^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$2^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$3^\circ \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$4^\circ (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot \vec{c} \cdot \vec{d} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{d}) + \mu (\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{d})$$

Утверждение 3 Пусть в правом ОНБ
 $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ $\vec{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\vec{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$,
 $\vec{c} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Тогда

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$839] \vec{a}, \vec{b}: (\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{b}}) = \varphi = \frac{\pi}{6}; |\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ?$$

$$\text{Решение: } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{b}}) = \\ = 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{15}$$

$$841] |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 26, |\vec{a} \times \vec{b}| = 72.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

$$\text{Решение: } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 72$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{72}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{72}{3 \cdot 26} = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \pm \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = 3 \cdot 26 \cdot \left(\pm \frac{5}{13}\right) = \pm 30$$

$$847] \text{ Даны векторы: } \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{n}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}:$$

$$\vec{a} = \vec{p} \times \vec{n}, \vec{b} = \vec{q} \times \vec{n}, \vec{c} = \vec{r} \times \vec{n}$$

Доказать, что $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ коллинеарны.

$$\text{Док-во: } \vec{a} \perp \vec{n}, \vec{b} \perp \vec{n}, \vec{c} \perp \vec{n}$$

$\Rightarrow \vec{n}$ - вектор, ортогональный плоскости

$\Rightarrow \vec{a} \parallel \pi, \vec{b} \parallel \pi$ и $\vec{c} \parallel \pi$, т.е.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - коллинеарные векторы.

849] Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} \text{ и } \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$$

Доказать коллинеарность векторов

$\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$, т.е. $(\vec{a} - \vec{d}) \parallel (\vec{b} - \vec{c})$?

Решение: $(\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} -$
 $-\vec{d} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{d} - \vec{b} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d} - \vec{c} \times \vec{d} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{d}) \parallel (\vec{b} - \vec{c})$

851] $A(2; -1; 2), B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$

Найти: 1) $\vec{AB} \times \vec{BC}$; 2) $(\vec{BC} - 2\vec{CA}) \times \vec{CB}$

Решение: 1) $\vec{AB} = \{-1; 3; -3\}, \vec{BC} = \{2; 0; 2\}$

$$\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6+0)\vec{i} - (-2+6)\vec{j} + (0-6)\vec{k} =$$
$$= \boxed{\{6; -4; -6\}}$$

2) $\vec{BC} = \{2; 0; 2\}, \vec{CA} = \{-1; -3; 1\}, \vec{CB} = \{-2; 0; -2\}$

$$\vec{BC} - 2\vec{CA} = \{4; 6; 0\}$$

$$(\vec{BC} - 2\vec{CA}) \times \vec{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - (-8)\vec{j} + (12)\vec{k}$$

$$(\vec{BC} - 2\vec{CA}) \times \vec{CB} = \boxed{\{-12; 8; 12\}}$$

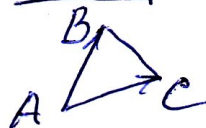
853 | Сила $\vec{P} = \{2; -4; 5\}$; $M_0(4; -2; 3)$ - точка приложения. Найти момент силы P относительно точки $A(3; 2; -1)$

\vec{m}_A - ?

$$m_A = \vec{P} \times \vec{M}_0 A =] \vec{M}_0 A = \{-1; 4; -4\} [= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (16 - 20)\vec{i} - (-8 + 5)\vec{j} + (8 - 4)\vec{k} = \boxed{-4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}}$$

857 | $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$ - вершины треугольника. Найти $S_{\triangle ABC}$ = ?



Решение $\vec{AB} = \{2; -2; -3\}$, $\vec{AC} = \{4; 0; 6\}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |(-12)\vec{i} - (12+12)\vec{j} + 8\vec{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 576 + 64} = \frac{1}{2} 28 =$$

$$= \boxed{14}$$

861 | Дан вектор $\vec{a} = \{8; -15; 3\}$

Найти \vec{m} : $\vec{m} \perp \vec{a}$, $\vec{m} \perp \vec{k}$, $\vec{m} \cdot \vec{i} > 0$, $|\vec{m}| = 51$

Решение: $\vec{m} = x(\vec{a} \times \vec{k}) = x \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x(-15\vec{i} - 8\vec{j})$

$$|\vec{m}| = |x| \cdot |15\vec{i} + 8\vec{j}| = |x| \sqrt{225 + 64} = |x| \sqrt{289} = 17|x|$$

$$\Rightarrow |x| = \frac{51}{17} = 3 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Из } \vec{m} \cdot \vec{i} > 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \boxed{\vec{m} = \{45; 24; 0\}}$$

864] Даны векторы $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$, $\vec{b} = \{-3; 1; 2\}$,
 $\vec{c} = \{1; 2; 3\}$ Найти 1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = ?$
 2) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = ?$

Решение:

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6-1)\vec{i} - (4+3)\vec{j} + (2-9)\vec{k} = \{-7; -7; -7\}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & -7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-21+14)\vec{i} - (-21+7)\vec{j} +$$

$$+(-14+7)\vec{k} = \{-7; 14; -7\}$$

$$2) \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3-4)\vec{i} - (-9-2)\vec{j} + (-6-1)\vec{k} =$$

$$= \{-1; 11; -7\}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 11 & -7 \end{vmatrix} = (21-11)\vec{i} - (-14+1)\vec{j} +$$

$$+ (22-3)\vec{k} = \{10; 13; 19\}$$

866] $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка, $\vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}$

$$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = ?$$

Решение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} =] \text{тройка правая} [= \Omega_{n.g} = 4 \cdot 2 \cdot 3 = \boxed{24}]$$

869 | Доказать: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \stackrel{?}{=} 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

Решение:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) (\vec{c} + \vec{a}) &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot [(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})] = \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot [\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}] = \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \\ &+ \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \\ &= 2(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})\end{aligned}$$

873 | Даны векторы $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$,
 $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (10 + 2) + 1 \cdot (-10 - 3) + \\ &+ 3(4 - 6) = 12 - 13 - 6 = \boxed{-7}\end{aligned}$$

875 | Даны точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$,
 $C(-1; 2; 1)$; $D(2; 1; 3)$.

Доказать, что точки $A, B, C, D \in \pi$.

Решение

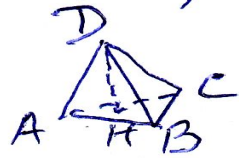
$$\vec{AB} = \{-1; -1; 6\}, \vec{AC} = \{-2; 0; 2\}, \vec{AD} = \{1; -1; 4\}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2) + 1 \cdot (-8 - 2) + 6(2) =$$

$$= -12 + 12 = 0 \Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \text{ - коллинеарны}$$

$$\Rightarrow A, B, C, D \in \pi$$

877] $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$,
 $D(-5; -4; 8)$ - вершины тетраэдра
 Найти ДН-высоту.



Решение: $\Omega_T = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DH$

$$DH = \frac{3 \cdot \Omega_T}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\Omega_T = \frac{1}{6} |\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}| =] \vec{AB} = \{2; -2; -3\},$$

$$\vec{AC} = \{4; 0; 6\}; \vec{AD} = \{-7; -7; 7\} [=$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |2 \cdot 42 + 2(28 + 42) - 3(-28)| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 7 (3 + 5 + 3) = \frac{14 \cdot 11}{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |-12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}| = 2 \cdot |-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}| =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{9 + 36 + 4} = 2 \cdot 7 = 14$$

$$DH = \frac{3 \cdot 14 \cdot 11}{3 \cdot 14} = \boxed{11}$$

Дома: К. 840, 844, 848, 850, 852, 856, 860,
 862; 867, 870, 874, 876, 878