Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Практика №2
Вычислительная математика

группа в35309904/90022

Воскобойников С.П.

Доцент ВШ ПИ ИКНТ, к.ф.-м.н.

voskoboynikov@mail.ru

21.10.2020

Содержание

Вычисление норм векторов и матриц

Нормы векторов и матриц

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \qquad \|A\|_2 = \mu_{\max} \quad \mu_i = +\sqrt{\lambda_i\left(A^T A\right)} \qquad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|$$

,

Вычислите $\|x\|_1, \|x\|_2$ *и* $\|x\|_\infty$ *вектора*

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Вычислите $\|A\|_1$ *и* $\|A\|_\infty$ *матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Оценка собственного числа

$$2.\ \textit{Оценка}\quad |\lambda|_{\max}$$

$$|\lambda|_{\max} \le \|A\|$$

$$\textit{Используя}\quad \|A\|_1 \ \textit{и}\ \|A\|_\infty,\ \textit{оцените}\quad |\lambda|_{\max}\quad \textit{для}\quad \textit{матрицы}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Какая норма даёт лучшую оценку?}$$

Теорема Гершгорина

3. *Верно ли утверждение, что матрица имеющая нулевое собственное значение вырожденна, а значит её определитель равен нулю?*

4.*Теорема Гершгорина утверждает, что все собственные числа матрицы лежат на комплексной плоскости в объединении кругов радиуса* $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}|$ *с центром в точке* $(a_{ii}, 0)$

Применяя теорему Гершгорина для транспоированной матрицы, получим что все собственные числа матрицы лежат на комплексной плоскости в объединении кругов радиуса $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ji}|$

с центром в точке $(a_{ii}, 0)$

Какие из трёх матриц заведома невырожденны?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Вычисление невязки и числа обусловленности

5. *Для системы уравнений* $Ax = b$ *вычислите невязку* $r = b - A\tilde{x}$ *и число обусловленности* $\nu(A) = cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, *используя* $\|A\|_1$ *и* $\|A\|_\infty$, *если*

,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

,